МАКРОЕКОНОМІЧНІ ТА РЕГІОНАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ РОЗВИТКУ ПРОМИСЛОВОСТІ

УДК 620.9: 519.863

Алексей Владимирович Половян,
д-р экон. наук, доцент
Институт экономики промышленности
НАН Украины, Киев

ОПТИМИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ ПОТРЕБЛЕНИЯ ПЕРВИЧНЫХ ЭНЕРГОРЕСУРСОВ

Современная экономика, основанная на автоматизированном труде, невозможна без потребления энергии. Энергетика является одной из базовых отраслей экономики, бесперебойное функционирование которой обеспечивает экономическое развитие. Эффективное использование энергетических ресурсов создает необходимые предпосылки для устойчивого развития, обеспечивающего рост благосостояния и повышение уровня жизни населения.

Исследование эффективности использования энергетических ресурсов, сокращения энергоемкости валового внутреннего продукта, прогнозирования потребности в энергетических ресурсах приведено в работах А. Дячука [9], Р. Подольца [8]. Особенности оценки параметров ценовой эластичности потребления энергоресурсов исследовались в работах И. Башмакова [2, 3], Х. Велша [26], Дж. Коуриса [24], Р. Хааса [22] и др. Особенности государственной энергетической политики рассмотрены в работах Д. Череватского [1, 18], А. Кузовкина [5], В. Волконского [6] и др.

Тем не менее вопросы формирования оптимальной структуры энергопотребления, позволяющей сократить расходы на энергоресурсы при существующей технологии, остаются недостаточно изученными. Поэтому *целью* статьи является разработка методического подхода, позволяющего при заданной технологии производства определить значения потребления первичных энергоресурсов, оптимизирующие общие затраты на энергоресурсы.

Особое значение для оценки потребности в энергоресурсах имеют экономико-математические модели. В этом направлении имеется ряд значительных достижений. Для определения электропотребления экономики страны на долгосрочный период предложена экономико-математическая модель, которая позволяет оценивать объемы использования электроэнергии на уровне страны, отраслей и производств при различных вариантах внедрения мероприятий энергосбережения и обеспечения социально-экономического развития страны [7].

Модель прогнозирования энергопотребления по отдельным видам энергоресурсов для нефтепереработки, которая предполагает зависимость удельных расходов энергоресурсов от коэффициента загрузки технологического оборудования и уровня технически возможного использования вторичных энергетических ресурсов и других мероприятий и направлений энергосбережения [12].

Модель развития энергетики в условиях либерализации и глобализации мировой экономики и интернационализации экологических ограничений предложена в работе [11]. Данная модель предполагает оптимизацию потребления первичных энергоресурсов на основе цен на энергоресурсы, ограничений по выбросам в атмосферу по критерию оптимальности прогноза развития экономики и энергетики страны.

В МАГАТЭ разработаны модели оценки спроса на энергоресурсы: MAED и WASP, а также производные от них ENPEP-баланс. Модель MAED (Model for Analysis of Energy Demand) основана на расчете темпа роста потребления энергии и позволяет оценивать энергетические потребности на основе сценариев социально-экономического, технологического и демографического развития [23].

Модель WASP (Wien Automatic System Planning Package) позволяет разрабатывать оптимальный долгосрочный план развития энергогенерирующей системы на основе информации об инвестициях, расходах на топливо, затрат на хранение энергоресурсов и пр. Оптимизация предполагает нахождение минимального значения дисконтированных затрат на энергоресурсы [21].

В работах Р. Подольца [8] и А. Маляренко [12] основу прогнозирования энергопотребности составляет детерминированная модель произведения энергоемкости по отдельному виду ПЭР и прогнозируемому объему ВВП. В дальнейшем данная модель расширяется за счет учета глобализационных процессов, цен на импортные энергоносители, изменений в структуре производства экономики страны и пр.

Следует учесть, что все рассмотренные подходы при оценке спроса на энергоресурсы опираются на детерминированные факторные модели, которые в качестве одного из факторов включают энергоемкость. Данный подход особенно эффективен, когда необходимо получить точную количественную оценку потребности в энергоресурсах на микроуровне в краткосрочном периоде. В дальнейшем для определения общей потребности в энергоресурсах отрасли или экономики в целом осуществляется процедура агрегации (метод «снизу–вверх»). При этом возможно нахождение общего значения энергоемкости по отрасли (или экономике в целом) и использование данного показателя для расчета общей потребности первичных энергоресурсов. С учетом многообразия влияющих факторов на результирующий показатель, а также стохастичной природы экономических показателей использование данного типа моделей значительно ограничивает возможность их применения для получения точных количественных значений на больших временных интервалах оцениваемого показателя, что особенно важно для макроэкономического анализа. Следует также отметить, что детерминированные и построенные на их основе модели не позволяют учесть взаимозаменяемости факторов, которая играет важную роль в реальной экономике.

Стохастические модели предполагают стохастичность оцениваемых показателей и позволяют преодолеть недостатки детерминированных моделей. Их применение позволяет оценивать влияние ключевых факторов с учетом динамики, что особенно важно для экономических процессов. Для описания потребления первичных энергоресурсов можно воспользоваться следующей трансцендентно-логарифмической функцией [1] [20]:

$$\ln(E) = b_0 + \ln(Q) + b_k \ln(C) + b_l \ln(G) + {}$$
$$+ \tfrac{1}{2} b_{kk} (\ln(C))^2 + \tfrac{1}{2} b_{ll} (\ln(G))^2 + \qquad (1)$$
$$+ b_{kl} \ln(C) \ln(G),$$

где E – суммарное потребление первичных энергоресурсов в натуральном выражении;

Q – объем производства в стоимостном выражении;

C, G – потребление отдельных видов ресурсов в натуральном выражении.

Функция (1) позволяет определить коэффициенты эластичности между ос-

[1] При применении данной функции предполагается, что выпуск зависит от объема используемых факторов, однако точный вид зависимости неизвестен. Тогда логарифм выпуска зависит от логарифма производственных ресурсов. Раскладывая неизвестную функцию в ряд Тейлора до второго члена в точке 1, можно получить трансцендентно-логарифмическую функцию [10].

ISSN 1562-109X
2015, № 4 (72)

новными факторами, влияющими на потребление энергии, с учетом сложившейся технологии. Существующая технология предполагает определенную комбинацию ресурсов, в том числе энергетических, которая позволяет обеспечить требуемый объем производства. При этом часть одного ресурса может быть частично заменена другим ресурсом (т.н. предельная норма технического замещения). Необходимо отметить, что возможности замещения в рамках отдельной технологии имеют ограничения и осуществляются в определенных границах, то есть нельзя полностью заместить один ресурс другим.

Для оценки экономической эффективности потребления энергетических ресурсов наибольшее значение имеет стоимостное измерение. Согласно теореме двойственности функции (1) соответствует дважды дифференцируемая функция стоимости

$$\ln(Z) = a_0 + \ln(E) + a_k \ln(p_C) + a_l \ln(p_G) + + \tfrac{1}{2} a_{kk} (\ln(p_C))^2 + \tfrac{1}{2} a_{ll} (\ln(p_G))^2 + a_{kl} \ln(p_C) \ln(p_G), \quad (2)$$

где Z – суммарное потребление первичных энергоресурсов в стоимостном выражении;

p_C, p_G – цены на первичные энергоресурсы.

По лемме Шепарда производная от функции издержек производства по цене определенного фактора производства равна спросу на соответствующий фактор [25]

$$\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \ln(p_c)} = a_k + a_{kk} \ln(p_C) + a_{kl} \ln(p_G) = \ln(C). \quad (3)$$

Преобразуем функцию (2) следующим образом:

$$\ln(Z) = a_0 + \ln(E) + (a_k + \tfrac{1}{2} a_{kk} (\ln(p_C)) + a_{kl} \ln(p_G)) \ln(p_C) + a_l \ln(p_G) + \tfrac{1}{2} a_{ll} (\ln(p_G))^2. \quad (4)$$

Используя (3), функцию (2) можно представить следующим образом:

$$\ln(Z) = a_0 + \ln(E) + \ln(\tilde{N}) \ln(p_C) + a_l \ln(p_G) + \tfrac{1}{2} a_{ll} (\ln(p_G))^2. \quad (5)$$

Аналогично для $\ln(p_G)$

$$\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \ln(p_G)} = a_l + a_{ll} \ln(p_G) + a_{kl} \ln(p_C) = \ln(G). \quad (6)$$

При этом функция (2) примет вид

$$\ln(Z) = a_0 + \ln(E) + a_k \ln(p_C) + (a_l + \tfrac{1}{2} a_{ll} (\ln(p_G)) + a_{kl} \ln(p_C)) \ln(p_G) + \tfrac{1}{2} a_{kk} (\ln(p_C))^2 = a_0 + \ln(E) + a_k \ln(p_C) + \ln(G) \ln(p_G) + \tfrac{1}{2} a_{kk} (\ln(p_C))^2. \quad (7)$$

Приравнивая между собой функции (5) и (7), после преобразований функция затрат принимает вид

$$\ln(Z) = a_0 + \ln(E) + \ln(\tilde{N}) \ln(p_C) + \ln(G) \ln(p_G) - a_{kl} \ln(p_G) \ln(p_c). \quad (8)$$

Согласно полученной функции затраты первичных энергоресурсов в стоимостном выражении зависят от количества потребленных первичных энергоресурсов в натуральном выражении и цен на эти ресурсы.

При объединении функций (8) и (1) получается следующая система:

$$\begin{cases} \ln(Z) = a_0 + \ln(E) + \ln(\tilde{N}) \ln(p_C) + \ln(G) \ln(p_G) - a_{kl} \ln(p_G) \ln(p_c) \to \min \\ \ln(E) = b_0 + \ln(Q) + b_k \ln(C) + b_l \ln(G) + \tfrac{1}{2} b_{kk} (\ln(C))^2 + \tfrac{1}{2} b_{ll} (\ln(G))^2 + \\ + b_{kl} \ln(C) \ln(G) \\ \ln(C) \ge 0, \quad \ln(G) \ge 0. \end{cases} \quad (9)$$

Таким образом, система уравнений (9) позволяет найти такие значения потребления отдельных первичных энергоресурсов C и G, при которых достигается минимум общих затрат в стоимостном выражении при заданной технологии, определяемой уравнением (1). Решением данной задачи будут координаты точки касания плоскости ограничений и целевой функции.

Значения отдельных первичных энергоресурсов, которые оптимизируют функцию общих стоимостных затрат на энергоносители, определяются следующим образом (процедура получения значения отдельных первичных энергоресурсов приведена в Приложении):

$$
\begin{aligned}
\ln(C) = {} & (-\frac{b_k}{b_{kk}}-\frac{b_{kl}}{b_{kk}}(\frac{b_{kl}b_k-b_{kk}b_l}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^{2}}))-(\frac{\ln(p_c)}{b_{kk}}+\frac{b_{kl}}{b_{kk}}(\frac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^{2}}))-\\
& -(b_l(\frac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^{2}})-b_k(\frac{\ln(p_c)}{b_{kk}}+\frac{b_{kl}}{b_{kk}}(\frac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^{2}}))-\\
& -b_{kk}(-\frac{b_k}{b_{kk}}-\frac{b_{kl}}{b_{kk}}(\frac{b_{kl}b_k-b_{kk}b_l}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^{2}}))(\frac{\ln(p_c)}{b_{kk}}+\frac{b_{kl}}{b_{kk}}(\frac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^{2}}))+\\
& +b_{ll}(\frac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^{2}})(\frac{b_{kl}b_k-b_{kk}b_l}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^{2}})+b_{kl}(-\frac{b_k}{b_{kk}}-\frac{b_{kl}}{b_{kk}}(\frac{b_{kl}b_k-b_{kk}b_l}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^{2}}))\\
& (\frac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^{2}})-b_{kl}(\frac{b_{kl}b_k-b_{kk}b_l}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^{2}})(\frac{\ln(p_c)}{b_{kk}}+\frac{b_{kl}}{b_{kk}}(\frac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^{2}})))\pm\\
& \times(\frac{\sqrt{\begin{aligned}
& (b_l(\frac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^{2}})-b_k(\frac{\ln(p_c)}{b_{kk}}+\frac{b_{kl}}{b_{kk}}(\frac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^{2}}))-\\
& -b_{kk}(-\frac{b_k}{b_{kk}}-\frac{b_{kl}}{b_{kk}}(\frac{b_{kl}b_k-b_{kk}b_l}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^{2}}))(\frac{\ln(p_c)}{b_{kk}}+\frac{b_{kl}}{b_{kk}}(\frac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^{2}}))+\\
& +b_{ll}(\frac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^{2}})(\frac{b_{kl}b_k-b_{kk}b_l}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^{2}})+b_{kl}(-\frac{b_k}{b_{kk}}-\frac{b_{kl}}{b_{kk}}(\frac{b_{kl}b_k-b_{kk}b_l}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^{2}}))\\
& (\frac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^{2}})-b_{kl}(\frac{b_{kl}b_k-b_{kk}b_l}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^{2}})(\frac{\ln(p_c)}{b_{kk}}+\frac{b_{kl}}{b_{kk}}(\frac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^{2}})))^2-\\
& -4({}^{1}\!/_{2}\,b_{kk}(\frac{\ln(p_c)}{b_{kk}}+\frac{b_{kl}}{b_{kk}}(\frac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^{2}}))+{}^{1}\!/_{2}\,b_{ll}(\frac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^{2}})^2-\\
& -b_{kl}(\frac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^{2}})(\frac{\ln(p_c)}{b_{kk}}+\frac{b_{kl}}{b_{kk}}(\frac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^{2}})))({}^{1}\!/_{2}\,b_{kk}(-\frac{b_k}{b_{kk}}-\\
& -\frac{b_{kl}}{b_{kk}}(\frac{b_{kl}b_k-b_{kk}b_l}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^{2}}))^2+b_0+\ln(Q)+b_k(-\frac{b_k}{b_{kk}}-\frac{b_{kl}}{b_{kk}}(\frac{b_{kl}b_k-b_{kk}b_l}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^{2}}))+\\
& +b_l(\frac{b_{kl}b_k-b_{kk}b_l}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^{2}})+{}^{1}\!/_{2}\,b_{ll}(\frac{b_{kl}b_k-b_{kk}b_l}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^{2}})^2+b_{kl}(\frac{b_{kl}b_k-b_{kk}b_l}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^{2}})(-\frac{b_k}{b_{kk}}-\frac{b_{kl}}{b_{kk}}(\frac{b_{kl}b_k-b_{kk}b_l}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^{2}}))-\ln(E))
\end{aligned}}}{\left\{\begin{aligned}
& 2({}^{1}\!/_{2}\,b_{kk}(\frac{\ln(p_c)}{b_{kk}}+\frac{b_{kl}}{b_{kk}}(\frac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^{2}}))+\\
& +{}^{1}\!/_{2}\,b_{ll}(\frac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^{2}})^2-b_{kl}(\frac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^{2}})(\frac{\ln(p_c)}{b_{kk}}+\\
& +\frac{b_{kl}}{b_{kk}}(\frac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^{2}})))
\end{aligned}\right\}}) \qquad (10)
\end{aligned}
$$

ISSN 1562-109X
2015, № 4 (72)

$$
\ln(G)=\left(\frac{\begin{gathered}
-\Big(b_l\big(\tfrac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^2}\big)-b_k\big(\tfrac{\ln(p_c)}{b_{kk}}+\tfrac{b_{kl}}{b_{kk}}\big(\tfrac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^2}\big)\big)-\\
-b_{kk}\big(-\tfrac{b_k}{b_{kk}}-\tfrac{b_{kl}}{b_{kk}}\big(\tfrac{b_{kl}b_k-b_{kk}b_l}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^2}\big)\big)\big(\tfrac{\ln(p_c)}{b_{kk}}+\tfrac{b_{kl}}{b_{kk}}\big(\tfrac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^2}\big)\big)+\\
+b_{ll}\big(\tfrac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^2}\big)\big(\tfrac{b_{kl}b_k-b_{kk}b_l}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^2}\big)+b_{kl}\big(-\tfrac{b_k}{b_{kk}}-\tfrac{b_{kl}}{b_{kk}}\big(\tfrac{b_{kl}b_k-b_{kk}b_l}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^2}\big)\big)\\
\big(\tfrac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^2}\big)-b_{kl}\big(\tfrac{b_{kl}b_k-b_{kk}b_l}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^2}\big)\big(\tfrac{\ln(p_c)}{b_{kk}}+\tfrac{b_{kl}}{b_{kk}}\big(\tfrac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^2}\big)\big)\Big)\pm\\
\sqrt{\begin{gathered}
\Big(b_l\big(\tfrac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^2}\big)-b_k\big(\tfrac{\ln(p_c)}{b_{kk}}+\tfrac{b_{kl}}{b_{kk}}\big(\tfrac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^2}\big)\big)-\\
-b_{kk}\big(-\tfrac{b_k}{b_{kk}}-\tfrac{b_{kl}}{b_{kk}}\big(\tfrac{b_{kl}b_k-b_{kk}b_l}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^2}\big)\big)\big(\tfrac{\ln(p_c)}{b_{kk}}+\tfrac{b_{kl}}{b_{kk}}\big(\tfrac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^2}\big)\big)+\\
+b_{ll}\big(\tfrac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^2}\big)\big(\tfrac{b_{kl}b_k-b_{kk}b_l}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^2}\big)+b_{kl}\big(-\tfrac{b_k}{b_{kk}}-\tfrac{b_{kl}}{b_{kk}}\big(\tfrac{b_{kl}b_k-b_{kk}b_l}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^2}\big)\big)\\
\big(\tfrac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^2}\big)-b_{kl}\big(\tfrac{b_{kl}b_k-b_{kk}b_l}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^2}\big)\big(\tfrac{\ln(p_c)}{b_{kk}}+\tfrac{b_{kl}}{b_{kk}}\big(\tfrac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^2}\big)\big)\Big)^2-\\
-4\big(\tfrac{1}{2}b_{kk}\big(\tfrac{\ln(p_c)}{b_{kk}}+\tfrac{b_{kl}}{b_{kk}}\big(\tfrac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^2}\big)\big)+\tfrac{1}{2}b_{ll}\big(\tfrac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^2}\big)^2-\\
-b_{kl}\big(\tfrac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^2}\big)\big(\tfrac{\ln(p_c)}{b_{kk}}+\tfrac{b_{kl}}{b_{kk}}\big(\tfrac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^2}\big)\big)\big)\big(\tfrac{1}{2}b_{kk}\big(-\tfrac{b_k}{b_{kk}}-\\
-\tfrac{b_{kl}}{b_{kk}}\big(\tfrac{b_{kl}b_k-b_{kk}b_l}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^2}\big)\big)^2+b_0+\ln(Q)+b_k\big(-\tfrac{b_k}{b_{kk}}-\tfrac{b_{kl}}{b_{kk}}\big(\tfrac{b_{kl}b_k-b_{kk}b_l}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^2}\big)\big)+\\
+b_l\big(\tfrac{b_{kl}b_k-b_{kk}b_l}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^2}\big)+\tfrac{1}{2}b_{ll}\big(\tfrac{b_{kl}b_k-b_{kk}b_l}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^2}\big)^2+b_{kl}\big(\tfrac{b_{kl}b_k-b_{kk}b_l}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^2}\big)\\
\big(-\tfrac{b_k}{b_{kk}}-\tfrac{b_{kl}}{b_{kk}}\big(\tfrac{b_{kl}b_k-b_{kk}b_l}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^2}\big)\big)-\ln(E)\big)
\end{gathered}}
\end{gathered}}{\left\{\begin{gathered}
2\big(\tfrac{1}{2}b_{kk}\big(\tfrac{\ln(p_c)}{b_{kk}}+\tfrac{b_{kl}}{b_{kk}}\big(\tfrac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^2}\big)\big)+\\
+\tfrac{1}{2}b_{ll}\big(\tfrac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^2}\big)^2-b_{kl}\big(\tfrac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^2}\big)\big(\tfrac{\ln(p_c)}{b_{kk}}+\\
+\tfrac{b_{kl}}{b_{kk}}\big(\tfrac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^2}\big)\big)\big)
\end{gathered}\right\}}\right)\times
$$

$$
\times\left(\frac{b_{kl}\ln(p_c)-b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^2}\right)+\left(\frac{b_{kl}b_k-b_{kk}b_l}{b_{ll}b_{kk}-b_{kl}^2}\right). \tag{11}
$$

В дальнейшем необходимо с помощью производных второго порядка определить характер полученного оптимума (минимум или максимум).

Полученные формулы (10) и (11) позволяют определить значения потребления первичных энергоресурсов, при которых функция затрат (2) достигает оптимума. Следует отметить, что полученные количественные значения потребления первичных энергоресурсов являются лишь ориентиром, позволяющим определить возможные варианты развития событий и не могут быть использованы в качестве окончательных целевых индикаторов. Это связано с рядом моментов. Во-первых, оценка параметров функций (1) и (2) дает приближенное значение зависимых переменных и содержит ошибку, вызванную природной стохастичностью описываемых процессов и используемых взаимосвязей. Во-вторых, большое значение имеют инвестиционные расходы, связанные с изменением технологии (см., например, источник [17]). Замена одного ресурса другим может потребовать значительных капитальных расходов, срок окупаемости которых может превышать несколько лет [1]. Однако для выбора приоритетов при разработке программ развития энергетически зависимых отраслей промышленности применение данного подхода позволит получить основные ориентиры для формирования энергетического портфеля.

В качестве примера практического применения предложенного подхода рассмотрим металлургический комплекс Украины. Высокая доля энергозатрат в себестоимости продукции предприятий металлургии [2] делает их сильно чувствительными к изменению цен на энергоносители. На протяжении последнего десятилетия цены на природный газ в Украине значительно возросли. Это привело к тому, что на промышленных предприятиях, в том числе металлургического комплекса, была принята стратегия замещения природного газа каменным углем [16]. Применение предложенного подхода к определению соотношения потребления энергоресурсов, при котором расходы на энергоносители будут минимальны, может послужить основой для принятия эффективных управленческих решений для предприятий данного вида деятельности.

Параметризация функций (1) и (8) осуществлялась на основе данных, представленных в работах [13, 19], путем минимизации суммы квадрата ошибки. Основными первичными энергоресурсами для металлургии является каменный уголь, на который приходится 19% всех затрат первичной энергии в металлургии в 2012 г., и природный газ – 16 %. После оценки параметров получены следующие уравнения:

$$\ln(E) = 0{,}0003 + \ln(Q) + 0{,}00012\ \ln(C) + \\ + 0{,}007\ \ln(G) - 0{,}003\ (\ln(C))^2 - \\ - 0{,}0004\ (\ln(G))^2 + 0{,}022\ \ln(C)\ln(G); \qquad (12)$$

$$\ln(Z) = \ln(E) + \ln(\tilde{N})\ln(p_C) + \\ + \ln(G)\ln(p_G) + 0{,}1\ln(p_G)\ln(p_c) - \\ -13{,}45, \qquad (13)$$

где E – суммарное потребление первичных энергоресурсов предприятиями металлургического комплекса Украины, т у. т.;

Q – фактическое значение официальных и теневых объемов [3] реализованной продукции для металлургических предприятий Украины, млн грн;

C, G – потребление каменного угля и природного газа, т у.т.;

[1] Следует учитывать, что рынки сырья имеют высокую волатильность и изменение цен может происходить разнонаправленно несколько раз за расчетный период.

[2] По разным оценкам доля, приходящаяся на энергозатраты при производстве чугуна, может достигать 30-50 % от общей суммы затрат [17].

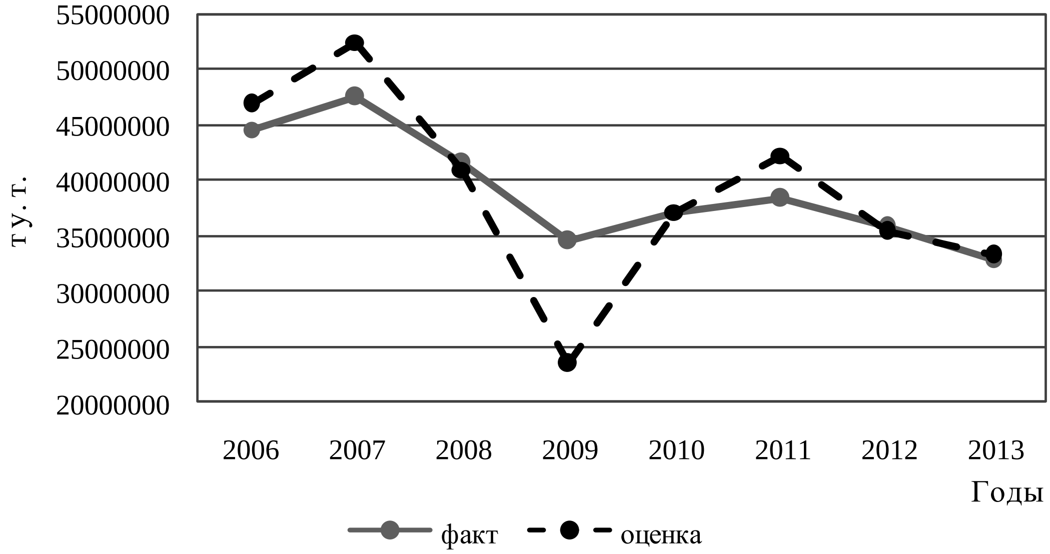
[3] Подходы к оценке теневой экономики приведены в источниках [14, 15].

ISSN 1562-109X
2015, № 4 (72)

Z – суммарное потребление первичных энергоресурсов для металлургических предприятий Украины, трлн грн;

p_C, p_G – цены на каменный уголь и природный газ, дол. США.

Как видно из рис. 1, полученное уравнение зависимости суммарного потребления первичных энергоресурсов от официальных и теневых объемов реализованной продукции, а также потребления каменного угля и природного газа обладает достаточной точностью (средняя абсолютная ошибка в процентах (MAPE) равна 3 %). Средняя абсолютная ошибка в процентах (MAPE) для суммарного стоимостного потребления первичных энергоресурсов составила 9 %.

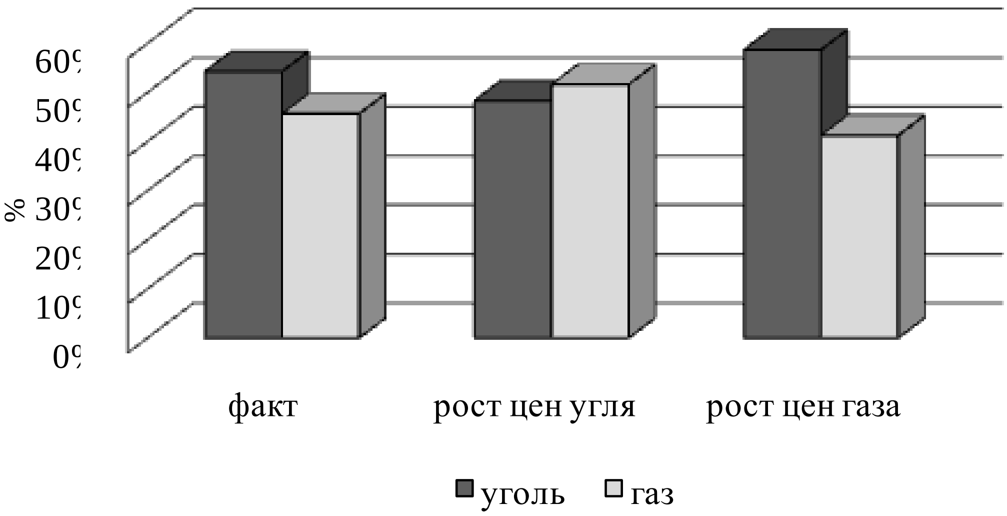


Источник данных: составлено автором.

Рис. 1. Фактическое и оцененное значения суммарного потребления первичных энергоресурсов предприятиями металлургического комплекса Украины

Таким образом, полученные уравнения отражают сложившийся уровень технологии и технического замещения и могут быть использованы для нахождения значений потребления природного газа и каменного угля, позволяющих оптимизировать затраты на их приобретение.

Для того чтобы воспользоваться уравнениями (12) и (13), необходимо Q, p_C, p_G зафиксировать на уровне 2013 г. На рис. 2 приведены результаты сценарного моделирования, связанного с изменением цен на данные энергоносители. Так, в базовом варианте в общей сумме потребления природного газа и каменного угля на последний приходится 54%, тогда как на природный газ – 46%. Если предположить, что цены на уголь возрастут на 10%, тогда как цены на природный газ останутся неизменными, то в этом случае с учетом имеющейся технической нормы замещения соотношение потребления этих ресурсов составит: 48% – каменный уголь, 52% – природный газ. Другими словами, увеличение цен на каменный уголь на 10% приведет к сокращению его потребления на 6 %. При этой структуре общие затраты на приобретение энергоресурсов могут сократиться на 0,6% (или 1 млрд грн).



Источник данных: составлено автором.

Рис. 2. Сценарии потребления каменного угля и природного газа в металлургическом комплексе Украины

Третий вариант предполагает фиксированные цены на каменный уголь и рост цены на природный газ на 10 %. В этом случае целесообразным является сокращение потребления природного газа на 5% и замена его каменным углем. При этом общие затраты на приобретение энергоресурсов, как и в предыдущем случае, могут сократиться приблизительно на 0,4 % (или более 600 млн грн).

Аналогичные расчеты могут быть произведены и для случая снижения цен либо их разнонаправленной динамики, а также для изменения официальных и теневых объемов реализованной продукции.

Таким образом, предложенный подход к оценке оптимального потребления первичных ресурсов позволяет определить приоритетные направления для формирования энергетической политики. Согласно предложенному подходу выбор наиболее перспективного энергетического ресурса осуществляется с учетом сложившейся технологии, а также уровня цен на первичные энергоносители. Это позволяет не только учитывать существующую ценовую структуру на рынке энергоносителей и выбирать ресурс с наименьшей ценой, но и учитывать техническую эластичность замещения ресурсов, которая значительно ограничивает возможность отказа от дорогого ресурса в пользу более дешевого.

Следует отметить, что для дальнейшего принятия решений относительно формирования портфеля первичных энергетических ресурсов необходимо учитывать не только выгоды от оптимизированной структуры потребления, но и учесть инвестиции на возможную смену технологии и замещение ресурсов. Кроме того, данный подход не учитывает фактор времени, который выступает важной составляющий на рынках, подверженных высокой чувствительности к волатильности цен, к которым и относится энергорынок развивающихся стран. Для точного определения значений оптимальной структуры энергопотребления большое значение имеет точность параметров полученных уравнений. Существуют значительные трудности и требуются дополнительные исследования в определении истинного вида зависимости энергопотребления от ключевых факторов, а также сбор исходной информации и методы ее параметризации. Это значительно ограничивает возможности применения экономико-математических подходов к оптимизации энергетического портфеля и не дает возможности ввести данные методы в повседневную практику принятия решений относительно государственной энергетической политики. Тем не менее рассмотренные ограничения являются преодолимыми и могут усовершенствовать данный метод, а его применение позволит значительно сократить субъективизм и обеспечить экономическую эффективность энергетической политики.

Литература

1. Амоша А.И. Стратегии развития угледобычи в центральном районе Донбасса: моногр. / А.И. Амоша, Д.Ю. Череватский, О.Ю. Кузьмич; НАН Украины, Ин-т экономики пром-сти. – Донецк, 2008. – 96 с.

2. Башмаков И. Оценка параметров ценовой эластичности спроса на электроэнергию по отдельным группам потребителей и по субъектам РФ / И. Башмаков. – М.: ООО «ЦЕНЭФ», 2007. – Т. 1. – 82 с.

3. Башмаков И. Цены на нефть: пределы роста и глубины падения / И. Башмаков // Вопросы экономики. – 2006. – № 3. – С. 28-41.

4. Бертсекас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа: пер. с англ. / Д. Бертсекас. – М.: Радио и связь, 1987. – 400 с.

5. Волконский В.А. Анализ и прогноз энергоемкости экономики России / В.А. Волконский, А.И. Кузовкин // Проблемы прогнозирования. – 2006. – № 1. – С. 53-61.

6. Волконский В.А. Об энергоемкости национальной экономики и определяющих ее факторах / В.А. Волконский, А.И. Кузовкин // Экономика и математические методы. – 2003. – Том 39. – № 4. – С. 72-81.

7. Гнідий М.В. Прогноз споживання електричної енергії в економіці України на період до 2030 року / М.В. Гнідий, Т.П. Агєєва // Тези доповідей XII Міжнар. конф. «Ресурсоенергозбереження у ринкових відносинах». – К.: НДЦ «Нафтохім», 2005. – С.17-20.

8. Дячук О.А. Ефективність і екологічність використання енергетичних ресурсів у світі та Україні / О.А. Дячук, Р.З. Подолець, Б.С. Серебренніков, Т.А. Зеленюк // Економічний аналіз. – 2014. – Т. 15. – № 1. – С. 59-75.

9. Дячук О.А. Прогнозування та оцінка викидів парникових газів прямої дії з використанням моделі "TIMES-УКРАЇНА" / О.А. Дячук // Економіка і прогнозування. – 2013. – № 2. – С. 116-127.

10. Казакова М.В. Анализ свойств производственных функций, используемых при декомпозиции экономического роста / М.В. Казакова. – М.: ФГБОУВПО «РАНХГСПРФ», 2013. – 47 с.

11. Костюковский Б.А. Теретико-методологические основы прогнозирования развития энергетики в условиях либерализации и глобализации мировой экономики и интернационализации экологических ограничений / Б.А. Костюковский, Е.А. Рубан-Максимец, Д.П. Сас, М.В. Парасюк // Проблеми загальної енергетики. – 2009. – № 19.– С. 31-38.

12. Маляренко О.Є. Урахування цінового фактора при прогнозуванні

споживання вуглеводнів на короткострокову перспективу в умовах глобалізації / О.Є. Маляренко, Т.О. Євтухова // Проблеми загальної енергетики. – 2012. – № 2 (29). – С. 12-19.

13. Официальный сайт Государственного комитета статистики Украины [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.ukrstat.gov.ua.

14. Половян А.В. Оценка размера теневой экономики промышленного региона / А.В. Половян // Экономика промышленности. – 2015. – № 1 (69). – С. 53-64.

15. Соколовская Е.В. Оценка размеров теневой экономики на региональном уровне как предпосылка регулирования налоговых поступлений / Е.В. Соколовская, Д.Б. Соколовский // Известия Иркутской государственной экономической академии. – 2015. – Т. 25. – № 3. – С. 480-484.

16. Тарнавский В. С газа на уголь… и обратно [Электронный ресурс] / В. Тарнавский. – Режим доступа: http://minprom.ua/articles/ 116989.html.

17. Уголь вместо газа [Электронный ресурс] // ukrcoal.com. – Режим доступа: http://ukrcoal.com/node/465.

18. Череватский Д.Ю. О развитии электроэнергетики в Украине / Д.Ю. Череватский // Энергосбережение. – 2003. – № 7. – С. 2-5.

19. BP Statistical Review of World Energy [Электронный ресурс] // bp.com. – 2015. – Режим доступа: http://bp.com/ statisticalreview.

20. Christensen L. Economies of Scale in U.S. Electric Power Generation / L. Christensen, W. Greene // JPE. – 84(4). – P. 655-676.

21. Energy PLAN [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.energyplan.eu.

22. Haas R. Residential energy demand in OECD countries and the role of irreversible efficiency improvements / R. Haas, L. Shipper // Energy Economics. – (20) 1998. – P. 421-442.

23. International Atomic Energy Agency [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.iaea.org.

24. Kouris G. Elasticities – science or fiction? / G. Kouris // Energy Economics. – April 1981. – P. 66-70.

25. Shephard R.W. Cost and Production Functions. Repr. of the 1 ed / R.W. Shephard. – Berlin: Springer, 1981. – 106 p.

26. Welsch H. The reliability of aggregate energy demand function / H. Welsch // Energy Economics. – October 1989. – P. 285-292.

Приложение

Вывод формул оптимальных значений потребления энергоресурсов

Для решения системы (9) можно воспользоваться методом множителя Лагранжа, который применяется для нахождения оптимума в задачах нелинейного программирования [4]. Приравниваем к нулю условие

$$b_0 + \ln(Q) + b_k \ln(C) + b_l \ln(G) + \\ + \tfrac{1}{2} b_{kk} (\ln(C))^2 + \tfrac{1}{2} b_{ll} (\ln(G))^2 + \quad (\text{П}.1) \\ + b_{kl} \ln(C) \ln(G) - \ln(E) = 0 .$$

Проводим замену

$$\ln(C) = X_1, \ln(G) = X_2, \ln(O) = X_3 .$$

Тогда (П.1) может быть записано следующим образом:

$$b_0 + \ln(Q) + b_k X_1 + b_l X_2 + \tfrac{1}{2} b_{kk} X_1{}^2 + \\ + \tfrac{1}{2} b_{ll} X_2{}^2 + + b_{kl} X_1 X_2 - \ln(E) = 0 .$$

Согласно методу Лагранжа добавляем к целевой функции ограничение

$$\ln(Z) = a_0 + \ln(E) + X_1 \ln(p_C) + X_2 \ln(p_G) -$$
$$- a_{kl} \ln(p_G) \ln(p_c) + \lambda(b_0 + \ln(Q) + b_k X_1 +$$
$$+ b_l X_2 + \tfrac{1}{2} b_{kk} X_1^2 + \tfrac{1}{2} b_{ll} X_2^2 + b_{kl} X_1 X_2 -$$
$$- \ln(E)),$$

где λ – множитель Лагранжа.

Находим частные производные искомых переменных и приравниваем их нулю:

$$\frac{\partial \ln(Z)}{\partial X_1} = a_0 + \ln(E) + X_1 \ln(p_C) + X_2 \ln(p_G) -$$
$$- a_{kl} \ln(p_G) \ln(p_c) + \lambda(b_0 + \ln(Q) + b_k X_1 +$$
$$+ b_l X_2 + \tfrac{1}{2} b_{kk} X_1^2 + \tfrac{1}{2} b_{ll} X_2^2 + b_{kl} X_1 X_2 -$$
$$- \ln(E)) = \ln(p_C) + \lambda b_k + \lambda b_{kk} X_1 + \lambda b_{kl} X_2 = 0,$$

$$\frac{\partial \ln(Z)}{\partial X_2} = a_0 + \ln(E) + X_1 \ln(p_C) + X_2 \ln(p_G) -$$
$$a_{kl} \ln(p_G) \ln(p_c) + \lambda(b_0 + \ln(Q) + b_k X_1 +$$
$$+ b_l X_2 + \tfrac{1}{2} b_{kk} X_1^2 + \tfrac{1}{2} b_{ll} X_2^2 + b_{kl} X_1 X_2 -$$
$$- \ln(E)) = \ln(p_G) + \lambda b_l + \lambda b_{ll} X_2 + \lambda b_{kl} X_1 = 0,$$

$$\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \lambda} = b_0 + \ln(Q) + b_k X_1 + b_l X_2 +$$
$$+ \tfrac{1}{2} b_{kk} X_1^2 + \tfrac{1}{2} b_{ll} X_2^2 + b_{kl} X_1 X_2 -$$
$$- \ln(E) = 0.$$

Решаем полученную систему из четырех уравнений:

$$\frac{\partial \ln(Z)}{\partial X_1} = \ln(p_C) + \lambda b_k + \lambda b_{kk} X_1 + \lambda b_{kl} X_2 = 0,$$
$$\lambda b_{kk} X_1 = - \ln(p_c) - \lambda b_k - \lambda b_{kl} X_2,$$
$$X_1 = \frac{-\ln(p_c)}{\lambda b_{kk}} - \frac{b_k}{b_{kk}} - \frac{b_{kl}}{b_{kk}} X_2.$$

$$\frac{\partial \ln(Z)}{\partial X_2} = \ln(p_G) + \lambda\, b_l + \lambda\, b_{ll} X_2 + \lambda\, b_{kl} X_1 = 0,$$
$$\ln(p_G) + \lambda b_l + \lambda b_{ll} X_2 -$$
$$- \lambda b_{kl} \left(\frac{\ln(p_c)}{\lambda b_{kk}} + \frac{b_k}{b_{kk}} + \frac{b_{kl}}{b_{kk}} X_2\right) = 0,$$

$$\ln(p_G) + \lambda b_l + \lambda b_{ll} X_2 -$$
$$- \frac{\lambda b_{kl} \ln(p_c)}{\lambda b_{kk}} - \frac{\lambda b_{kl} b_k}{b_{kk}} - \frac{\lambda b_{kl}^2}{b_{kk}} X_2 = 0,$$

$$X_2 = \frac{\dfrac{b_{kl}\ln(p_c)}{b_{kk}}}{(b_{ll} - \dfrac{b_{kl}^2}{b_{kk}})\lambda} + \frac{\dfrac{\lambda b_{kl} b_k}{b_{kk}}}{(b_{ll} - \dfrac{b_{kl}^2}{b_{kk}})\lambda} -$$
$$- \frac{\ln(p_G)}{(b_{ll} - \dfrac{b_{kl}^2}{b_{kk}})\lambda} - \frac{\lambda b_l}{(b_{ll} - \dfrac{b_{kl}^2}{b_{kk}})\lambda},$$

$$X_2 = \{\frac{b_{kl}\ln(p_c) - b_{kk}\ln(p_G)}{b_{ll} b_{kk} - b_{kl}^2} =$$
$$= D_1\} \frac{1}{\lambda} + \{\frac{b_{kl} b_k - b_{kk} b_l}{b_{ll} b_{kk} - b_{kl}^2} = D_3\},$$

$$X_2 = D_1 \frac{1}{\lambda} + D_3,$$

$$X_1 = \frac{-\ln(p_c)}{\lambda b_{kk}} - \frac{b_k}{b_{kk}} - \frac{b_{kl}}{b_{kk}} X_2,$$
$$X_1 = \frac{-\ln(p_c)}{\lambda b_{kk}} - \frac{b_k}{b_{kk}} - \frac{b_{kl}}{b_{kk}} (D_1 \frac{1}{\lambda} + D_3),$$
$$X_1 = \frac{-\ln(p_c)}{b_{kk}} \frac{1}{\lambda} - \frac{b_k}{b_{kk}} - \frac{b_{kl}}{b_{kk}} D_1 \frac{1}{\lambda} - \frac{b_{kl}}{b_{kk}} D_3,$$

$$X_1 = (- \frac{b_k}{b_{kk}} - \frac{b_{kl}}{b_{kk}} D_3 = D_8) -$$
$$- (\frac{\ln(p_c)}{b_{kk}} + \frac{b_{kl}}{b_{kk}} D_1 = D_9) \frac{1}{\lambda},$$
$$X_1 = D_8 - D_9 \frac{1}{\lambda},\ X_2 = D_1 \frac{1}{\lambda} + D_3.$$

Пусть $\frac{1}{\lambda} = k$.

Тогда

$$\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \lambda} = b_0 + \ln(Q) + b_k(D_8 - D_9 k) +$$
$$+ b_l(D_1 k + D_3) + \tfrac{1}{2} b_{kk}(D_8 - D_9 k)^2 +$$
$$+ \tfrac{1}{2} b_{ll}(D_1 k + D_3)^2 +$$
$$+ b_{kl}(D_8 - D_9 k)(D_1 k + D_3) - \ln(E) = 0 .$$

$$b_0 + \ln(Q) + b_k D_8 - b_k D_9 k + b_l D_1 k + b_l D_3 +$$
$$+ \tfrac{1}{2} b_{kk}(D_8^2 - 2D_8 D_9 k + D_9 k^2) +$$
$$+ \tfrac{1}{2} b_{ll}(D_1^2 k^2 + 2D_1 k D_3 + D_3^2) +$$
$$+ b_{kl}(D_8 D_1 k - D_1 D_9 k^2 + D_3 D_8 - D_3 D_9 k) -$$
$$- \ln(E) = 0 ,$$

$$b_0 + \ln(Q) + b_k D_8 - b_k D_9 k + b_l D_1 k + b_l D_3 +$$
$$+ \tfrac{1}{2} b_{kk} D_8^2 - b_{kk} D_8 D_9 k + \tfrac{1}{2} b_{kk} D_9 k^2 +$$
$$+ \tfrac{1}{2} b_{ll} D_1^2 k^2 + b_{ll} D_1 k D_3 + \tfrac{1}{2} b_{ll} D_3^2 +$$
$$+ b_{kl} D_8 D_1 k - b_{kl} D_1 D_9 k^2 + b_{kl} D_3 D_8 -$$
$$- b_{kl} D_3 D_9 k - \ln(E) = 0 ,$$

$$\tfrac{1}{2} b_{kk} D_9 k^2 + \tfrac{1}{2} b_{ll} D_1^2 k^2 - b_{kl} D_1 D_9 k^2 +$$
$$+ b_l D_1 k - b_k D_9 k - b_{kk} D_8 D_9 k + b_{ll} D_1 k D_3 +$$
$$+ b_{kl} D_8 D_1 k - b_{kl} D_3 D_9 k + \tfrac{1}{2} b_{kk} D_8^2 + b_0 +$$
$$+ \ln(Q) + b_k D_8 + b_l D_3 + \tfrac{1}{2} b_{ll} D_3^2 +$$
$$+ b_{kl} D_3 D_8 - \ln(E) = 0 ,$$

$$(\tfrac{1}{2} b_{kk} D_9 + \tfrac{1}{2} b_{ll} D_1^2 - b_{kl} D_1 D_9 = D_{10}) k^2 +$$
$$+ (b_l D_1 - b_k D_9 - b_{kk} D_8 D_9 + b_{ll} D_1 D_3 +$$
$$+ b_{kl} D_8 D_1 - b_{kl} D_3 D_9 = D_{11}) k + (\tfrac{1}{2} b_{kk} D_8^2 +$$
$$+ b_0 + \ln(Q) + b_k D_8 + b_l D_3 + \tfrac{1}{2} b_{ll} D_3^2 +$$
$$+ b_{kl} D_3 D_8 - \ln(E) = D_{12}) = 0 ,$$
$$D_{10} k^2 + D_{11} k + D_{12} = 0 ,$$

$$D = D_{11}^2 - 4 D_{10} D_{12} ,$$

$$k = \frac{-D_{11} \pm \sqrt{D_{11}^2 - 4D_{10} D_{12}}}{2D_{10}} .$$

Представлена в редакцию 21.10.2015 г.