УДК 330.105+519.876.5

Капустян В.О., *д-р фіз.-мат. наук,*
профессор, завідувач кафедри ММЕС НТУУ "КПІ"
Чепелєв М.Г., *молодший науковий співробітник*
Інституту економіки та прогнозування НАН України

РАЦІОНАЛЬНІ СТРАТЕГІЇ ПОВЕДІНКИ АГЕНТІВ В МОДЕЛІ НЕЛІНІЙНОЇ МАКРОЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ

Розглянуто макроекономічну модель, що описується системою нелінійних диференційних рівнянь. Запропоновано процедуру керування, яка дозволяє переводити економіку з одного рівноважного стану в інший, з одночасним зростанням рівня національного доходу. Проаналізовано керуючі впливи підприємців і держави та виділені набори стратегій, які найбільше сприяють економічному зростанню.

Ключові слова: макроекономічна модель, нелінійність, керування, положення рівноваги.

Останніми роками для опису економічних процесів дедалі частіше використовуються системи диференційних рівнянь із нелінійними правими частинами. Такі моделі можуть демонструвати дуже складну і нерегулярну поведінку розв'язків з формуванням хаотичних атракторів. Ця методологія використовується для кращого розуміння механізмів функціонування реальних економічних і фінансових систем [1, 2].

При аналізі нелінійних динамічних систем природно постають задачі керування та стабілізації. І якщо для останніх розроблено ряд чисельних та аналітичних методів [3–5], задачам керування приділяється значно менша увага. В нашій роботі будуються множини стаціонарних точок моделі макроекономічної динаміки і при цьому кожна нерухома точка характеризується деяким значенням показника національного доходу ($НД$). За таких умов виникає задача переведення системи з однієї стаціонарної точки (що характеризується нижчим рівнем національного доходу) в іншу (з вищим рівнем національного доходу). В статті запропоновано чисельну процедуру керування, що застосовується до стаціонарних точок, котрі лежать на одній траєкторії, та проаналізовано отримані результати.

Модель. Розглянемо систему диференційних рівнянь, яка описує функціонування економіки країни [5, 6]:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}(t) = bx((1-(\frac{v}{\delta+\sigma})\sigma)z-(\frac{v}{\delta+\sigma})\delta y) \\
&\dot{y}(t) = x(1-(1-(\frac{v}{\delta+\sigma})\delta)y+(\frac{v}{\delta+\sigma})\sigma z) \\
&\dot{z}(t) = a(y-d\cdot x) \\
&\dot{\delta}(t) = \delta\left[\frac{2e}{\pi}arctg(\sigma-\sigma_{\delta})(a_1+a_2 th(a_3+a_4 z))-\delta\right] \\
&\dot{\sigma}(t) = \sigma\left[\frac{2f}{\pi}arctg(\delta-\delta_{\sigma})(a_1+a_2 th(a_3+a_4 z))-\sigma\right],
\end{aligned} \qquad (1)$$

де: $x(t)$ – рівень капіталу; $y(t)$ – рівень платоспроможного попиту; $z(t)$ – норма прибутку; $\delta(t)$ – частина доходу, яку підприємці сплачують державі у вигляді податків, платежів і зборів – джерело платоспроможного попиту держави; $\sigma(t)$ – частина додаткової вартості, що залишається у підприємців після розрахунків з державою і формує платоспроможний попит підприємців; $a,b,d = const.$ v – параметр, значення якого дорівнює сумі нормалізованих значень δ та σ, $v\in(0,1)$; $a_1,a_2,a_3,a_4 = const$; e, f – параметри, що приймають значення із множини $[-1;0)\cup(0;1]$ залежно від виду (антагоністичний або кооперативний [5, с. 202]) та інтенсивності взаємодії підприємців і держави; σ_{δ}, δ_{σ} – точки перемикання, при проході через які відбувається зміна характеру ставлення сторін (з обмежування на підсилення і навпаки). Наприклад, якщо $\delta_{\sigma}=0,4$, а $\sigma_{\delta}=0,5$, тоді за кооперативного ставлення підприємців ($e>0$) та держави ($f>0$), якщо підприємцям залишається понад 50% додаткової вартості, вони кооперативно відносяться до держави (згодні підтримати підвищення рівня оподаткування – значення δ), держава ж у разі, якщо рівень оподаткування підприємців вищий за 40%, сприяє зростанню частки додаткової вартості, яка залишається у підприємців.

Подальший аналіз системи (1) проводитиметься для фіксованих значень параметрів $a=7$; $b=0,4$; $d=1,17$ [6, с. 261]. У роботі [5] показано, що для таких величин a,b,d у моделі ринкової економіки, що самостійно розвивається, можуть виникати різноманітні сценарії поведінки: система руйнується (знижується до нуля рівень капіталу чи платоспроможного попиту), виникають положення рівноваги, регулярні та хаотичні атрактори. Величини параметрів $a_1=10,\ a_2=10,\ a_3=-1.2,\ a_4=1/27$ оцінювалися, виходячи з припущень відносно реакції підприємців і держави на зміну норми прибутку [7, с. 17].

Стани рівноваги моделі макроекономічної динаміки. Система рівнянь (1) містить нелінійні праві частини, що ускладнює знаходження координат стаціонарних точок, зокрема, їх неможливо визначити явним чином. Шукатимемо координати нерухомих точок залежно від зміни чотирьох параметрів: $e, f, \delta_\sigma, \sigma_\delta$. Зазначимо, що система диференційних рівнянь (1) є автономною, тобто час t безпосередньо не входить в праві частини рівнянь.

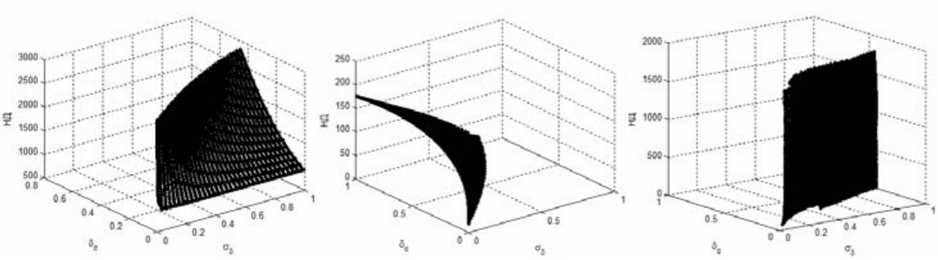
Прирівнявши праві частини системи (1) до нуля та розв'язавши перші три рівняння відносно невідомих x, y, z, враховуючи, що $x > 0,\ y > 0$, та підставивши отриманий вираз для z у два останні рівняння, отримаємо:

$$\begin{cases} \delta\left[\dfrac{2e}{\pi}arctg(\sigma - \sigma_\delta)(a_1 + a_2 th(a_3 + a_4\dfrac{\nu\delta}{(1-\nu)(\sigma+\delta)})) - \delta\right] = 0 \\ \sigma\left[\dfrac{2f}{\pi}arctg(\delta - \delta_\sigma)(a_1 + a_2 th(a_3 + a_4\dfrac{\nu\sigma}{(1-\nu)(\sigma+\delta)})) - \sigma\right] = 0, \end{cases} \tag{2}$$

Будь-який додатний розв'язок системи (2) визначатиме нерухому точку системи (1), підставляючи знайдені значення $\delta,\ \sigma$ у відповідні вирази для x, y, z. Розглянемо випадок, коли $\delta \neq 0,\ \sigma \neq 0$. Для розв'язання поставленої задачі за фіксованих значень параметрів $e, f, \delta_\sigma, \sigma_\delta$ застосуємо метод Ньютона [8, с. 129–134], що є одним із варіантів методу ітерацій.

Дискретизуючи значення параметрів $e, f, \delta_\sigma, \sigma_\delta$, а також значення змінних із певним фіксованим кроком, за використання методу Ньютона знайдемо деякі стаціонарні точки системи (1). Отримавши таким чином нерухомі точки, застосуємо до кожної з них модифікацію процедури диференціювання за параметром [9, с. 34–36]. При цьому для знаходження додаткових стаціонарних точок диференціюватимемо за параметрами σ_δ та δ_σ. Нагадаємо, що параметри σ_δ і δ_σ встановлюють значення σ і δ, починаючи з яких, ставлення підприємців до держави та держави до підприємців відповідають знакам параметрів e та f відповідно.

При дискретизації значень параметрів $e, f, \delta_\sigma, \sigma_\delta$ розглядалися чотири варіанти взаємодії держави та підприємців. Зокрема, припускалося, що підприємці мають менший вплив на рішення держави, ніж держава на свободу дій підприємців. Покладемо $|e| = 0,3$; $|f| = 1$. Значення параметрів e та f обиралися з множини допустимих значень з урахуванням припущень щодо наведених вище умов взаємодії підприємців і держави. Розглянемо ситуацію, коли держава кооперативно відноситься до підприємців та відношення підприємців до держави також кооперативне, тобто $e = 0,3$; $f = 1$. Розв'язуючи систему рівнянь (2) за вказаних вище значень параметрів e та f і за умови $\delta \neq 0, \sigma \neq 0$, не було знайдено жодної стаціонарної точки для моделі ринкової економіки (1). Значення початкових точок $\delta,\ \sigma$ обиралися з кроком $0,025$, із множини $(0,\ 1)$. Із таким же кроком змінювалися значення точок переключення характеру взаємодії (δ_σ та σ_δ). Загалом було розглянуто 2560000 можливих комбінацій значень δ, σ, δ_σ, σ_δ, і в жодному випадку, як зазначалося вище, система (2) не мала розв'язків.



а) б) в)

Рис. 1. **Діаграма стаціонарних точок системи (1) для (а)** $e=-0,3$; $f=1$; **(б)** $e=0,3$; $f=-1$; **(в)** $e=-0,3$; $f=-1$

Відсутність стаціонарних розв'язків системи (1) можна пояснити через намагання сторін вирівняти стан, встановивши однакові значення частин, що формують платоспроможний попит. Однак такі дії призводять до постійних флуктуацій капіталу, платоспроможного попиту, норми прибутку, а отже, й національного доходу загалом.

За решти варіантів взаємодії підприємців і держави в системі існують множини стаціонарних точок, графічні зображення яких наведені на рис. 1.

Процедура керування. Як видно з рис. 1, кожна стаціонарна точка системи (1) характеризується деяким рівнем національного доходу ($НД$), а отже, всі нерухомі точки можна порівняти за цим показником. Згідно з [6] $НД$ визначається за формулою $НД=\dfrac{\omega\theta x(z+1)}{\eta\beta(\gamma+1)}$. При подальшому аналізі покладемо $\beta=\dfrac{1}{7}$. Із урахуванням проведених замін змінних [5, с. 260] значення параметра β не впливає на характер поведінки моделі за умови, що $\alpha/\beta=const$. Величина β впливає лише на значення $НД$, а тому для співставності результатів моделювання за різних значень екзогенних змінних доцільно зафіксувати β єдиним для всіх експериментів. Таким чином, постає задача переводу системи з однієї стаціонарної точки в іншу, в загальному випадку із стаціонарної точки з меншим рівнем $НД$ у стаціонарну точку з вищим рівнем $НД$. Припустимо, що ми можемо впливати на платоспроможний попит, капітал, а також змінювати значення параметрів δ_σ, σ_δ.

Наступну нерухому точку, у яку ми можемо потрапити, шукатимемо на кривій, де лежить вихідна точка, яка була отримана після застосування процедури диференціювання за параметром.

Припустимо, що ми можемо потрапити з вихідної точки у наступну стаціонарну точку за два кроки.

Інтегруватимемо рівняння методом Ейлера. Нехай на першому кроці ми змінили значення параметрів δ_σ, σ_δ, а також вплинули на змінну x. Координати точки після першого кроку інтегрування будуть такими:

$$\begin{aligned}
&x(h) = x(0) + h\cdot(bx(0)((1-(\frac{v}{\delta(0)+\sigma(0)})\sigma(0))z(0) - (\frac{v}{\delta(0)+\sigma(0)})\delta(0)y(0))) + h\cdot x_1\\
&y(h) = y(0) + h\cdot(x(0)(1-(1-(\frac{v}{\delta(0)+\sigma(0)})\delta(0))y(0) + (\frac{v}{\delta(0)+\sigma(0)})\sigma(0)z(0)))\\
&z(h) = z(0) + h\cdot(a(y(0) - d\cdot x(0)))\\
&\delta(h) = \delta(0) + h\cdot\left(\delta(0)\left[\frac{2e}{\pi}arctg(\sigma(0)-(\sigma_\delta)_1)(a_1 + a_2 th(a_3 + a_4 z(0))) - \delta(0)\right]\right)\\
&\sigma(h) = \sigma(0) + h\cdot\left(\sigma(0)\left[\frac{2f}{\pi}arctg(\delta(0)-(\delta_\sigma)_1)(a_1 + a_2 th(a_3 + a_4 z(0))) - \sigma(0)\right]\right),
\end{aligned} \tag{3}$$

де: h це крок інтегрування, x_1, $(\delta_\sigma)_1$, $(\sigma_\delta)_1$ – керування.

Враховуючи, що значення $x(h)$ дорівнює $c_1 + h\cdot x_1$, де $c_1 = const$, ми можемо записати рівняння для $z(2h)$:

$$z(2h) = z(h) + h\cdot(a(y(h) - d\cdot(c_1 + h\cdot x_1))) \tag{4}$$

Поклавши $c_2 = z(h) + ha(y(h) - d\cdot c_1)$, а $c_3 = -a\cdot d\cdot h^2$, отримаємо $z(2h) = c_2 + c_3\cdot x_1$. З іншого боку, нам відомі координати стаціонарної точки, в яку ми хочемо потрапити, тому $z(2h) = c_4 = const$ і з рівняння

$$c_2 + c_3\cdot x_1 = c_4 \tag{5}$$

можна знайти x_1. Отже, ми знайшли керування x_1 на першому кроці і таким чином обчислили значення $x(h)$. Зокрема,

$$x_1 = \frac{\left(z(2h) - (z(h) + ha(y(h) - d\cdot c_1))\right)}{-a\cdot d\cdot h^2}, \tag{6}$$

де: $c_1 = x(0) + h\cdot(bx(0)((1-(\frac{v}{\delta(0)+\sigma(0)})\sigma(0))z(0) - (\frac{v}{\delta(0)+\sigma(0)})\delta(0)y(0)))$.

Значення $\delta(h)$ та $\sigma(h)$ після першого кроку інтегрування можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned}
\delta(h) &= b_1 + b_2(arctg(\sigma(0) - (\sigma_\delta)_1))\\
\sigma(h) &= d_1 + d_2(arctg(\delta(0) - (\delta_\sigma)_1)),
\end{aligned} \tag{7}$$

де: $b_1 = \delta(0) - h\cdot\delta(0)^2$, $b_2 = \frac{2e}{\pi}\cdot h\cdot\delta(0)\cdot(a_1 + a_2 th(a_3 + a_4 z(0)))$,

$d_1 = \sigma(0) - h\cdot\sigma(0)^2$, $d_2 = \frac{2f}{\pi}\cdot h\cdot\sigma(0)\cdot(a_1 + a_2 th(a_3 + a_4 z(0)))$,

$b_1, b_2, d_1, d_2 = const$.

Оскільки нам відомі значення параметрів δ_σ, σ_δ у стаціонарній точці, в яку ми прямуємо, то нам відомі й значення керувань $(\delta_\sigma)_2$, $(\sigma_\delta)_2$. Очевидно, що вони будуть рівні значенням параметрів $\delta_\sigma(2h)$, $\sigma_\delta(2h)$ у стаціонарній точці, в яку ми прямуємо. А отже, значення δ та σ після другого кроку будуть відповідно рівні?

$$\delta(2h)=\delta(h)+h\cdot\left(\delta(h)\left[\frac{2e}{\pi}arctg(\sigma(h)-(\sigma_\delta)_2)(a_1+a_2th(a_3+a_4z(h)))-\delta(h)\right]\right)$$
$$\sigma(2h)=\sigma(h)+h\cdot\left(\sigma(h)\left[\frac{2f}{\pi}arctg(\delta(h)-(\delta_\sigma)_2)(a_1+a_2th(a_3+a_4z(h)))-\sigma(h)\right]\right) \quad (8)$$

Підставляючи замість $\delta(h)$ та $\sigma(h)$ відповідні вирази з (8), а також замінивши $z(h)$ згідно з (4), отримаємо:

$$\delta(2h)=b_1+b_2(arctg(\sigma(0)-(\sigma_\delta)_1))+h\cdot$$
$$((b_1+b_2(arctg(\sigma(0)-(\sigma_\delta)_1)))\cdot[\frac{2e}{\pi}arctg(d_1+d_2(arctg(\delta(0)-(\delta_\sigma)_1))-$$
$$-(\sigma_\delta)_2)(a_1+a_2th(a_3+a_4(z(0)+h\cdot(a(y(0)-d\cdot x(0))))))-(b_1+$$
$$b_2(arctg(\sigma(0)-(\sigma_\delta)_1)))]) \quad (9)$$

$$\sigma(2h)=d_1+d_2(arctg(\delta(0)-(\delta_\sigma)_1))+h\cdot$$
$$((d_1+d_2(arctg(\delta(0)-(\delta_\sigma)_1)))\cdot[\frac{2f}{\pi}arctg(b_1+b_2(arctg(\sigma(0)-(\sigma_\delta)_1))-$$
$$-(\delta_\sigma)_2)(a_1+a_2th(a_3+a_4(z(0)+h\cdot(a(y(0)-d\cdot x(0))))))-(d_1+$$
$$d_2(arctg(\delta(0)-(\delta_\sigma)_1)))]).$$

Отже, значення $\delta(2h)$ та $\sigma(2h)$ залежать від двох параметрів $(\delta_\sigma)_1$ і $(\sigma_\delta)_1$.

Позначивши $B=b_1+b_2(arctg(\sigma(0)-(\sigma_\delta)_1))$, $D=d_1+d_2(arctg(\delta(0)-(\delta_\sigma)_1))$, $A=\frac{2}{\pi}(a_1+a_2th(a_3+a_4(z(0)+h\cdot(a(y(0)-d\cdot x(0))))))=const$, рівняння (10) можна переписати у вигляді:

$$h\cdot(B\cdot[A\cdot e\cdot arctg(D-(\sigma_\delta)_2)-B])-\delta(2h)+B=0$$
$$h\cdot(D\cdot[A\cdot f\cdot arctg(B-(\delta_\sigma)_2)-D])-\sigma(2h)+D=0. \quad (10)$$

Розв'язавши перше рівняння системи відносно B (11), отримаємо два розв'язки.

$$B_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h} + A \cdot e \cdot arctg(D - (\sigma_\delta)_2)\right) +$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{h^2 \cdot A^2 \cdot e^2 \cdot \left(arctg(D-(\sigma_\delta)_2)\right)^2 + 2h \cdot A \cdot e \cdot arctg(D-(\sigma_\delta)_2) + 1 - 4h \cdot \delta(2h)}}{h} \quad (11)$$
$$B_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h} + A \cdot e \cdot arctg(D - (\sigma_\delta)_2)\right) -$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{h^2 \cdot A^2 \cdot e^2 \cdot \left(arctg(D-(\sigma_\delta)_2)\right)^2 + 2h \cdot A \cdot e \cdot arctg(D-(\sigma_\delta)_2) + 1 - 4h \cdot \delta(2h)}}{h}$$

Оцінимо B_1 та B_2, враховуючи обмеження на змінні керування та значення параметрів, а також крок інтегрування, припускаючи $h \in (0;\ 0{,}1)$. Оскільки при пошуку стаціонарних точок ми обирали $\delta \in [0;\ 1)$, $\sigma \in [0;\ 1)$, причому $\delta + \sigma > 0$, врахуємо це і при оцінці виразів (12). Результати оцінки показали, що нашим умовам задовольняє лише розв'язок B_2, підставляючи який у друге рівняння системи (10), отримаємо нелінійне рівняння з однією невідомою змінною.

Визначивши $(\sigma_\delta)_1$ та $(\delta_\sigma)_1$, залишається знайти керування змінними x, y на другому кроці. Після другого кроку інтегрування методом Ейлера координати точки будуть визначатися системою:

$$x(2h) = x(h) + h \cdot (bx(h)((1 - (\frac{v \cdot \sigma(h)}{\delta(h)+\sigma(h)}))z(h) - (\frac{v \cdot \delta(h)}{\delta(h)+\sigma(h)})y(h))) + h \cdot x_2$$
$$y(2h) = y(h) + h \cdot (x(h)(1 - (1 - (\frac{v \cdot \delta(h)}{\delta(h)+\sigma(h)}))y(h) + (\frac{v \cdot \sigma(h)}{\delta(h)+\sigma(h)})z(h))) + h \cdot y_2 \quad (12)$$
$$z(2h) = z(h) + h \cdot (a(y(h) - d \cdot x(h)))$$
$$\delta(2h) = \delta(h) + h \cdot \left(\delta(h)\left[\frac{2e}{\pi} arctg(\sigma(h) - (\sigma_\delta)_2)(a_1 + a_2 th(a_3 + a_4 z(h))) - \delta(h)\right]\right)$$
$$\sigma(2h) = \sigma(h) + h \cdot \left(\sigma(h)\left[\frac{2f}{\pi} arctg(\delta(h) - (\delta_\sigma)_2)(a_1 + a_2 th(a_3 + a_4 z(h))) - \sigma(h)\right]\right),$$

звідки можна виразити значення керувань x_2, y_2, оскільки $c_{21} + h \cdot x_2 = 0$, $c_{21} = const$, $c_{22} + h \cdot y_2 = 0$, $c_{22} = const$.

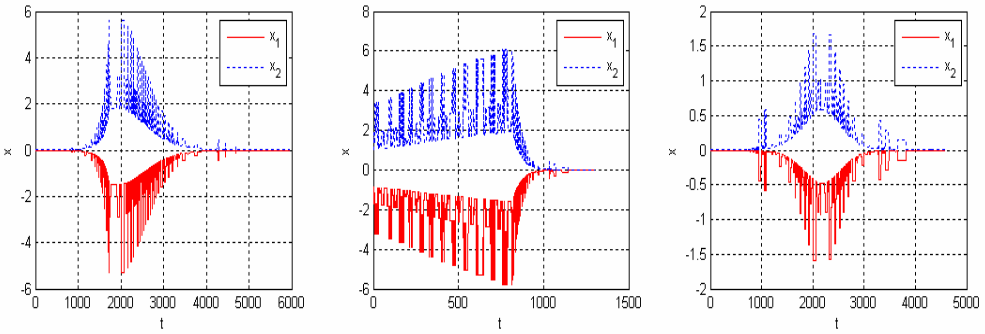
З економічної точки зору вплив на капітал може здійснюватися шляхом державного кредитування, прямих чи портфельних державних інвестицій, деінвестування тощо. На платоспроможний попит держава здатна впливати за допомогою зміни обсягів державних закупівель.

Результати числових розрахунків. При чисельних розрахунках досліджувалася можливість руху за знайденими траєкторіями з початкової точки (з найменшим рівнем $НД$) і до кінцевої. Під час побудови траєкторій використовувався крок інтегрування, що дорівнює 0,002. При пошуку керувань процедура стартувала з початкової точки ξ_0 і, змінюючи крок інтегрування (значення обиралися з множини $H = \{0,001;\ 0,008;\ 0,015;\ 0,022;\ 0.029\}$), визначалися стаціонарні точки, в які можна потрапити з початкової. Якщо жодної такої точки не знайдено, відбувається зсув на 100 точок уперед: $\xi_0 = \xi_0 + 100$ і процедура пошуку керувань повторюється. Якщо з початкової точки можна потрапити у більш ніж одну стаціонарну точку, вибір здійснювався за критерієм $\frac{\Delta НД}{h} \to \max$, де h – крок інтегрування, $\Delta НД$ – приріст національного доходу за час руху від початкової до наступної нерухомої точки. Рух траєкторією здійснюється, доки не буде знайдено нерухому точку, з якої неможливо рухатись далі, або доки траєкторія не буде повністю пройдена. Ділянки стаціонарної траєкторії, отриманої шляхом інтегрування з кроком 0,0002 і за якими неможливо здійснювати рух, апроксимувалися квадратичними сплайнами і щільність точок на цих ділянках збільшувалася у 100 разів, після чого застосовувалася зазначена вище процедура керування. При цьому враховувалися обмеження на керування, зокрема, $\delta_\sigma \in (0;1)$, $\sigma_\delta \in (0;1)$, $x_i \in (-10;\ 10)$, $i = \overline{1,2}$, $y_2 \in (-10;\ 10)$. Загалом було проаналізовано можливість руху 175 траєкторіями, кожна з яких містила від 3000 до 250000 точок.

На рис. 2 зображено деякі випадки керування капіталом за різних варіантів ставлення держави та підприємців. Спільним для всіх керувань є зниження рівня капіталу на першому кроці та збільшення на другому. З точки зору керування метою першого кроку є переведення системи в точку, з якої буде досяжним бажаний стан економіки. Стаціонарну точку можна розглядати як стан, де жоден із макроекономічних показників не змінюється упродовж тривалого часу. Для того щоб збільшити рівень національного доходу, необхідно замінити частину існуючої системи, зокрема, списати старі основні засоби та купити нові, знизити темпи приросту грошового капіталу та збільшити попит на необхідні товари. Процес заміни супроводжується тимчасовим зниженням рівня капіталу в економічній системі, що і відображають керування першого кроку, але одразу ж відбувається введення нових основних засобів і рівень капіталу зростає, перевищуючи попередній рівень. Таким чином, значення керування капіталом на першому кроці завжди менші за керування капіталом на другому кроці, що і дозволяє економіці перейти до стану, що характеризується вищим рівнем $НД$.

Найбільші значення керувань, як правило, спостерігаються в середині траєкторій, що зумовлено можливістю швидкого просування вперед саме на цих ділянках. Тоді як на початках і кінцях траєкторій рух ускладнюється, що зумовлено екстремальними значеннями точок перемикання (σ_δ, δ_σ) і при цьому навіть значні вливання капіталу не допоможуть економічній системі швидко зростати. Зазначимо, що ці висновки справедливі за умови руху траєкторіями стаціонарних точок, якщо на кінці чи початку такої траєкторії застосувати великі за абсолютною величиною керування, значення

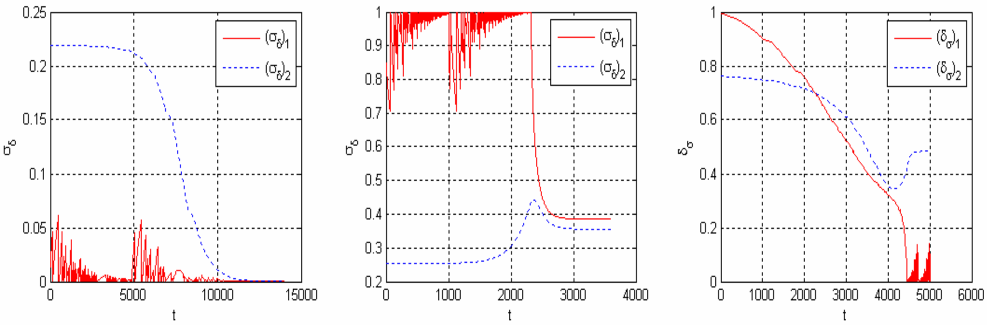
$НД$ може значно зрости, однак при цьому відбудеться відхилення від траєкторії руху, що може призвести до того, що аналізована система стане нестійкою і з часом зруйнується, тобто знизиться до нуля рівень капіталу чи платоспроможного попиту.



а) б) в)

***Рис. 2.* Керування капіталом для випадків (а)** $e=-0,3$; $f=-1$; $\delta_\sigma=0,091$; **(б)** $e=-0,3$; $f=1$; $\delta_\sigma=0,871$; **(в)** $e=0,3$; $f=-1$; $\sigma_\delta=0,901$

Керування параметрами σ_δ та δ_σ зумовлюють зміну в часі ставлення держави до підприємців і підприємців до держави. Результати розрахунків показують, що можна провести деяку класифікацію стратегій керувань на першому і другому кроках залежно від характеру ставлення підприємців і держави. Зокрема, можливі три варіанти: керування першого кроку завжди більші керувань другого кроку ($(\sigma_\delta)_1>(\sigma_\delta)_2$ або $(\delta_\sigma)_1>(\delta_\sigma)_2$) (рис. 3а), керування на другому кроці завжди більші керувань на першому кроці ($(\sigma_\delta)_2>(\sigma_\delta)_1$ або $(\delta_\sigma)_2>(\delta_\sigma)_1$) (рис. 3б), порядок домінування керувань змінюється з часом ($(\sigma_\delta)_2<>(\sigma_\delta)_1$ або $(\delta_\sigma)_2<>(\delta_\sigma)_1$) (рис. 3в). У табл. 1 наведено класифікацію керувань за зазначеним вище критерієм.



а) б) в)

***Рис. 3.* Керування значеннями** σ_δ, δ_σ **для випадків (а)** $e=0,3$; $f=-1$; $\delta_\sigma=0,181$; **(б)** $e=-0,3$; $f=-1$; $\delta_\sigma=0,211$; **(в)** $e=-0,3$; $f=-1$; $\sigma_\delta=0,871$

Керування другого кроку відомі, оскільки вони відповідають значенню параметрів σ_δ та δ_σ в точці, до якої прямує економічна система, отже, їх можна спрогнозувати. За застосування описаної процедури керування проводиться пошук невідомих значень керувань на першому кроці, тож табл. 1 надає додаткову інформацію про оптимальні (за критерієм, описаним вище) керування.

Із табл. 1 видно, що за умови кооперативного ставлення підприємців та антагоністичного – держави, величина керувань параметром σ_δ на першому кроці завжди менша, ніж на другому. З соціально-економічної точки зору це означає, що органам державної влади потрібно прагнути до пом'якшення відношення підприємців до політики держави, тобто розширення діапазону значень σ, за якого підприємці кооперативно ставляться до держави, шляхом проведення відповідних економічних і, насамперед, соціальних заходів. Такий курс соціально-економічних дій доцільно впроваджувати лише за кооперативного ставлення підприємців та антагоністичного – держави. При цьому для керувань параметром δ_σ (який відповідає значенню δ, при проході через яке держава змінює характер свого ставлення до підприємців) порядок домінування змінюється з часом і не можна обрати певну фіксовану стратегію по відношенню до значень керувань цим параметром на другому кроці.

Таблиця 1

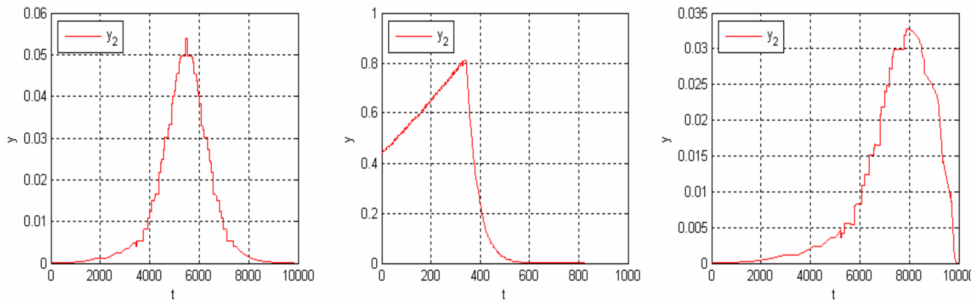
Класифікація керувань σ_δ, δ_σ

Ставлення підприємців	Ставлення держави	Параметр, за яким відбувається диференціювання	Співвідношення керувань
0,3	-1	σ_δ	$(\sigma_\delta)_2 > (\sigma_\delta)_1$
0,3	-1	δ_σ	$(\sigma_\delta)_2 > (\sigma_\delta)_1$
-0,3	1	σ_δ	$(\delta_\sigma)_1 > (\delta_\sigma)_2$
-0,3	1	δ_σ	$(\sigma_\delta)_1 > (\sigma_\delta)_2$
-0,3	1	δ_σ	$(\delta_\sigma)_1 > (\delta_\sigma)_2$
-0,3	-1	δ_σ	$(\sigma_\delta)_1 > (\sigma_\delta)_2$
-0,3	-1	σ_δ	$(\sigma_\delta)_1 > (\sigma_\delta)_2$
0,3	-1	σ_δ	$(\delta_\sigma)_2 <> (\delta_\sigma)_1$
0,3	-1	δ_σ	$(\delta_\sigma)_2 <> (\delta_\sigma)_1$
-0,3	1	σ_δ	$(\sigma_\delta)_2 <> (\sigma_\delta)_1$
-0,3	-1	σ_δ	$(\delta_\sigma)_2 <> (\delta_\sigma)_1$
-0,3	-1	δ_σ	$(\delta_\sigma)_2 <> (\delta_\sigma)_1$

Джерело: розрахунки автора.

У разі антагоністичного ставлення підприємців і кооперативного – держави можна однозначно визначити порядок домінування керувань δ_σ. Зокрема, незалежно від того, за якою змінною відбувається диференціювання, величина керувань δ_σ на першому кроці завжди більша, ніж на другому. Це означає, що органам державної влади необхідно намагатися зберігати кооперативне ставлення до підприємців, надавши останнім більшу свободу дій. Водночас стратегія підприємців залежить від дій держави. Якщо органи державної влади намагаються поліпшити соціально-економічний стан в країні і при цьому розширюється діапазон рівня оподаткування, за якого держава не змінює свого ставлення до підприємців (диференціювання за змінною δ_σ), підприємцям потрібно прагнути до зміни свого ставлення на кооперативне, тобто керування першого кроку більші за керування другого кроку. Такий порядок керувань σ_δ зберігається і за антагоністичного ставлення обох сторін. За решти ж випадків порядок домінування керувань змінюється упродовж проміжку керування, що ускладнює задачу вибору стратегії дій сторін (табл. 1).

Керування попитом може здійснюватися шляхом зміни обсягів державних замовлень. Типові графіки керувань платоспроможним попитом зображені на рис. 4. Зазначимо, що якщо керування рівнем капіталу та значеннями параметрів σ_δ, δ_σ здійснювалося на обох кроках двокрокової процедури керування, вплив на змінну y здійснюється лише на другому кроці. Такий вибір зумовлений технічним та економічним аспектами питання. З технічної точки зору зменшується кількість невідомих, а отже, й розмірність системи нелінійних алгебраїчних рівнянь, яку необхідно вирішувати. З економічної точки зору накладаються більш жорсткі обмеження на обсяг ресурсів, доступних для впливу на платоспроможний попит.



а) б) в)

Рис. 4. Керування попитом для випадків (а) $e = 0,3$; $f = -1$; $\delta_\sigma = 0,271$; **(б)** $e = -0,3$; $f = 1$; $\sigma_\delta = 0,721$; **(в)** $e = 0,3$; $f = -1$; $\sigma_\delta = 0,181$

Як видно з рис. 4, усі значення керувань попитом додатні, тобто для переходу в стан, що характеризується вищим рівнем національного доходу, державі потрібно підвищити свій платоспроможний попит. Графіки керувань платоспроможним попитом показують, наскільки легко рухатися траєкторіями стаціонарних точок. Так, за відносно більших значень керувань попитом за один і той самий час можна перейти в стаціонарну точку, що характеризується відносно більшим значенням $НД$, за умови незмінності значень екзогенних змінних. Найбільша швидкість руху траєкторією досягається в точці максимуму керувань. Ця точка зазвичай лежить ближче до середини траєкторії (рис. 4), що зумовлено ускладненням руху на початках і кінцях траєкторій.

Узагальнюючі характеристики керувань. У табл. 2 узагальнено основні показники керувань. Одиницею виміру часу в моделі виступає довжина циклу капіталу [6, с. 255], яка за попередніми оцінками для економіки України дорівнює одному календарному року. Для вимірювання рівня капіталу, платоспроможного попиту та $НД$ використовуються умовні одиниці (у. о.), що можна інтерпретувати як деякі абстрактні грошові одиниці. Оскільки у вихідній моделі змінні $x, y \in R^n$ [6, с. 254] (в аналізованому випадку $n = 1$), позначення у. о. введене для поліпшення сприйняття результатів моделювання. Зазначимо, що у. о. не можна інтерпретувати як грошову одиницю (тис., млн, млрд тощо) певної конкретної країни. Таким чином, у межах аналізованої моделі доцільно порівнювати відносні зміни показників за різних значень екзогенних параметрів. Під приростом $НД$ мається на увазі різниця абсолютних значень $НД$ на початку та кінці траєкторії, при цьому значення $НД$ у початковій точці завжди було менше за кінцеве.

Таблиця 2

Узагальнюючі характеристики керувань

Траєкторія $[e, f]$ (змінна диференціювання) / **Показник**	**-0,3; -1** (σ_δ)	**-0,3; -1** (δ_σ)	**-0,3; 1** (σ_δ)	**-0,3; 1** (δ_σ)	**0,3; -1** (σ_δ)	**0,3; -1** (δ_σ)
Середній час проходження траєкторії, циклів капіталу, *роки*	150,1189	138,9671	43,7282	24,1138	204,8428	153,2952
Час питомого зростання *НД*, циклів капіталу, *роки*	0,7676	0,3542	0,1663	0,0875	3,3786	5,3565
Приріст інвестицій за період, що аналізується, *у. о.*	220,3767	403,5934	126,6768	234,3115	104,3958	53,1650
Приріст державних витрат за період, що аналізується, *у. о.*	101,6459	185,7778	57,7068	107,1260	48,5444	24,7503
Питомий приріст інвестицій на одиницю зростання $НД$, *у. о.*	0,2616	0,2274	0,1553	0,1700	0,5786	0,7082
Питомий приріст державних витрат на одиницю зростання $НД$, *у. о.*	0,1206	0,1047	0,0708	0,0777	0,2691	0,3297
Середньоквадратичне відхилення σ_δ	0,1104	0,1881	0,0437	0,1895	0,0288	0,1070
Середньоквадратичне відхилення δ_σ	0,0375	0,1948	0,1140	0,2735	0,0016	0,1454
Приріст $НД$, *у. о.*	842,4983	1774,6242	815,4523	1378,4574	180,4215	75,0671

Джерело: розрахунки автора.

Найнижчі питомі витрати керувань капіталом і платоспроможним попитом спостерігаються у випадку кооперативного ставлення більш сильної сторони (держави) та антагоністичного ставлення підприємців. На витрати керувань соціальною складовою (точками перемикання функцій впливу) значним чином впливає довжина траєкторії. Прикладом може слугувати випадок антагоністичного ставлення держави та кооперативного ставлення підприємців. За антагоністичного ставлення держави значно зростають ресурси керування, при цьому з точки зору економічної ефективності підприємцям необхідно також змінити своє ставлення на антагоністичне.

Оцінки керувань за даними українських підприємств. З метою порівняння характеристик керування було оцінено органічну, виробничу та товарну будови капіталу за даними бухгалтерської звітності 77 українських компаній за період із 2002 по 2010 рр. Середній розмір доходу від реалізації продукції аналізованими компаніями становив 4,5 млрд грн. У табл. 3 наведено характеристики керувань для значень параметрів $\gamma = 9,357$; $\theta = 22,443$; $\eta = 0,605$. Решта параметрів приймають ті ж значення, що і за попередніх розрахунків. Оскільки одиниці виміру параметрів γ, θ, η – відносні величини, оцінка значень цих екзогенних змінних за реальними даними не впливає на зміну одиниць виміру величин x, y та $НД$, тому в табл. 3 під у. о. маються на увазі ті ж абстрактні грошові одиниці, що й зазначені при описі табл. 2. Таким чином, допустимо порівнювати результати модельних розрахунків, наведені в табл. 2 і табл. 3.

Таблиця 3

Узагальнюючі характеристики керувань за даними українських підприємств

Траєкторія $[e, f]$ (змінна диференціювання) / Показник	-0,3; -1 (σ_δ)	-0,3; -1 (δ_σ)	-0,3; 1 (σ_δ)	-0,3; 1 (δ_σ)	0,3; -1 (σ_δ)	0,3; -1 (δ_σ)
Середній час проходження траєкторії, циклів капіталу, *роки*	118,7164	116,9226	14,4557	24,2234	179,7819	150,0947
Час питомого зростання *НД*, циклів капіталу, *роки*	0,0532	0,0386	0,0109	0,0103	0,6797	1,1851
Приріст інвестицій за період, що аналізується, *у. о.*	2344,3858	3048,5022	910,3273	1763,0746	688,5077	398,9077
Приріст державних витрат за період, що аналізується, *у. о.*	169,8819	220,7669	65,0287	127,0825	50,3923	29,2455
Питомий приріст інвестицій на одиницю зростання $НД$, *у. о.*	1,0505	1,0055	0,6890	0,7507	2,6031	3,1497
Питомий приріст державних витрат на одиницю зростання $НД$, *у. о.*	0,0761	0,0728	0,0492	0,0541	0,1905	0,2309

Траєкторія $[e, f]$ (зміна диференціювання) / Показник	-0,3; -1 (σ_δ)	-0,3; -1 (δ_σ)	-0,3; 1 (σ_δ)	-0,3; 1 (δ_σ)	0,3; -1 (σ_δ)	0,3; -1 (δ_σ)
Середньоквадратичне відхилення σ_δ	0,1586	0,1943	0,0453	0,2038	0,0427	0,1119
Середньоквадратичне відхилення δ_σ	0,0675	0,1969	0,1429	0,2756	0,0018	0,1445
Приріст $НД$, *у. о.*	2231,7781	3031,8607	1415,6541	2348,7156	264,4937	126,6509

Джерело: розрахунки автора.

За отриманої оцінки структури капіталу спостерігається зростання витрат капіталу з одночасним зменшенням витрат на керування попиту, величини середньоквадратичних відхилень σ_δ та δ_σ також зростають. Хоча за нових значень структури капіталу збільшився приріст національного доходу, загалом питомі витрати керування зросли. Основним чинником цього стало збільшення майже в десять разів органічної структури капіталу, тобто відношення постійного капіталу до змінного. Зростання частки змінного капіталу на українських підприємствах призведе до зменшення питомих витрат ресурсів, спрямованих на підвищення рівня національного доходу.

Висновки. У роботі досліджено можливості економічного зростання в рамках моделі макроекономічної динаміки, що враховує соціальну складову відношення підприємців і держави, взаємодія яких визначається рівнем оподаткування та величиною норми прибутку.

Отримані результати показують, що за кооперативного ставлення сторін (підприємців і влади) в системі відсутні положення рівноваги, що викликано коливаннями рівнів капіталу, платоспроможного попиту та норми прибутку. В решті випадків взаємодії в економіці наявні зростаючі за національним доходом траєкторії стаціонарних точок. Застосування процедури керування дало можливість рухатися з положення рівноваги з меншим $НД$ в положення рівноваги з вищим рівнем $НД$, при цьому необхідно впливати не лише на економічні, а й на соціальні складові моделі. Тобто для переведення економіки в новий стан, що характеризується вищим рівнем національного доходу, необхідно змінювати не лише рівень попиту держави та величину інвестицій, а й впливати на величини (рівень оподаткування), за яких сторони (підприємці та держава) змінюють своє ставлення одна до одної. Наприклад, на підприємців слід впливати таким чином, щоб вони підтримували дії держави за умови підвищення рівня оподаткування.

Питомі витрати керування для оцінок структури капіталу, отриманих для українських підприємств, зросли порівняно з теоретичними значеннями. Зменшенню сукупних витрат ресурсів керування може сприяти зростання частки змінного капіталу в загальному обсязі виробничого капіталу. За таких змін для переведення економіки в стан із вищим рівнем національного доходу потрібно залучати менший обсяг інвестицій, хоча при цьому дещо зростуть державні витрати.

Список використаних джерел

1. *Wang Y.* Chaos and Hopf Bifurcation Of a Finance Systems with Distributed Time Delay / Y. Wang, Y. H. Zhai, J.Wang // International Journal of Applied Mathematics And Mechanics. – 2010. – № 6(20). – P. 1–13.

2. *Vlad S.* Chaos Models in Economics / S.Vlad, P.Pascu, N.Morariu // Journal of Computing. – 2010. – Vol. 2, Is. 1. – P. 79–83.

3. *Кузнецов А.П.* Стабилизация внешними импульсами системыРесслера в режиме "убегающей" траектории / А.П. Кузнецов, Н.В. Станкевич, Л.В. Тюрюкина // Письма в ЖТФ. – 2008. – Т. 34, вып. 14. – С. 68–74.

4. *Магницкий Н.А.* О стабилизации неподвижных точек хаотических отображений / Н.А. Магницкий // Доклады академии наук. – 1996. – Т. 351, № 2. – С. 175–177.

5. *Трубецков Д.И.* Введение в синергетику. Хаос и структуры / Д.И.Трубецков. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 240 с.

6. *Магницкий Н.А.* Новые методы хаотической динамики / Н.А.Магницкий, С.В.Сидоров. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 320 с.

7. *Капустян В.О.* Дослідження моделі ринкової економіки, що самостійно розвивається, за умови дифузії керуючих параметрів і стабілізація поведінки системи / В.О.Капустян, М.Г.Чепелєв // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2009. – № 4. – С. 16–23.

8. *Холодниок М.* Методы анализа нелинейных динамических моделей / [М.Холодниок, А.Клич, М.Кубичек, М.Марек]. – М. : Мир, 1991. – 368 с.

9. *Dhooge A.* MATCONT and CL_MATCONT Continuation toolboxes in MATLAB [Електронний ресурс] / [A. Dhooge, W.Govaerts, Yu. Kuznetsov and other]. – Доступний з : <http://institutional.us.es/>.

Надійшла в редакцію
12.12.2011 р.