

В.М. Михайлов, К.В. Чунихин

ОБ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ АНАЛОГИИ МАГНИТОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В НЕОДНОРОДНОЙ НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Зроблено аналіз застосування електростатичної аналогії у магнетостатиці неоднорідних намагнетованих середовищ на основі дипольної моделі та моделі намагнетчування молекулярними струмами. Показано, що коректним є застосування дипольної моделі намагнетчування. Отримано співвідношення між намагнетченостями для різних моделей, котре пояснює використання в електростатичній аналогії намагнетченості молекулярними струмами. Бібл. 5, табл. 1.

Ключові слова: магнетостатика, намагнетоване середовище, електростатична аналогія, дипольна модель, молекулярний струм намагнетчування, намагнетченість.

Сделан анализ применения электростатической аналогии в магнитостатике неоднородных намагничивающихся сред на основе дипольной модели и модели намагничивания молекулярными токами. Показано, что корректным является использование дипольной модели намагничивания. Получено соотношение между намагниченностями для различных моделей, поясняющее применение в электростатической аналогии намагниченности молекулярными токами. Библ. 5, табл. 1.

Ключевые слова: магнитостатика, намагничивающаяся среда, электростатическая аналогия, дипольная модель, молекулярный ток намагничивания, намагниченность.

Введение. Использование фиктивных магнитных зарядов для расчета магнитостатических полей в намагничивающихся средах связано с развитием представлений о природе магнитных явлений и основано на электростатической аналогии поляризации диэлектриков и магнетиков [1]. В основе этой аналогии лежит образование магнитных диполей, подобных электрическим диполям, но состоящих из двух точечных фиктивных магнитных зарядов (в дальнейшем – дипольная модель намагничивания). Электростатическую аналогию использовали, в частности, Г.А. Гринберг [2] и К. Шимони [3].

Впоследствии оказалось, что намагничивание происходит благодаря протеканию внутри магнетиков молекулярных (микроскопических) токов (такую модель в дальнейшем будем называть моделью намагничивания молекулярными токами), а электростатическая аналогия далека от природы магнетизма [1, 4]. Несмотря на формальный характер электростатическая аналогия при корректном использовании весьма эффективна [1-4].

Различным моделям намагничивания поставим в соответствие различные намагниченности: \vec{J}^e – намагниченность диполями; \vec{J} – намагниченность молекулярными токами. В некоторых книгах и статьях авторы описывают магнитостатическое поле намагничиваемых тел при помощи скалярного потенциала φ_m , что соответствует дипольной модели, а в формулах для определения φ_m используют намагниченность \vec{J} . Возможной причиной этого является предложенная в учебнике [1] аналогия между поляризованностью диэлектрика \vec{P} и $\mu_0 \vec{J}$ (μ_0 – магнитная постоянная), но последнее требует теоретического обоснования.

Актуальность данной работы состоит в том, что применение электростатической аналогии для постановки и тестирования численных алгоритмов решения задач магнитостатики намагничиваемых тел приводит к затруднениям, связанным с недостаточно четким изложением в известных публикациях.

Целью данной работы является анализ правильности применения в электростатической аналогии магнитостатики неоднородных намагничивающихся сред двух известных моделей намагничивания.

Основные уравнения и формулы электростатической аналогии. Рассматриваем электростатическое и магнитостатическое поле в неподвижной изотропной неоднородной поляризуемой среде. Основные уравнения этих полей и формулы представлены в табл. 1 [1-4]. Величинами-аналогами в случае дипольной модели намагничивания являются: \vec{E} и \vec{H} , \vec{D} и \vec{B} – напряженности, а также индукции электрического и магнитного поля; \vec{P} и \vec{J}^e ; ρ_e и ρ_m – объемные плотности поляризационных электрических и фиктивных магнитных зарядов; ρ_e^{st} и ρ_m^{st} – объемные плотности сторонних [2] электрических и фиктивных магнитных зарядов; ϵ_0 и μ_0 , ϵ_0 – электрическая постоянная; \vec{p} и \vec{p}_{me} – моменты электрического и магнитного диполей; $\pm q$ и $\pm m$ – точечные электрические и фиктивные магнитные заряды, расположенные в диполях на расстоянии l . В формулах для определения \vec{P} и \vec{J}^e величина ΔV – достаточно малый объем поляризуемой среды, по которому усредняются суммы соответствующих дипольных моментов. Поле магнитных диполей является потенциальным, его скалярный потенциал φ_m аналогичен потенциалу электростатического поля φ . Следствием формальности рассматриваемой аналогии есть то, что индукция \vec{B} становится вспомогательным вектором. В формулах для расчета φ_m и φ приняты такие обозначения: в случае диполей, распределенных в объеме V , величина dV_M – элементарный объем с центром в точке $M \in V$; в случае поверхностных фиктивных магнитных зарядов, распределенных на граничной поверхности S , величина dS_M – элементарная площадка с центром в точке $M \in S$; r_{MQ} – расстояние между точкой с текущими координатами M и точкой наблюдения Q .

© В.М. Михайлов, К.В. Чунихин

Основные уравнения и формулы для расчета аналогичных полей

Электростатическое поле	Магнитостатическое поле (дипольная модель намагничивания)
$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} + \frac{\rho_e^{st}}{\varepsilon_0}$	$\operatorname{div} \vec{H} = \frac{\rho_m}{\mu_0} + \frac{\rho_m^{st}}{\mu_0}$
$\operatorname{div} \vec{P} = -\rho_e$	$\operatorname{div} \vec{J}^e = -\rho_m$
$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$	$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J}^e$
$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_e^{st}$	$\operatorname{div} \vec{B} = \rho_m^{st}$
$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{p}$	$\vec{J}^e = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{p}_{me}$
$\vec{p} = q \vec{l}$	$\vec{p}_{me} = m \vec{l}$
$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$	$\vec{H} = -\operatorname{grad} \varphi_m$
$\varphi(Q) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \left(\vec{P}(M), \operatorname{grad}_M \frac{1}{r_{MQ}} \right) dV_M$	$\varphi_m(Q) = \frac{1}{4\pi\mu_0} \int_V \left(\vec{J}^e(M), \operatorname{grad}_M \frac{1}{r_{MQ}} \right) dV_M$
$\varphi(Q) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \sigma(M) \frac{1}{r_{MQ}} dS_M$	$\varphi_m(Q) = \frac{1}{4\pi\mu_0} \int_S \sigma_m(M) \frac{1}{r_{MQ}} dS_M$

Для границы раздела двух различных однородных сред 1 и 2 в отсутствие сторонних источников и при условии, что нормаль к границе направлена в среду 1, из уравнений первой строки табл. 1 следуют граничные условия [2] для электростатического поля –

$$E_{1n} - E_{2n} = \frac{\sigma_e}{\varepsilon_0}, \quad (1)$$

для магнитостатического поля –

$$H_{1n} - H_{2n} = \frac{\sigma_m}{\mu_0}, \quad (2)$$

где σ_e , σ_m – поверхностные плотности поляризационных электрических и фиктивных магнитных зарядов на границе раздела, причем

$$\sigma_e = P_{2n} - P_{1n}, \quad \sigma_m = J_{2n}^e - J_{1n}^e. \quad (3)$$

В граничных условиях (1) и (2), а также в формулах (3) индексы 1n и 2n имеют нормальные проекции соответствующих векторов в средах 1 и 2.

Анализ применения модели намагничивания молекулярными токами. Вначале приведем в том же смысловом порядке, как и для дипольной модели (табл. 1), основные уравнения и формулы магнитостатики намагничиваемых сред на основе модели намагничивания молекулярными токами [1, 4]:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 (\vec{j}_m + \vec{\delta}^{st}); \\ \operatorname{rot} \vec{J} &= \vec{j}_m; \\ \vec{B} &= \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}); \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0; \\ \vec{J} &= \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{p}_m; \\ \vec{p}_m &= i_m s \vec{n}; \\ \vec{B} &= \operatorname{rot} \vec{A}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\vec{A}(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{j}_m(M) \frac{1}{r_{MQ}} dV_M,$$

где \vec{j}_m – плотность молекулярных токов намагничивания; $\vec{\delta}^{st}$ – плотность сторонних токов проводимости; \vec{p}_m – магнитный момент молекулярного тока намагничивания i_m ; s – площадь микроскопического круга, ограниченного контуром протекания тока i_m ; \vec{n} – нормаль к микроскопическому кругу в его центре; $\vec{A}(Q)$ – векторный потенциал магнитного поля, создаваемого молекулярными токами намагничивания.

Сравнение основных уравнений и формул электростатического поля поляризуемых сред (табл. 1) и магнитостатического поля намагничиваемых сред на основе модели намагничивания молекулярными токами показывает, что между этими полями нет даже формальной аналогии. Этот вопрос не сводится только к несоответствию соотношений между векторами \vec{D} , \vec{E} , \vec{P} и \vec{B} , \vec{H} , \vec{J} , а является следствием существенного отличия источников сопоставляемых полей: источниками электростатического поля являются диполи – скалярные источники, магнитостатического – токи (векторные источники). Магнитное поле молекулярных токов, в отличие от поля магнитных диполей, является вихревым, поэтому его векторы и плотности источников связаны другими уравнениями.

Следовательно, можно говорить лишь об использовании \vec{J} в электростатической аналогии на основе дипольной модели намагничивания.

О связи между намагниченностями \vec{J}^e и \vec{J} . Как мы уже отмечали во введении, К.М. Поливанов предложил аналогию \vec{P} и $\mu_0 \vec{J}$ [1], используя преобразование формулы (4) к виду

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{J}.$$

При этом слагаемому $\mu_0 \vec{J}$ не придается определенный физический смысл, о котором можно догадываться. Для выяснения последнего найдем связь между \vec{J}^e и \vec{J} .

Во-первых, воспользуемся идеей замены контуров с токами проводимости двойными магнитными слоями [4, 5]. Применяя эту идею к контуру молекулярного тока намагничивания i_m , приходим к микроскопическому однородному двойному слою фиктивных магнитных зарядов, который эквивалентен магнитному диполлю.

Во-вторых, воспользуемся условием эквивалентности магнитных полей контура с током проводимости на больших расстояниях от него и магнитного диполя в однородной среде с абсолютной магнитной проницаемостью μ [5]. Применяя это условие к рассматриваемым моделям намагничивания с микроскопическими источниками, имеем

$$\vec{p}_{me} = \mu_0 \vec{p}_m. \quad (5)$$

Усредняя левую и правую части условия (5) по достаточно малому объему намагничиваемой среды ΔV , находим

$$\vec{J}^e = \mu_0 \vec{J}. \quad (6)$$

Соотношение (6) позволяет использовать намагниченность молекулярными токами в дипольной модели намагничивания и раскрывает физический смысл $\mu_0 \vec{J}$ в обсуждаемой аналогии.

Выводы. Дипольная модель намагничивания и модель намагничивания молекулярными токами имеют различный физический смысл, следствием чего являются различные определения намагниченности и математические описания магнитостатического поля в намагничиваемой среде. Поле дипольной модели является потенциальным и описывается скалярным потенциалом, поле молекулярных токов – вихревое и описывается векторным потенциалом. Применение электростатической аналогии для расчета магнитостатического поля неоднородных намагничивающихся сред правильно на основе дипольной модели намагничивания, однако в расчетных формулах потенциального поля возможно корректное использование намагниченности молекулярными токами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поливанов К.М. Теоретические основы электротехники, ч. 3. Теория электромагнитного поля. – М.: «Энергия», 1969. – 352 с.
2. Гринберг Г.А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. – М. – Л.: Изд. АН СССР, 1948. – 730 с.
3. Шимони К. Теоретическая электротехника. – М.: Мир, 1964. – 775 с.
4. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1989. – 504 с.
5. Брунов Б.Я., Гольденберг Л.М., Кляцкин И.Г., Цейтлин Л.А., Теория электромагнитного поля. – М. – Л.: Госэнергоиздат, 1962. – 512 с.

REFERENCES

1. Polivanov K.M. *Teoreticheskie osnovy elektrotehniki, ch. 3. Teoriia elektromagnitnogo polia* [Theoretical foundations of electrical engineering, Part 3. Theory of electromagnetic field]. Moscow, Energija Publ., 1969. 352 p. (Rus).
2. Grinberg G.A. *Izbrannye voprosy matematicheskoi teorii elektricheskikh i magnitnykh iavlenii* [Selected questions of mathematical theory of electric and magnetic phenomena]. Moscow-Leningrad, Acad. of Sci. USSR Publ., 1948. 730 p. (Rus).
3. Simonyi K. *Teoreticheskaya elektrotehnika* [Theoretical Electrical Engineering]. Moscow, Mir Publ., 1964. 775 p. (Rus).
4. Tamm I.E. *Osnovy teorii elektrichestva* [Fundamentals of electricity theory]. Moscow, Nauka Publ., 1954. 620 p. (Rus).
5. Brunov B.Ia., Gol'denberg L.M., Kliatskin I.G., Tseitlin L.A., *Teoriia elektromagnitnogo polia* [Theory of electromagnetic field]. Moscow-Leningrad, Gosenergoizdat Publ., 1962. 512 p. (Rus).

Поступила (received) 28.08.2017

Михайлов Валерий Михайлович¹, д.т.н., проф.,
Чунихин Константин Вадимович², аспирант,

¹Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт»,
61002, Харьков, ул. Кирпичева, 2,
тел/phone +38 057 7076052,
e-mail: valery.m.mikhailov@gmail.com

²Государственное учреждение «Институт технических
проблем магнетизма Национальной Академии Наук Украины»,
61106, Харьков, ул. Индустриальная, 19,
тел/phone +38 057 2992162,
e-mail: kvchunikhin@gmail.com

V.M. Mikhailov¹, K.V. Chunikhin²

¹National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute»,
2, Kyrpychova Str., Kharkiv, 61002, Ukraine.

²State Institution «Institute of Technical Problems
of Magnetism of the NAS of Ukraine»,
19, Industrialna Str., Kharkiv, 61106, Ukraine.

On electrostatic analogy of magnetostatic field in inhomogeneous magnetized medium.

Purpose. The application in electrostatic analogy of magnetostatics for inhomogeneous magnetized media of two known magnetization models. **Methodology.** A comparison of basic equations and formulas of electrostatic and magnetostatic field in immoveable isotropic inhomogeneous polarized medium for dipole model and the magnetization model by molecular currents is made. The value-analogues for dipole model of magnetization are established. **Results.** We have shown that the using of dipole model of magnetization is correct. There is not even formal analogy with electrostatic field in the case of using the magnetization model by molecular currents. The relation between the magnetizations for various models is obtained. It allows us to justify the using magnetization by molecular currents in electrostatic analogy. **Originality.** The magnetization for dipole model is introduced and the possibility of using magnetization by molecular currents in the formulas for calculating potential magnetostatic field in magnetized medium is substantiated. **Practical value.** The results allow to obtain correct formulation and solution of the problem of magnetostatic field calculation in inhomogeneous magnetized medium. References 5, tables 1.

Key words: magnetostatics, magnetized medium, electrostatic analogy, dipole model, magnetization by molecular currents.