

С.Т. Толмачев, С.Л. Бондаревский, А.В. Ильченко

## МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕД С ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

*Викладено метод розрахунку магніостатичного поля в двоякоперіодичному гетерогенному середовищі. Сформульовано інтегральне рівняння відносно вектора намагніченості елементів середовища. Розрахунок характеристик поля виконується шляхом вирішення польової задачі в області основного паралелограма періодів без задання граничних умов на його сторонах. Отримано розрахункові вирази для напруженості поля і тензора магнітної проникності. Наведено результати обчислювальних експериментів, що підтверджують універсальність і ефективність методу. Проведено детальне дослідження поля магнітних сил матриці високоградієнтного магнітного сепаратора. Метод відкриває нові можливості підвищення технічних характеристик електрофізичних пристроїв, для яких універсальність і точність розрахунку локальних і ефективних характеристик поля є визначальною. Бібл. 16, рис. 11.*

*Ключові слова:* двоякоперіодичне гетерогенне середовище, інтегральне рівняння, вектор намагніченості, поле напруженості, тензор магнітної проникності, високоградієнтна сепарація, матриця, магнітні сили.

*Изложен метод расчета магнитостатического поля в двоякопериодической гетерогенной среде. Сформулировано интегральное уравнение относительно вектора намагниченности элементов среды. Расчет характеристик поля осуществляется путем решения полевой задачи в области основного параллелограмма периодов без задания граничных условий на его сторонах. Получены расчетные выражения для напряженности поля и тензора магнитной проницаемости. Приведены результаты вычислительных экспериментов, подтверждающих универсальность и эффективность метода. Проведено детальное исследование поля магнитных сил матрицы высокоградиентного магнитного сепаратора. Метод открывает новые возможности повышения технических характеристик электрофизических устройств, для которых универсальность и точность расчета локальных и эффективных характеристик поля является определяющей. Библ. 16, рис. 11.*

*Ключевые слова:* двоякопериодическая гетерогенная среда, интегральное уравнение, вектор намагниченности, поле напряженности, тензор магнитной проницаемости, высокоградиентная сепарація, матрица, магнитные силы.

**Введение.** Гетерогенные среды (ГС) получили большое распространение благодаря широкому спектру их практического применения – магнитодиэлектрики, полупроводники, смеси, растворы, композитные и армированные материалы, магнитные и электростатические и фильтры и др.

Теория ГС берет начало ещё от классических работ Дж. Максвелла и Дж. Рэлея, в которых рассмотрены вопросы определения эффективных параметров ГС с каноническими включениями в виде цилиндров и сфер (задача гомогенизации). В последующем эти исследования были развиты многими авторами: К.М. Поливанов, В.М. Финкельберг, А.В. Нетушил, Б.М. Фрадкин, В.И. Оделевский, Л.Д. Степин, Б.Я. Балагуров, Ю.П. Емец, В. Буряченко, М. Харадли, В. Джексон, К.З. Марков, С. Немат-Нассер, М. Хори, В.Т. Перринс, Д.Р. МакКензи, Р.К. МакФедран, П.Д. Кюив, С. Торкуато и многие др.

Различные аспекты теории и практики ГС активно разрабатывались и в Украине, в частности учеными Института электродинамики НАН Украины. Особое внимание развитию методов анализа электромагнитных полей в электропроводящих, диэлектрических, композитных и гетерогенных системах уделялось в отделе электрофизики преобразования энергии. Ю.П. Емцем были развиты аналитические методы анализа электрических полей с применением методов интегральных уравнений и комплексных переменных. Рассмотрены двумерные двухкомпонентные системы с регулярной структурой распределения неоднородностей. Определены основные эффективные параметры двухкомпонентных диэлектрических и проводящих сред с включениями канонической формы: проводимость, магнетосопротивление и коэффициент Холла. Результаты исследований Ю.П. Емца и его учеников в данном направлении отображены в монографии [1].

На основе мультипольного разложения высоких порядков классические формулы Дж. Максвелла и Дж. Рэлея о сферических и круговых цилиндрах в прямоугольной матрице в [2] обобщены и развиты на случай эллиптических цилиндров и сфероидальных элементов. Там же впервые рассмотрен в достаточно общей полевой постановке вопрос о двоякопериодической задаче магнитостатики для нелинейной неоднородной анизотропной среды с периодическими включениями и со сложной геометрией элементов.

В последние годы сфера применения ГС неуклонно расширяется: исследование нанокompозитных материалов [3], ферромагнитных перфорированных мембран (магнитных сит) [6] и др. устройств микромагнитной сепарации сверхтонких магнитных частиц [5]. Более активно при исследовании свойств ГС используются возможности современных информационных технологий.

Значительное место в теории и приложениях ГС занимают задачи, связанные с применением магнитного поля. В частности, одной из таких задач является синтез фильтр-матриц высокоградиентных магнитных сепараторов (ВГМС) для извлечения слабomagнитных минералов. Потребность в этих устройствах возникла в середине прошлого столетия в связи с истощением запасов богатого сырья на фоне развивающейся быстрыми темпами технологии бездоменной металлургии и роста требований к качеству стали [6, 7]. Были созданы различные типы ВГМС (Джонс, Сала-Карусель, Боксмаг Рапид, Крупп-Сол-24/14, 6-ЭРМ-35/135, ВГС-100/2 и др.). Эксплуатация этих сепараторов показала, что при высоких массогабаритных параметрах (например, сепаратор Джонса ДР 335 производительностью 180 т/ч имеет диаметр ротора 3,35 м и массу 114 т) и

© С.Т. Толмачев, С.Л. Бондаревский, А.В. Ильченко

удельных показателей электропотребления они не всегда обеспечивают требуемые технологические параметры обогащения. Поэтому разработка новых конструкций ВГМС продолжается, а оптимизация их технических параметров остается актуальной задачей.

Отличительной особенностью ВГМС, во многом определяющей их эффективность, является применение магнитных фильтров матричной структуры, элементы которых имеют сложную геометрию и высокую концентрацию для повышения напряженности магнитного поля и ее градиента. Исследование различных типов матриц является объектом внимания многочисленных авторов. Обзор современного состояния данного вопроса с обширной библиографией дан в [5]. Интерес к этому вопросу объясняется тем, что матрица существенно влияет на производительность, эффективность разделения и стоимость эксплуатации. В идеале она должна при высокой эффективности извлечения обеспечивать максимальный удельный объем захвата полезного минерала при минимально возможном сопротивлении пульпы.

Оптимизация параметров матрицы связана с поиском компромисса между большим количеством факторов, влияющих на её эффективность. Магнитная сила, действующая на частицу с объемной магнитной восприимчивостью  $\chi$  и объемом  $V$ ,  $F = \mu_0 \chi V |\mathbf{H}| \text{grad}(|\mathbf{H}|)$ . В этом выражении последние два множителя связаны с магнитной системой сепаратора и его матрицей, а остальные – с извлекаемым магнитным материалом. Если обоснование удерживающей силы  $|F|_{\min}$  для конкретных параметров  $\chi$  и  $V$  является задачей технологов, то обеспечение необходимого значения величины  $F^* = |\mathbf{H}| \text{grad}(|\mathbf{H}|)$ , при котором  $|F| \geq |F|_{\min}$ , является достаточно сложной задачей, требующей специального исследования. Очевидно, для извлечения важна величина  $F^*$ , а не значения  $|\mathbf{H}|$  и  $\text{grad}(|\mathbf{H}|)$  в отдельности. При этом «вес» каждого из сомножителей далеко не очевиден. Увеличение интенсивности поля  $\mathbf{H}$  связано с увеличением мощности и в конечном счете массогабаритных параметров сепаратора. Поскольку при этом градиент магнитного поля существенно не изменяется, увеличение напряженности магнитного поля «вслепую» не обязательно приводит к улучшению эффективности разделения при практическом использовании [7]. Что же касается градиента поля, то возможности его увеличения потенциально значительно больше, так как он существенно зависит от размеров элементов матрицы и их формы. Но и здесь следует искать компромиссное решение, поскольку для селективного разделения необходимо размеры матричного элемента согласовывать с распределением частиц по размерам. Кроме того, большая неоднородность поля матрицы и особенно его градиента значительно усложняют задачу обеспечения максимальной зоны захвата при исключении возможной блокировки матрицы. Этим объясняется большое количество работ по исследованию именно геометрических параметров элементов матриц. Так, в [8] расчетным путем подтверждено ожидаемое уменьшение магнитной силы при увеличении числа сторон правильных многоугольников. В исследованиях многих авторов (см., например, [7, 9, 10]) рекомендованы оптимальные параметры треугольных зубчатых пластин, хотя за

счет более однородного силового поля замена треугольных элементов на элементы с меньшей кривизной поверхности может повысить способность к сбору мелких частиц. Наоборот, в патенте [11] предложено усиление сил для извлечения мелкой фракции путем замены стержней круглого сечения на стержни с ромбовидным сечением (при снижении размеров зоны захвата). В публикации [12] рекомендованы как перспективные стержневые матрицы с эллиптическим сечением. В ряде работ (см., например, [13]) обсуждается целесообразность использования комбинации стержней с различными диаметрами или различными формами поперечного сечения, а также изменение порядка их группирования.

Особенностью перечисленных работ является их частный и иногда противоречивый характер, а также преимущественная ориентация на простые формы элементов матриц. К сожалению, они не дают представления о локальном распределении поля магнитных сил в рабочем пространстве матрицы, сформированного элементами сложной геометрии и произвольной концентрации, особенно при возникающих при этом сложностях с формированием граничных условий с целью локализации области расчета.

Большое разнообразие используемых матричных элементов (шары, рифленые пластины, стержни, сетки, спирали, проволоочная вата и др.) существенно усложняют разработку универсальной математической модели для расчета силового поля матриц ВГМС. Вместе с тем следует выделить наиболее распространенный тип стержневых матриц, которые характеризуются периодичностью по координатам плоскости. Как показано в [2, 14], для исследования таких сред естественным математическим аппаратом является теория двоякопериодических (эллиптических) функций, применение которых позволяет эффективно решать двоякопериодические задачи для ГС в достаточно общей постановке.

**Целью статьи** является разработка универсального метода расчета магнитного и силового поля гетерогенной среды с двоякопериодической структурой без существенных ограничений на число фаз, их геометрию, концентрацию и магнитные свойства.

**Основные определения и свойства двоякопериодических систем.** Первым и обязательным условием при исследовании многокомпонентных ГС является определение основных периодов  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , являющихся образующими основного параллелограмма периодов  $\Omega$  (если он существует). Однозначный ответ на этот вопрос не всегда очевиден, поскольку, как будет показано ниже, даже двоякопериодичность всех фаз многокомпонентной ГС не гарантирует ее двоякопериодичность в целом.

Рассмотрим пару комплексных чисел  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , причем  $\text{Im}(\tau = \omega_2/\omega_1) > 0$ . Точки  $u$  и  $v$  комплексной плоскости называют конгруэнтными, если они связаны соотношением  $u \equiv v \pmod{(\omega_1, \omega_2)}$  [15] или

$$u = v + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2, \text{ где } m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1)$$

Параллелограмм с вершинами  $u_0, u_0 + \omega_1, u_0 + \omega_2, u_0 + \omega_1 + \omega_2$  будем называть параллелограммом периодов, построенным на периодах  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Очевидно,

множеству конгруэнтных точек соответствует бесконечное число параллелограммов периодов, покрывающих без перекрытия всю комплексную плоскость.

Важное место в последующем анализе занимает понятие двоякопериодической (эллиптической) функции. Обозначим  $\omega = m_1 \cdot \omega_1 + m_2 \cdot \omega_2$ . Функцию  $f(u)$  с периодами  $\omega$  будем называть двоякопериодической, а  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – её основными периодами.

Из теории эллиптических функций известно, что пара основных периодов  $(\omega_1, \omega_2)$  не является единственной. Если для произвольных целых чисел  $m_1, m_2$  и  $m'_1, m'_2$  множества точек  $\omega = m_1 \cdot \omega_1 + m_2 \cdot \omega_2$  и  $\omega' = m'_1 \cdot \omega'_1 + m'_2 \cdot \omega'_2$  совпадают, то пары периодов  $\omega$  и  $\omega'$  являются эквивалентными. При этом пара периодов  $(\omega_1, \omega_2)$  тогда и только тогда эквивалентна паре периодов  $(\omega'_1, \omega'_2)$ , когда справедливо соотношение  $\omega'_2 = \alpha \cdot \omega_2 + \beta \cdot \omega_1, \omega'_1 = \gamma \cdot \omega_2 + \delta \cdot \omega_1$ , где  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  – целые числа, удовлетворяющие при  $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$  условию  $\alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma = 1$ . Примеры эквивалентных периодов для двух множеств конгруэнтных точек показаны на рис. 1.

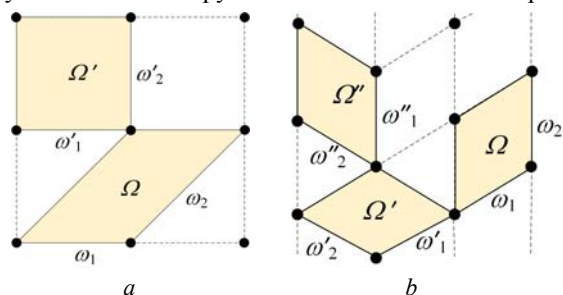


Рис. 1. Множества конгруэнтных точек и соответствующие им эквивалентные параллелограммы периодов

Отметим еще несколько очевидных утверждений. Площади эквивалентных периодов одинаковы, а площадь основного параллелограмма  $\Omega$  с периодами  $(\omega_1, \omega_2)$  минимальна. Будем также называть два параллелограмма с периодами  $(\omega_1, \omega_2)$  и  $(\omega'_1, \omega'_2)$  подобными, если направления периодов  $\omega_1$  и  $\omega'_1, \omega_2$  и  $\omega'_2$  совпадают.

Понятие двоякопериодической ГС более сложное, чем понятие двоякопериодической решетки, поскольку кроме геометрических следует учитывать также физические и другие свойства отдельных фаз, их расположение в параллелограмме периодов и др. Более того, одной и той же решетке периодов может соответствовать множество ГС. Например, установим соответствие между приведенными на рис. 2 двоякопериодическими ГС и решетками периодов рис. 1.

Отметим важный момент на примере рис. 2,а. Основным параллелограммом для множества конгруэнтных точек является малый квадрат. В то же время он не может быть основным параллелограммом ГС, поскольку, например, желтой фазой нельзя покрыть всю комплексную плоскость. Поэтому для этой ГС основные параллелограммы периодов соответствуют рис. 1,а (каждый из них включает по два элемента желтой и синей фаз). ГС, приведенным на рис. 2,б,с,д соответствуют рис. 1,б. Действительно, рассматривая на рис. 2,б,с систему конгруэнтных точек желтой фазы (например, верхние точки элементов) видим, что

они совпадают с решеткой периодов рис. 1,б. Это же можно сказать и о других конгруэнтных точках желтой и двух других фаз. Более сложная ГС рис. 2,д также соответствует рис. 1,б. После поворота рис. 2,д (или системы координат) на  $30^\circ$  видно, что топологически рис. 2,с,д совпадают. Отличие состоит лишь в том, что каждому элементу фаз рис. 2,с соответствует по три элемента двух фаз рис. 2,д. При этом, как трудно видеть, множества соответствующих конгруэнтных точек всех шести фаз совпадают с решеткой периодов рис. 1,б.

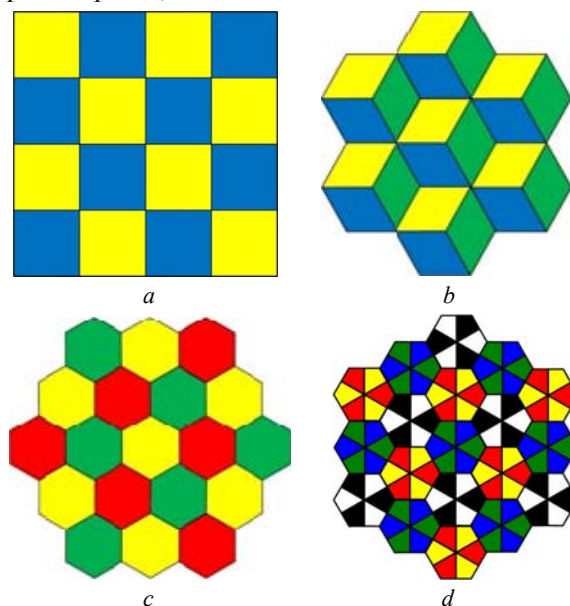


Рис. 2. Примеры двоякопериодических многокомпонентных ГС, соответствующих решеткам рис. 1: двухкомпонентная – а; трехкомпонентные – б и с; шестикомпонентная – д

Приведенные на рис. 2 многокомпонентные ГС имеют очевидную двоякопериодичность с одинаковыми параметрами решеток периодов каждой фазы в пределах ГС. Как будет показано ниже, в этом случае основные периоды ГС в целом совпадают с соответствующими периодами фаз.

Из проведенного анализа можно сделать ряд важных выводов. В частности, правомерно ввести понятие конгруэнтных областей, геометрия которых полностью воспроизводится в каждом параллелограмме периодов. Более того, эти области могут быть многосвязными и многокомпонентными. Это вытекает из утверждения, что каждому параллелограмму периодов системы (1) принадлежит только одна точка этой системы [15]. Рассматривая совокупность произвольных точек  $v$  с порождающими ими множествами конгруэнтных точек (1), естественно приходим к понятию конгруэнтных двоякопериодических областей.

Некоторые дополнительные особенности двоякопериодической ГС проиллюстрируем на примере сложной ГС, показанной на рис. 3.

Дискретная фаза этой ГС представлена тремя фракциями – красной, синей и зеленой. Основные параллелограммы периодов этих фракций выделены соответствующими цветами. Они подобны (т.е. соответствующие стороны параллелограммов параллельны), но имеют разные основные периоды и концен-

трацию включений. Например, если для зеленой фракции ввести обозначение  $\Omega^1=(\omega_1, \omega_2)$ , то для красной  $\Omega^2=(\omega_1, 2\cdot\omega_2)$ , а для синей  $\Omega^3=(3\cdot\omega_1, \omega_2)$ . Отметим, что каждый из выделенных основных параллелограммов периодов  $\Omega^i$  имеет множество эквивалентных, однако для рассматриваемой ГС все они приведены к подобным. Эта процедура необходима для ответа на важный вопрос: является ли данная ГС двоякопериодической и если да, то каковы основные периоды этой среды. Этот вопрос поставлен в статье [16], поэтому ограничимся здесь лишь некоторыми уточнениями и дополнениями.

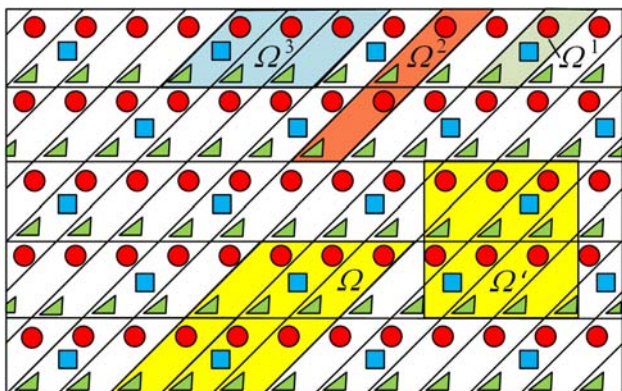


Рис. 3. Основные параллелограммы периодов  $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$  отдельных фаз и эквивалентные параллелограммы периодов  $\Omega$  и  $\Omega'$  трехкомпонентной ГС

**Условие двоякопериодичности.** Пусть некоторая многокомпонентная ГС составлена из ряда двоякопериодических ГС более низкого уровня. Обозначим через  $\{\Omega^i\}$  множество примитивных решёток  $\omega^i=(\omega_1^i, \omega_2^i), i=1, 2, 3, \dots, P$ . В простейшем случае, когда  $\omega_1^i=n^i\cdot\tilde{\omega}_1, \omega_2^i=m^i\cdot\tilde{\omega}_2$ , где  $\tilde{\omega}_1$  и  $\tilde{\omega}_2$  – некоторые комплексные числа, причем  $\text{Im}(\tilde{\omega}_2/\tilde{\omega}_1)>0$ , а  $n^i, m^i$  – произвольные натуральные числа, рассматриваемая ГС двоякопериодическая и её основные периоды  $\omega_1, \omega_2$  определяются следующим образом. Обозначим через  $N$  и  $M$  наименьшие общие кратные для множеств чисел  $\{n^i\}, \{m^i\}$ :  $N=\text{НОК}(n^1, n^2, \dots, n^P), M=\text{НОК}(m^1, m^2, \dots, m^P)$ . Тогда  $\omega_1=N\cdot\tilde{\omega}_1, \omega_2=M\cdot\tilde{\omega}_2$ . Например, для рассмотренной на рис. 3 ГС  $N=\text{НОК}(1, 1, 3)=3, M=\text{НОК}(1, 2, 1)=2$ . Таким образом,  $\omega_1=3\cdot\tilde{\omega}_1, \omega_2=2\cdot\tilde{\omega}_2$ . На рис. 3 два эквивалентных периода ГС  $\Omega$  и  $\Omega'$  выделены желтым цветом.

Отметим несколько важных следствий из проведенного анализа.

1. Необходимым условием двоякопериодичности ГС является существование в множестве основных периодов фаз  $\{\Omega^i\}$  подмножества подобных периодов  $\{\Omega^{i'}\}$ .

2. Двоякопериодичность и подобие периодов  $\{\Omega^{i'}\}$  не гарантирует двоякопериодичность ГС в целом. Например, пусть  $\omega_1^1=a, \omega_1^2=b, \omega_2^1=\omega_2^2$ , причем  $a\neq b$  – любые иррациональные числа, например,  $a=e, b=\pi$ . Очевидно, нельзя подобрать целые числа кратности для указанных периодов.

3. При линейном перемещении основного параллелограмма периодов  $\Omega$  или при переходе к эквивалентному параллелограмму сохраняются все конгруэнтные компоненты (или их части), концентрация отдельных фаз и физические параметры, имеющие двоякопериодический характер, например, векторы намагниченности в соответствующих конгруэнтных точках. Это важно при практическом решении задач по определению локальных и эффективных параметров ГС.

Отметим, что установление факта двоякопериодичности ГС и определение её основных периодов значительно расширяет возможности исследования ГС, поскольку обеспечивает возможность применения теории эллиптических функций и ограничивает область анализа основным параллелограммом периодов.

**Основные расчетные соотношения.** В комплексной плоскости  $E$  рассмотрим среду с регулярной структурой, образованную множеством конгруэнтных групп магнетиков, каждой из которых соответствует ограниченная (в общем случае многосвязная) область  $D_{mn}\equiv\cup D_{mn}^j$  с достаточно гладкой границей  $S_{mn}\equiv\cup S_{mn}^j (j=1, 2, \dots, k; m, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ . Область  $D_{00}$ , соответствующую основному параллелограмму  $\Omega$  с периодами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , обозначим для удобства через  $D$ . Соответственно  $S_{00}\equiv S$  и  $\bar{D}\equiv D\cup S$ . Внешнюю по отношению к магнетикам область обозначим через  $D_e\equiv E/D_{mn}$ .

Пусть  $B^j=B^j(H, z)$  – известная функция, задающая в общем случае неоднородные, нелинейные и анизотропные свойства множества конгруэнтных элементов  $j, z\in D_{mn}$ . Если же  $z\in D_e$ , то  $B=\mu_0 H$ .

Рассмотрим систему диполей с одинаковыми моментами  $M$ , расположенных в точках  $\xi\equiv\xi\text{mod}(\omega_1, \omega_2)$ . Их комплексный потенциал и напряженность поля [2]

$$W_M(z)=\frac{M}{2\pi}\cdot\zeta(z-\xi)+C(z-\xi), \quad (2)$$

$$H_M(z)=-\bar{W}'_M(z)=-\frac{\bar{M}}{2\pi}\cdot\overline{\zeta'(z-\xi)}-\bar{C}=\frac{\bar{M}}{2\pi}\cdot\overline{\wp(z-\xi)}-\bar{C}, \quad (3)$$

где  $\zeta(z-\xi)=\zeta(u), \wp(z-\xi)=\wp(u)$  – функции Вейерштрасса, а черта над комплексным числом означает операцию сопряжения.

Без ограничения общности совместим период  $\omega_1$  с осью  $x$  и примем  $\text{Im}\omega_1=0$ . Учитывая соотношение Лежандра

$$\eta_1\cdot\omega_2-\eta_2\cdot\omega_1=2\pi j,$$

для константы  $C$  получим выражения [2]

$$C=-\frac{1}{2\pi}\cdot\left(M_1\frac{\eta_1}{\omega_1}+M_2\frac{\eta_2}{\omega_2}\right)=\frac{j\cdot M_2}{\omega_1\cdot\omega_2}-\frac{M}{2\pi}\cdot\frac{\eta_1}{\omega_1}=\frac{j\cdot\text{Im}M}{F_\Omega}-\frac{M}{2\pi}\cdot\frac{\eta_1}{\omega_1}, \quad (4)$$

где  $M_1, M_2$  – разложение вектора  $M$  по направлениям периодов  $\omega_1$  и  $\omega_2, F_\Omega=\omega_1\cdot\text{Im}\omega_2$  – площадь основного параллелограмма периодов  $\Omega$ .

Пусть  $J(z), z\in D$  – распределение намагниченности, возникающей под действием поля первичных источников  $H_0(z)$ . Совместное рассмотрение в области  $D$  действия первичных и вторичных источников (намагниченности всех магнетиков в  $E$ ) приводит к выражениям для комплексного потенциала и напряженности:

$$W(z) = W_0(z) + W_J(z) = W_0(z) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} J(\xi) \cdot [\zeta(z-\xi) - \frac{\eta_1}{\omega_1} \cdot (z-\xi)] \cdot d\tau_{\xi} + \frac{j}{F_{\Omega}} \int_{\Omega} \text{Im} J(\xi) \cdot (z-\xi) \cdot d\tau_{\xi}, \quad (5)$$

$$H(z) = H_0(z) + H_J(z) = H_0(z) + \frac{1}{2\pi} \times \int_{\Omega} \bar{J}(\xi) \cdot \left[ \overline{\varphi(z-\xi) + \frac{\eta_1}{\omega_1}} \right] d\tau_{\xi} + \frac{j \cdot \text{Im} P}{F_{\Omega}}, \quad (6)$$

где  $P$  – полный дипольный момент основного параллелограмма  $\Omega$ . Интеграл в (6) – сингулярный.

Рассмотрим более подробно линейный случай:  $B^i = \mu_a^i \cdot H = \mu_0 \mu^i \cdot H$ ,  $B_e = \mu_0 \cdot H$  для  $z \in D$  и  $z \in D_e$  соответственно. В этом случае вне области  $D$   $J(z) = 0$  и задача расчета характеристик поля в произвольной точке ГС сводится к расчету распределения вектора намагниченности  $J(z)$  в  $D$ .

Введем в рассмотрение важный для последующего интегральный оператор [2]

$$\Pi_{\omega} J = -\frac{1}{\pi} \int_D J(\xi) \cdot \left[ \overline{\varphi(z-\xi) + \frac{\eta_1}{\omega_1}} \right] d\tau_{\xi} + \frac{2j \cdot \text{Im} P}{F_{\Omega}}. \quad (7)$$

Обозначим  $\tilde{B} = \mu_0^{-1} B$  и рассмотрим цепочку равенств:

$$J = \tilde{B} - H = (\mu - 1) \cdot H; \quad \tilde{B}_J + H_J = \overline{\Pi_{\omega} J}; \quad \tilde{B} + H = (\mu + 1)H = 2H_0 + \tilde{B}_J + H_J = 2H_0 - \overline{\Pi_{\omega} J}. \quad (8)$$

Из соотношений (7) и (8) легко получить интегральное уравнение относительно вектора намагниченности среды  $J(z)$ ,  $z \in D$ :

$$J(z) = \lambda \cdot (2H_0(z) - \overline{\Pi_{\omega} J}) = \lambda \left\{ 2H_0(z) + \frac{1}{\pi} \int_D \bar{J}(\xi) \cdot \left[ \overline{\varphi(z-\xi) + \frac{\eta_1}{\omega_1}} \right] d\tau_{\xi} + \frac{2j \cdot \text{Im} P}{F_{\Omega}} \right\}, \quad (9)$$

где  $\lambda = (\mu - 1) / (\mu + 1)$ .

Приведем еще одно выражение для сингулярного оператора  $\Pi_{\omega} J$ . Обозначая через  $\sigma_{\varepsilon}$  круг малого радиуса  $\varepsilon$ , а через  $D_{\varepsilon} = D \setminus \sigma_{\varepsilon}$  – область  $D$  с выколотой точкой  $z = \xi$ , выражение (7) преобразуем к виду

$$\Pi_{\omega} J = -\frac{1}{\pi} \int_{D_{\varepsilon}} J(\xi) \cdot \partial_{\xi} \left[ \zeta(z-\xi) - \frac{\eta_1}{\omega_1} (z-\xi) \right] d\tau_{\xi} + \frac{2j \cdot \text{Im} P}{F_{\Omega}} = -\frac{1}{\pi} \int_{D_{\varepsilon}} \partial_{\xi} \left\{ J(\xi) \cdot \left[ \zeta(z-\xi) - \frac{\eta_1}{\omega_1} (z-\xi) \right] \right\} d\tau_{\xi} - \frac{1}{\pi} \int_{D_{\varepsilon}} \partial_{\xi} J \left[ \zeta(z-\xi) - \frac{\eta_1}{\omega_1} (z-\xi) \right] d\tau_{\xi} + \frac{2j \cdot \text{Im} P}{F_{\Omega}}. \quad (10)$$

Легко установить, что

$$P = \int_D J(\xi) \cdot d\tau_{\xi} = \int_D \{ \partial_{\xi} [\xi \cdot J(\xi)] - \xi \cdot \partial_{\xi} J \} \cdot d\tau_{\xi}. \quad (11)$$

Применяя к выражениям (10), (11) формулу Грина в предположении дифференцируемости функции  $f$

$$\int_{D_{\varepsilon}} \partial_{\xi} f \cdot d\tau_{\xi} = -\frac{1}{2j} \int_S f(\xi) \cdot d\bar{\xi} + \frac{1}{2j} \int_{|\zeta-\xi|=\varepsilon} f(\xi) \cdot d\bar{\xi} \quad (12)$$

и учитывая, что интеграл (12) по окружности достаточно малого радиуса  $\varepsilon$  равен нулю, находим:

$$P = \int_D J(\xi) \cdot d\tau_{\xi} = \int_D \{ \partial_{\xi} [\xi \cdot J(\xi)] - \xi \cdot \partial_{\xi} J \} \cdot d\tau_{\xi} = -\frac{1}{2j} \int_S \xi \cdot J(\xi) \cdot d\bar{\xi} - \int_D \xi \cdot \partial_{\xi} J \cdot d\tau_{\xi}.$$

Здесь  $S$  – граница области  $D$  (в общем случае многосвязная). При  $\lambda(z) = \text{const}$   $\partial_{\xi} J = 0$ , поэтому сингулярный оператор  $\Pi_{\omega} J$  выражается через поверхностный (граничный) интеграл

$$\Pi_{\omega} J = \frac{1}{2\pi j} \int_S J(\xi) \cdot \left[ \zeta(z-\xi) - \frac{\eta_1}{\omega_1} (z-\xi) \right] \cdot d\bar{\xi} - \frac{1}{F_{\Omega}} \cdot \text{Re} \left[ \int_S \xi \cdot J(\xi) \cdot d\bar{\xi} \right]. \quad (13)$$

**Реализация основных соотношений.** Рассмотрим теперь вопросы практической реализации полученных выражений. Представим область  $D$  совокупностью треугольных элементов  $D \equiv \cup D^k$  с постоянной намагниченностью  $J^k$ , соответствующей центру тяжести  $\xi^k$  треугольника  $D^k$ . В этом случае решение  $J(z) \equiv \cup J^k(z)$  можно получить методом простых итераций для уравнения

$$J_i^m \equiv J_i(z^m) = 2\lambda \cdot H_0^m + \frac{\lambda}{\pi} \cdot \sum_k \int_{D^k} \overline{J_{i-1}(\xi^k)} \times \left[ \overline{\varphi(z^m - \xi) + \frac{\eta_1}{\omega_1}} \right] \cdot d\tau_k + \frac{2j \cdot \lambda}{F_{\Omega}} \cdot \text{Im} \sum_k \int_{D^k} \overline{J_{i-1}(\xi^k)} \cdot d\tau_k. \quad (14)$$

$(m = 1, 2, 3, \dots, M; i = 1, 2, 3, \dots)$ .

Если рассматривать намагниченные области  $D^k$  как диполи с магнитными моментами  $M^k = J^k \cdot \Delta \tau_k$ , расположенными в точках  $\xi^k$ , то (14) значительно упрощается:

$$J_i^m = 2\lambda \cdot H_0^m + \frac{\lambda}{\pi} \cdot \sum_k \int_{D^k} \overline{A_m^k} \cdot \overline{J_{i-1}^k} \cdot \Delta \tau_k + \frac{2j \cdot \lambda}{F_{\Omega}} \cdot \text{Im} \sum_k \int_{D^k} \overline{J_{i-1}^k} \cdot \Delta \tau_k, \quad (15)$$

где  $A_{mk} = \overline{\varphi(z^m - \xi^k) + \eta_1 / \omega_1}$ .

Вычисление значений  $A_{mk}$  можно выполнять с использованием формул [15]

$$\varphi(u) + \frac{\eta_1}{\omega_1} = -\frac{4\pi^2}{\alpha^2} \cdot \left\{ \frac{1}{(h-h^{-1})^2} + \sum_{r=1}^{\infty} \left[ \frac{q^{2r} \cdot h^{-2}}{(1-q^{2r} \cdot h^{-2})^2} + \frac{q^{2r} \cdot h^2}{(1-q^{2r} \cdot h^2)^2} \right] \right\}, \quad (16)$$

или при  $-\text{Im} \tau < \text{Im} \nu < \text{Im} \tau$

$$\varphi(u) + \frac{\eta_1}{\omega_1} = \frac{\pi^2}{\alpha^2 \cdot \sin^2(\pi \nu)} - \frac{8\pi^2}{\alpha^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}} \cos(2\pi \cdot n\nu), \quad (17)$$

где  $u \equiv u^{mk} = z^m - \xi^k$ ,  $q = \exp(j\pi \tau)$ ,  $\nu = u / \omega_1$ .

Для однородно намагниченных треугольников интегралы в (14) можно вычислить аналитически. Применяя для  $k$ -го треугольника выражение (13) и учитывая, что [15]

$$\zeta(u) - \frac{\eta_1}{\omega_1} u = \frac{d}{du} \ln \mathcal{A}(\nu, \tau) = -\frac{d}{d\xi} \ln \mathcal{A}(\nu, \tau), \quad (18)$$

получим



$$\begin{aligned} \Pi_{\omega} J &= \sum_k \frac{J^k}{2\pi j} \cdot \int_{S^k} \partial_{\xi} [\ln \mathcal{G}_1(z^m - \xi)] \cdot d\bar{\xi} - \\ &= \sum_k \frac{J^k}{2\pi j} \left[ a_{ijk} \ln \mathcal{G}_1(z^m - z^j) + a_{kij} \ln \mathcal{G}_1(z^m - z^i) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{F_{\Omega}} \sum_k \operatorname{Re} \left[ J^k \cdot \int_{S^k} \xi \cdot d\bar{\xi} \right] \right] = \\ &= \sum_k \frac{J^k}{2\pi j} \left[ a_{ijk} \ln \mathcal{G}_1(z^m - z^j) + a_{kij} \ln \mathcal{G}_1(z^m - z^i) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{F_{\Omega}} \sum_k \operatorname{Re} \left[ J^k \cdot \int_{S^k} \xi \cdot d\bar{\xi} \right] \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

В этом выражении  $S^k$  – граница  $k$ -го треугольника,  $z^i, z^j, z^k$  – комплексные координаты его вершин,  $a_{ki} = \frac{a_{ki} - a_{ij}}{z^i - z^j}$ ,  $a_{ijk} = a_{ij} - a_{jk}$ ,  $a_{jki} = a_{jk} - a_{ki}$ ,  $a_{mnn} = (z^n - z^m)/(z^n - z^m)$ ,  $m, n = i, j, k$ ;  $\mathcal{G}_1$  – тэта-функция, имеющая высокую скорость сходимости:

$$\mathcal{G}_1 = 2q^{1/4} \cdot [\sin(\pi\nu) - q^2 \sin(3 \cdot \pi\nu) + q^6 \sin(5 \cdot \pi\nu) - \dots].$$

Рассмотрим более подробно расчет комплексного потенциала (5) по известному распределению вектора намагниченности  $J(z)$  в  $D$ . В простейшем случае дискретный аналог этого уравнения по аналогии с (15) принимает вид

$$\begin{aligned} W(z) &= W_0(z) + \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_k J^k \cdot [\zeta(z - \xi^k) - \\ &= \frac{\eta_1}{\omega_1} (z - \xi^k)] \cdot \Delta\tau_k + \frac{j}{F_{\Omega}} \sum_k \operatorname{Im} J^k \cdot (z \cdot \Delta\tau_k - g_k), \end{aligned} \quad (20)$$

где для  $g_k$  с использованием формулы Грина получим

$$\begin{aligned} g_k &= \int_{D^k} \xi \cdot \Delta\tau_k = \frac{1}{2} \int_{D^k} \partial_{\xi} (\xi^2) \cdot \Delta\tau_k = \frac{j}{4} \int_{S^k} \xi^2 \cdot d\bar{\xi} = \\ &= \frac{j}{12} (z_i^3 \cdot a_{kij} + z_j^3 \cdot a_{ijk} + z_k^3 \cdot a_{jki}), \end{aligned}$$

а для  $\zeta(u) = (\eta_1/\omega_1) \cdot u$  можно использовать абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$\zeta(u) - \frac{\eta_1}{\omega_1} \cdot u = \frac{\pi j}{\omega_1} \cdot \left( \frac{h + h^{-1}}{h - h^{-1}} + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{q^{2n} \cdot h^{-2}}{1 - q^{2n} \cdot h^{-2}} - \frac{q^{2n} \cdot h^2}{1 - q^{2n} \cdot h^2} \right] \right), \quad (21)$$

или при  $-\operatorname{Im} \tau < \operatorname{Im} \nu < \operatorname{Im} \tau$

$$\zeta(u) - \frac{\eta_1}{\omega_1} \cdot u = \frac{\pi}{\omega_1} \cdot \left( \operatorname{ctq}(\pi\nu) + 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} \cdot \sin(2\pi n \cdot \nu) \right). \quad (22)$$

Более точное выражение для  $W(z)$  можно получить, переходя в (5) к интегралу по границе  $S^k$ . Используя (18) и (20), перепишем (5) в виде

$$\begin{aligned} W(z) &= W_0(z) - \frac{1}{2\pi} \sum_k J^k \int_{D^k} \partial_{\xi} [\ln \mathcal{G}_1(\nu, \tau)] \cdot d\tau_{\xi} + \\ &+ \frac{j}{F_{\Omega}} \sum_k \operatorname{Im} J^k (z \Delta\tau_k - g_k) = W_0(z) - \\ &- \frac{j}{4\pi} \sum_k J^k \int_{S^k} \ln \mathcal{G}_1(\nu, \tau) d\bar{\xi} + \frac{j}{F_{\Omega}} \sum_k \operatorname{Im} J^k (z \Delta\tau_k - g_k). \end{aligned} \quad (23)$$

Для вычисления интегралов в (23) используем известное разложение для тэта-функции

$$\begin{aligned} \ln \left( \pi \cdot \frac{\mathcal{G}_1(\nu, \tau)}{\mathcal{G}_1(0, \tau)} \right) &= \ln \sin(\pi\nu) + \\ &+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{n \cdot (1 - q^{2n})} [1 - \cos(2\pi n \cdot \nu)]. \end{aligned} \quad (24)$$

Учитывая, что в соответствии с (12)  $\int_{\Gamma} d\bar{\xi} \equiv 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_S \ln \mathcal{G}_1(\nu, \tau) \cdot d\bar{\xi} &= \int_S \ln \sin(\pi\nu) \cdot d\bar{\xi} - \\ &- 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_S a_n \cdot \cos(2\pi n \cdot \nu) \cdot d\bar{\xi}, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $a_n = q^{2n}/[n \cdot (1 - q^{2n})]$ .

Вычисления первого интеграла в (25) приводит к выражению

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{S^k} \ln \sin(\pi\nu) \cdot d\bar{\xi} = \int_{S^k} \ln \left[ \pi\nu \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{\nu^2}{n^2} \right) \right] \cdot d\bar{\xi} = \\ &= \int_{S^k} \ln(z - \xi) \cdot d\bar{\xi} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{S^k} \ln \left[ (z - \xi)^2 - (n \cdot \omega_1)^2 \right] \cdot d\bar{\xi} = \\ &= -a_{kij} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot [u_i \cdot (\ln u_i - 1) + u_{2i} \cdot (\ln u_{2i} - 1)] - \\ &- a_{ijk} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot [u_{1j} \cdot (\ln u_{1j} - 1) + u_{2j} \cdot (\ln u_{2j} - 1)] - \\ &- a_{jki} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot [u_{1k} \cdot (\ln u_{1k} - 1) + u_{2k} \cdot (\ln u_{2k} - 1)], \end{aligned} \quad (26)$$

где  $u_{1p} = z - n \cdot \omega_1 - z_p$ ,  $u_{2p} = z + n \cdot \omega_1 - z_p$ ,  $p = i, j, k$ ;  $b_n = 0, 5$  при  $n = 0$  и  $b_n = 1$  при  $n \neq 0$ .

Вычисление второго интеграла в (25) даёт:

$$\begin{aligned} I_2 &= -2 \int_{S^k} a_n \cdot \cos(2\pi \cdot n\nu) \cdot d\bar{\xi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cdot \omega_1}{\pi n} \times \\ &\times [a_{ijk} \sin(2\pi n\nu^j) + a_{kij} \sin(2\pi n\nu^i) + a_{jki} \sin(2\pi n\nu^k)], \end{aligned} \quad (27)$$

где  $\nu^j = (z - z^j)/\omega_1$ ,  $\nu^i = (z - z^i)/\omega_1$ ,  $\nu^k = (z - z^k)/\omega_1$ .

Следует иметь в виду, что логарифм есть многозначная функция, поэтому при интегрировании по границе  $S^k$  необходимо выбирать его непрерывные ветви.

**Примеры численной реализации.** Ниже приведены примеры численного моделирования, иллюстрирующие возможности изложенного метода. На рис. 4-8 показаны картины поля (силовые линии – синие, эквипотенциалы – красные) для трёхкомпонентной ГС с основными периодами  $\omega_1=8$ ,  $\omega_2=6j$ . Внешнее поле  $H_0$  однородно и направлено под различными углами относительно горизонтальной оси.

На рис. 5 при тех же параметрах, что и на рис. 4, выполнен расчет поля в эквивалентном параллелограмме периодов  $\Omega'$  с  $\omega'_1=8$ ,  $\omega'_2=-8+6j$ . Сравнение распределения поля на рис. 4 и рис. 5 подтверждает вывод о сохранении характеристик поля в конгруэнтных точках эквивалентных периодов. Свобода выбора из эквивалентных периодов более удобного для расчета и визуализации результатов в данном случае однозначно говорит в пользу рис. 4.

Выбор указанного на рис. 6 угла  $9,2535^\circ$  объясняется направлением внешнего поля  $H_0$  по направлению главной оси анизотропии гомогенизированной ГС (расчет – см. далее).

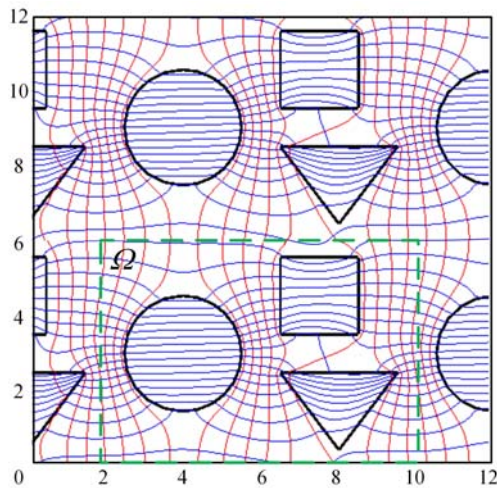


Рис. 4. Картина поля в трехкомпонентной ГС при относительных магнитных проницаемостях дискретных элементов  $\mu=1000$  и внешней среды  $\mu_e=1$ . Зеленым пунктиром выделен основной параллелограмм периодов. Внешнее поле  $H_0=1$

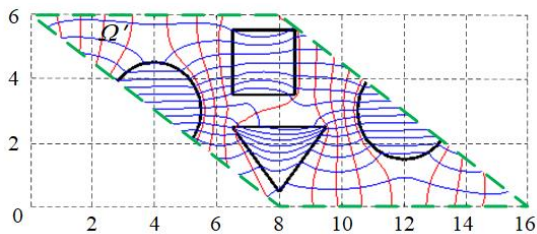


Рис. 5. Картина поля в эквивалентном основном периоде (выделен зеленым пунктиром) при параметрах ГС рис. 4

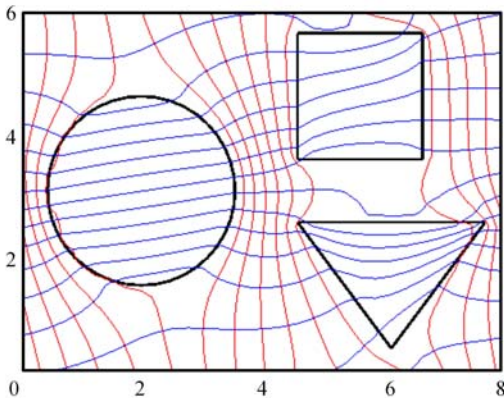


Рис. 6. То же, что на рис. 4, но внешнее поле  $H_0$  направлено под углом  $9,2535^\circ$  к оси  $x$

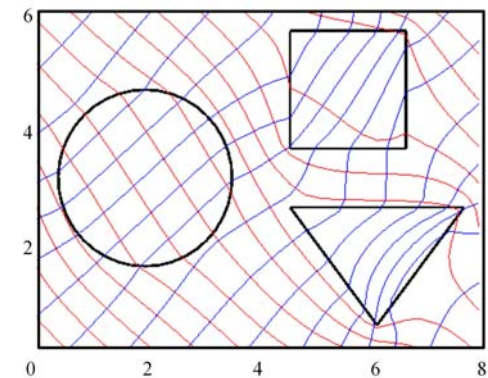


Рис. 7. Относительные магнитные проницаемости треугольных, квадратных и круглых стержней соответственно равны 1000, 10 и 2,  $\mu_e=1$ . Внешнее поле  $H_0$  направлено под углом  $45^\circ$  к оси  $x$

На рис. 8 и рис. 9 показаны результаты решения задачи обтекания: На рис. 8 приведены силовые линии потока, а на рис. 9 – распределение вектора намагниченности в магнитном листе с воздушными дискретными пустотами (см. рис. 8). В данном случае вместо (9) использовано уравнение

$$J(z) = 2H_0 \cdot \frac{\mu_i(\mu_e - 1)}{\mu_i + \mu_e} - \lambda \cdot \overline{\Pi_\omega} J, \quad \lambda = \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + \mu_e}.$$

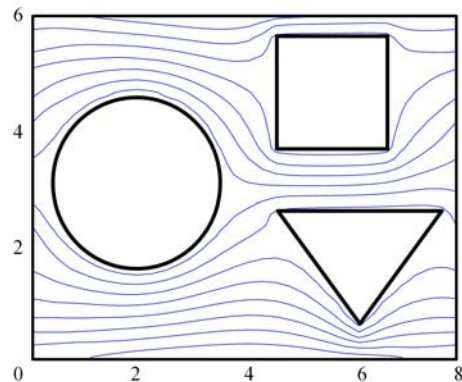


Рис. 8. Задача обтекания. Относительные магнитные проницаемости дискретных элементов  $\mu=1$ , внешней среды –  $\mu_e=1000$

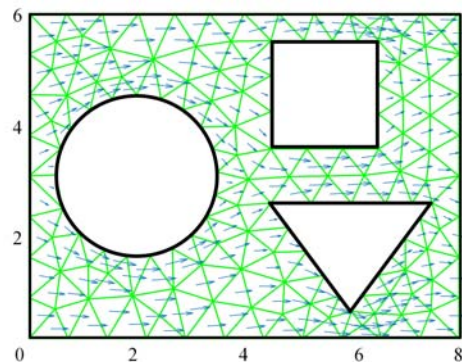


Рис. 9. Дискретизация расчетной области и распределение вектора намагниченности в задаче обтекания (рис. 8)

Следует обратить внимание на важную деталь: несмотря на простую форму основного параллелограмма периодов граничные условия на его сторонах априори не известны и не сводятся к обычно используемым в МКЭ условиям.

**Расчет эффективных параметров многокомпонентной ГС.** Поскольку изложенный выше метод основан на определении комплексного вектора намагниченности  $J$  в основном параллелограмме периодов, решение задачи гомогенизации не представляет существенных затруднений. Для этого следует рассчитать  $J(z)$ ,  $z \in \Omega$  для двух взаимноперпендикулярных внешних полей  $H_0$ , например, для  $H_0 = 1$  и  $H_0 = j$ . Обозначим суммарную намагниченность всех элементов в  $\Omega$  соответственно через  $\rho_x = \rho_{xx} + j\rho_{xy}$  и  $\rho_y = \rho_{yx} + j\rho_{yy}$ . Тогда тензор относительной магнитной восприимчивости  $\kappa$  легко определить через эффективную намагниченность среды: в векторных обозначениях  $J = \rho / F_\Omega = \kappa H_0$ . Очевидно,  $\kappa_{xx} = \rho_{xx} / F_\Omega$ ,  $\kappa_{xy} = \rho_{xy} / F_\Omega$ ,  $\kappa_{yx} = \rho_{yx} / F_\Omega$ ,  $\kappa_{yy} = \rho_{yy} / F_\Omega$ .

В общем случае для выбранной системы координат тензор  $\kappa$  должен быть симметричным, но не обя-

зательно диагональным. Для приведения его к диагональному тензору  $\tilde{\kappa}$  с главными значениями  $\tilde{\kappa}_{xx}, \tilde{\kappa}_{yy}$  ( $\tilde{\kappa}_{xy} = \tilde{\kappa}_{yx} = 0$ ) введём новую систему координат  $(x', y')$  поворотом старой на угол  $\alpha$ . Этот угол можно определить из выражения

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{2\kappa_{xy}}{\kappa_{xx} - \kappa_{yy}} \right), \quad (28)$$

а главные значения тензора  $\tilde{\kappa}$  – из соотношений

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_{xx} &= \frac{(\kappa_{xx} + \kappa_{yy}) + \sqrt{(\kappa_{xx} - \kappa_{yy})^2 + 4\kappa_{xy}^2}}{2}, \\ \tilde{\kappa}_{yy} &= \frac{(\kappa_{xx} + \kappa_{yy}) - \sqrt{(\kappa_{xx} - \kappa_{yy})^2 + 4\kappa_{xy}^2}}{2}. \end{aligned} \quad (29)$$

В соответствии с изложенным для среды с параметрами, соответствующими рис. 4, получены следующие результаты:

$$\kappa = \begin{bmatrix} 1,0054 & 0,0210 \\ 0,0211 & 0,8801 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\kappa} = \begin{bmatrix} 1,0088 & 0 \\ 0 & 0,8766 \end{bmatrix}, \quad \alpha = 9,2535^\circ.$$

Для компонентов тензора эффективной относительной магнитной проницаемости получим очевидные значения:  $\tilde{\mu}_{xx} = 2,0088$ ,  $\tilde{\mu}_{yy} = 1,8801$ .

Для подтверждения правильности расчетов на рис. 6 приведена картина поля, полученная при напряженности внешнего поля  $H_0 = 1$ , направленной под углом  $\alpha = 9,2535^\circ$  к оси  $x$  (т.е. вдоль главной оси анизотропии). Для эффективной намагнитченности среды получен достаточно точный результат:  $\rho = 1,0089 \cdot \exp(j \cdot 9,2561 \cdot \pi / 180)$ .

Для параметров ГС, соответствующей рис. 7, аналогичные результаты равны:

$$\kappa = \begin{bmatrix} 0,4462 & -0,0029 \\ -0,0025 & 0,5571 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\kappa} = \begin{bmatrix} 0,4461 & 0 \\ 0 & 0,5572 \end{bmatrix}, \quad \alpha = 1,4169^\circ.$$

Компоненты тензора эффективной относительной магнитной проницаемости:  $\tilde{\mu}_{xx} = 1,4461$ ,  $\tilde{\mu}_{yy} = 1,5572$ . Их уменьшение по сравнению с приведенными выше значениями объясняется уменьшением эффективной намагнитченности ГС за счет меньших значений магнитных проницаемостей дискретных фаз. Незначительная асимметрия тензора  $\kappa$  объясняется практически нулевыми его недиагональными компонентами.

**Расчет поля магнитных сил.** Для дополнительной иллюстрации возможностей разработанного метода приведем результаты расчета распределения силового поля  $F^* = |H| \operatorname{grad} |H| = 0,5 \operatorname{grad} (|H|^2)$ . Как видно из последнего выражения, силовое поле матрицы ВГМС полностью определяется распределением модуля вектора напряженности магнитного поля  $H$  в рабочем пространстве матрицы. В рамках разработанного метода это распределение легко получить на основе выражения (6) с использованием его дискретного аналога или соотношения  $H = -\operatorname{grad}(\operatorname{Re}W(z))$ .

Для определения силового поля  $F^*$  необходимо задать вектор напряженности внешнего (фоновое) поля  $H_0$  и размеры элементов матрицы. Например, для ГС, соответствующей рис. 4, при величине основного периода  $\omega_1 = 8$  мм (размеры элементов матрицы опреде-

ляются пропорциональным пересчетом и видны из рис. 4-9) и направлении внешнего поля  $H_0 = 5$  кА/м вдоль этого периода на рис. 10 изображены линии  $|H|^2 = \operatorname{const}$  и перпендикулярные им векторы магнитных сил  $F^*$ . Поскольку силовое поле матрицы отличается высокой неоднородностью, на рис. 10 приведен фрагмент области с наиболее интенсивным силовым полем. Площади зон захвата магнитных частиц определяются по известной величине минимальной силы извлечения  $|F^*|_{\min}$ , определение которой лежит за пределами рассмотрения данной статьи. Как отмечено выше, эта сила зависит от магнитной восприимчивости исходного продукта, размера извлекаемой фракции и др. технологических параметров. Например, при  $|F^*|_{\min} = |F|_{\min} / (\mu_0 \chi V) = 5,5 \cdot 10^9 \text{ A}^2/\text{M}^3$ , что примерно соответствует реальным значениям, изодины  $|F^*| = \operatorname{const}$  и зоны извлечения частиц приведены на рис. 11.

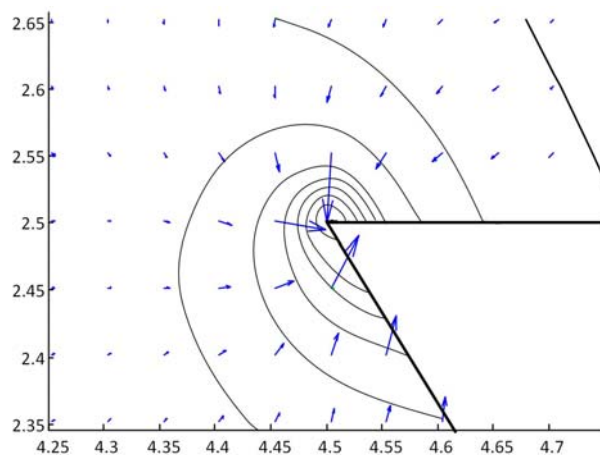


Рис. 10. Характеристики силового поля матрицы рис. 4 в угловой зоне треугольного элемента

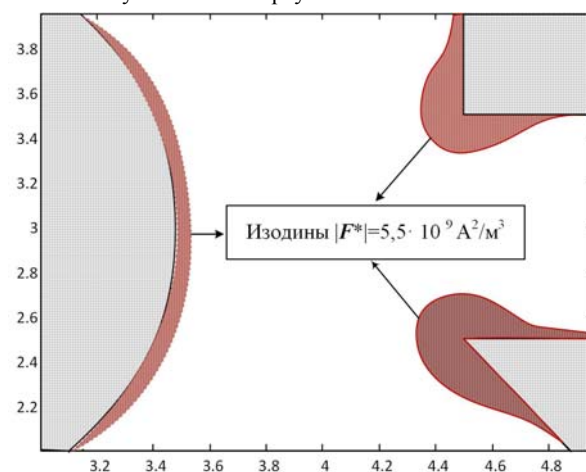


Рис. 11. Изодины  $|F^*| = \operatorname{const}$  и соответствующие им области извлечения силового поля при  $|F^*|_{\min} = 5,5 \cdot 10^9 \text{ A}^2/\text{M}^3$  для фрагмента рабочего пространства матрицы

Из приведенного анализа видно, что высокая неоднородность силового поля (даже в зоне извлечения силы могут отличаться на 2-3 порядка) является отрицательным фактором. Более предпочтительным является достаточное для извлечения поле с минимальным разбросом значений магнитных сил (в идеале – изо-



динамическое). Отметим также высокую чувствительность поля сил к величине напряженности  $H_0$  и размерам элементов фильтра. Это ставит под сомнение универсальность рекомендаций по определению оптимальных геометрических форм элементов матрицы без привязки к магнитной системе конкретного ВГМС и комплексного её исследования.

Полевой анализ силового поля в матрице можно продолжить в следующем направлении. Очевидно, что сформированные зоны извлечения уменьшают площадь и геометрию области свободного протекания пульпы. Гидравлическую проницаемость матрицы можно исследовать путем решения задачи обтекания (см. рис. 8) с видоизмененной за счет налипания частиц геометрией непроницаемых для жидкости областей.

Таким образом, полученная на основе разработанного метода информация может быть использована при разработке новых и модернизации существующих ВГМС в следующих направлениях:

- расчет значения тензора магнитной проницаемости (задача гомогенизации) дает возможность достаточно точно определить магнитное сопротивление матрицы как основного элемента магнитной системы сепаратора, и в результате расчета распределения магнитного потока в нем определить среднюю магнитную индукцию в матрице и расчетное значение напряженности поля  $H_0$ . Для рассмотренного примера  $\tilde{\mu}_{xx} \approx 2$  и  $H_0 = 5$  кА/м средняя магнитная индукция составляет  $B = 0,126$  Тл;

- при выбранных геометрических и магнитных параметрах элементов матрицы при известном значении напряженности  $H_0$  следует рассчитать поле магнитных сил  $|\mathbf{F}^*| \geq |\mathbf{F}^*|_{\min}$  (по примеру рис. 10), а для заданной величины минимальной удерживающей силы  $|\mathbf{F}^*|_{\min}$  – площади потенциальных зон извлечения и коэффициент заполнения рабочего пространства (рис. 10). При этом следует иметь в виду, что удельное магнитное сопротивление матрицы не зависит от абсолютных размеров ее элементов и напряженности внешнего поля. В то же время магнитные силы  $|\mathbf{F}^*|$  пропорциональны  $|H_0|^2$  и обратно пропорциональны абсолютным размерам элементов. Из этого следует, что пересчет силового поля в этих случаях производить не следует, поскольку картина изодин  $|\mathbf{F}^*| = \text{const}$  остается неизменной, изменяются лишь значения их величин;

- рассчитанная конфигурация непроницаемых для жидкости областей дает возможность оценить гидравлическую проницаемость пульпы и принять решение об изменении силового поля  $\mathbf{F}^*$  в ту или иную сторону;

- варьируя геометрические размеры и формы элементов матрицы и проводя серию соответствующих вычислительных экспериментов можно оптимизировать магнитную систему ВГМС в целом при заданных технологических ограничениях.

Таким образом, использование предлагаемого метода позволит создать дополнительные возможности повышения технических характеристик электрофизических устройств с элементами ГС, например, высокоградиентных магнитных сепараторов, электростатических фильтров и др. конструкций, для которых универсальность и точность расчета эффективных и особенно локальных характеристик поля являются определяющими.

## Выводы.

1. Разработан универсальный метод расчета локальных и эффективных характеристик магнитного поля многокомпонентной гетерогенной среды с двоякопериодической структурой, который базируется на решении интегрального уравнения относительно вектора намагниченности элементов основного параллелограмма периодов.

2. Проведенные вычислительные эксперименты подтверждают высокую эффективность и точность предложенного метода. Его основными достоинствами является компактность расчетной области, отсутствие необходимости задания неизвестных граничных условий на сторонах параллелограмма периодов и жестких ограничений геометрию и количество компонентов гетерогенной среды.

3. Одной из эффективных областей применения разработанного метода является анализ силовых полей матриц высокоградиентных магнитных сепараторов. Возможность комплексного учета факторов, определяющих эффективные и локальные характеристики поля, открывает дополнительные возможности оптимизации параметров матрицы и улучшения массогабаритных и технологических характеристик сепаратора в целом.

4. Без существенных изменений метод может быть использован при анализе других потенциальных полей в двоякопериодических системах (конструирование электростатических фильтров, задачи обтекания решеток сложного профиля и др.).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Емец Ю.П. Электрические характеристики композитных материалов с регулярной структурой. – Киев: Наукова думка, 1986. – 191 с.
2. Толмачев С.Т. Специальные методы решения задач магнитостатики. – Киев: Вища школа, 1983. – 166 с.
3. Kowalczyk P., Bielski W., Idzik A. Effective conductivity in two-dimensional two-component structures: macroscopic isotropy // *Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High-Energy Physics Experiments*. – 2014. – Т. 9290. – P. 92901A. doi: 10.1117/12.2075144.
4. Earhart C.M., Nguyen E.M., Wilson R.J., Wang Y.A., Wang S.X. Designs for a microfabricated magnetic sifter // *IEEE Transactions on Magnetics*. – 2009. – vol. 45. – no. 10. – pp. 4884-4887. doi: 10.1109/tmag.2009.2026486.
5. Ge W., Encinas A., Araujo E., Song Sh. Magnetic matrices used in high gradient magnetic separation (HGMS): A review // *Results in Physics*. – 2017. – vol. 7. – pp. 4278-4286. doi: 10.1016/j.rinp.2017.10.055.
6. Oder R. High gradient magnetic separation theory and applications // *IEEE Transactions on Magnetics*. – 1976. – vol. 12. – iss. 5. – pp. 428-435. doi: 10.1109/TMAG.1976.1059076.
7. Svoboda J. *Magnetic Techniques for the Treatment of Materials*. – Kluwer Academic Publishers, 2004. – 642 p. doi: 10.1007/1-4020-2107-0.
8. Ren L., Zeng S., Zhang Y. Magnetic field characteristics analysis of a single assembled magnetic medium using ANSYS software // *International Journal of Mining Science and Technology*. – 2015. – vol. 25. – no. 3. – pp. 479-487. doi: 10.1016/j.ijmst.2015.03.024.
9. Song C.C., Ning G.H., Yuan Z.Y., Jing L.X., Hui C.C., Yao M.S. Investigation of the influence of different matrix rotation angles on the surrounding magnetic field in a uniform magnetic field // *Ming Metall Eng*. – 2014. – no. 34. – pp. 290-294.
10. Gerlici J., Шведчикова І.О., Романченко Ю.А., Нікітченко І.В. Визначення раціональних геометричних параметрів

пластинчастих елементів магнітної матриці поліградієнтного сепаратора // *Електротехніка і електромеханіка*. – 2018. – № 4. – С. 58-62. doi: [10.20998/2074-272X.2018.4.10](https://doi.org/10.20998/2074-272X.2018.4.10).

11. Hou L.S., Geng L. A kind of high gradient magnetic matrix for high-intensity magnetic separator, CN. Patent. – 2012.

12. Zheng X., Wang Y., Lu D., Li X. Study on the application of elliptic cross-section matrices for axial high gradient magnetic separation: key considerations for optimization // *Physico-chemical Problems of Mineral Processing*. – 2019. – vol. 55(3). – pp. 655-666. doi: [10.5277/ppmp18178](https://doi.org/10.5277/ppmp18178).

13. Ding L., Chen L.Z., Zeng J.W. Investigation of combination of variable diameter rod elements in rod matrix on high gradient magnetic separation performance // *Advanced Materials Research*. – 2014. – vol. 1030-1032. – pp. 1193-1196. doi: [10.4028/www.scientific.net/amr.1030-1032.1193](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amr.1030-1032.1193).

14. Толмачев С.Т., Рожненко Ж.Г. Комплексное решение задачи магнитостатики в системе с упорядоченной гетерогенной средой // *Вестник НТУ «ХПИ»*. – 2008. – № 40. – С. 139-145.

15. Hurwitz A., Courant R. *Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*. – J. Springer, 1922. – 399 p.

16. Толмачев С.Т., Бондаревский С.Л. Классификация гетерогенных структур и условие их двоякопериодичности // *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. – 2013. – Т. 5. – № 5(65). – С. 24-29.

#### REFERENCES

1. Yemets Y.P. *Elektricheskie karakteristiki kompozitsionnih materialov s regulirnoy strukturoy* [Electrical characteristics of regular structure composites]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1986. 191 p. (Rus).

2. Tolmachev S.T. *Specialnie metody resheniya zadach magnetostatiki* [Special methods for solving magnetostatic problems]. Kyiv, Vyscha shkola Publ., 1983. 166 p. (Rus).

3. Kowalczyk P., Bielski W., Idzik A. Effective conductivity in two-dimensional two-component structures: macroscopic isotropy. *Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High-Energy Physics Experiments*, 2014, T. 9290, P. 92901A. doi: [10.1117/12.2075144](https://doi.org/10.1117/12.2075144).

4. Earhart C.M., Nguyen E.M., Wilson R.J., Wang Y.A., Wang S.X. Designs for a microfabricated magnetic sifter. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2009, vol. 45, no. 10, pp. 4884-4887. doi: [10.1109/tmag.2009.2026486](https://doi.org/10.1109/tmag.2009.2026486).

5. Ge W., Encinas A., Araujo E., Song S. Magnetic matrices used in high gradient magnetic separation (HGMS): A review. *Results in Physics*, 2017, vol. 7, pp. 4278-4286. doi: [10.1016/j.rinp.2017.10.055](https://doi.org/10.1016/j.rinp.2017.10.055).

6. Oder R. High gradient magnetic separation theory and applications. *IEEE Transactions on Magnetics*, 1976, vol. 12, iss. 5, pp. 428-435. doi: [10.1109/TMAG.1976.1059076](https://doi.org/10.1109/TMAG.1976.1059076).

7. Svoboda J. *Magnetic Techniques for the Treatment of Materials*. Kluwer Academic Publ., 2004. 642 p. doi: [10.1007/1-4020-2107-0](https://doi.org/10.1007/1-4020-2107-0).

8. Ren L., Zeng S., Zhang Y. Magnetic field characteristics analysis of a single assembled magnetic medium using ANSYS software. *International Journal of Mining Science and Technology*, 2015, vol. 25, no. 3, pp. 479-487. doi: [10.1016/j.ijmst.2015.03.024](https://doi.org/10.1016/j.ijmst.2015.03.024).

9. Song C.C., Ning G.H., Yuan Z.Y., Jing L.X., Hui C.C., Yao M.S. Investigation of the influence of different matrix rotation angles on the surrounding magnetic field in a uniform magnetic field. *Ming Metall Eng*, 2014, no. 34, pp. 290-294.

10. Gerlici J., Shvedchykova I.O., Romanchenko J.A., Nikitchenko I.V. Determination of the rational geometrical parameters of plate type elements of magnetic matrix of the poly-gradient separator. *Electrical engineering & electromechanics*, 2018, no.4, pp. 58-62. doi: [10.20998/2074-272X.2018.4.10](https://doi.org/10.20998/2074-272X.2018.4.10).

11. Hou L.S., Geng L. A kind of high gradient magnetic matrix for high-intensity magnetic separator, CN. Patent, 2012.

12. Zheng X., Wang Y., Lu D., Li X. Study on the application of elliptic cross-section matrices for axial high gradient magnetic separation: key considerations for optimization. *Physico-*

*chemical Problems of Mineral Processing*, 2019, vol. 55(3), pp. 655-666. doi: [10.5277/ppmp18178](https://doi.org/10.5277/ppmp18178).

13. Ding L., Chen L.Z., Zeng J.W. Investigation of combination of variable diameter rod elements in rod matrix on high gradient magnetic separation performance. *Advanced Materials Research*, 2014, vol. 1030-1032, pp. 1193-1196. doi: [10.4028/www.scientific.net/amr.1030-1032.1193](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amr.1030-1032.1193).

14. Tolmachev S.T., Rozhnenko Z.G. Complex solve of a magnetostatic problem in systems with ordered heterogeneous medium. *Bulletin of NTU «KhPI»*, 2008, no. 40, pp. 139-145. (Rus).

15. Hurwitz A., Courant R. *Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*. J. Springer, 1922. 399 p. (Ger).

16. Tolmachev S.T., Bondarevskiy S.L. Classification of heterogeneous structures and conditions of their doubly periodicity. *Eastern-European journal of enterprise technologies*, 2013, vol. 5, no. 5(65), pp. 24-29. (Rus).

Поступила (received) 20.08.2019

Толмачев Станислав Трофимович<sup>1</sup>, д.т.н., проф.,  
Бондаревский Станислав Львович<sup>1</sup>, к.т.н., доц.,  
Ильченко Александр Владимирович<sup>1</sup>, к.т.н., доц.,  
<sup>1</sup>Криворожский национальный университет,  
50027, Днепропетровская обл.,  
Кривой Рог, ул. Виталия Матусевича, 11,  
e-mail: kafem.knu@gmail.com

S.T. Tolmachev<sup>1</sup>, S.L. Bondarevskiy<sup>1</sup>, A.V. Il'chenko<sup>1</sup>  
<sup>1</sup>Kryvyi Rih National University,  
11, Vitaly Matusevich Str., Kryvyi Rih, Dnipropetrovsk Region,  
50027, Ukraine.

#### Magnetic properties of multicomponent heterogeneous media with a doubly periodic structure.

*Heterogeneous media have a wide range of practical applications. Media with a doubly periodic structure (matrices of high-gradient magnetic separators, etc.) occupy an important place. Their study is usually based on experimental and approximate methods and is limited to simple two-phase systems. The development of universal and accurate methods of mathematical modelling of electrophysical processes in such environments is an urgent task. The aim of the paper is to develop a method for calculating local and effective parameters of a magnetostatic field with minimal restrictions on the number of phases, their geometry, concentration, and magnetic properties. Based on the theory of elliptic functions and secondary sources, an integral equation is formulated with respect to the magnetization vector of the elements of the main parallelogram of the periods. The calculated expressions for the complex potential, field strength, and components of the effective magnetic permeability tensor are obtained. The results of a series of computational experiments confirming the universality and effectiveness of the method are presented. As an example of a practical application, a detailed study of the field of the magnetic forces of the matrix is carried out: the lines of magnetic isodine and potential extraction areas for a complex version of the matrix are constructed. Within the framework of the developed method, the calculation of local and effective field characteristics is carried out by solving the field problem in the field of an arbitrary parallelogram of periods without specifying boundary conditions on its sides with a comprehensive consideration of significant interdependent factors. The practical value of the method is to create new opportunities for improving the technical characteristics of electrophysical devices for which the universality and accuracy of calculating local and effective field characteristics is decisive. An algorithm for optimizing the characteristics of the separator is proposed. References 16, figures 11.*

**Key words:** doubly periodic heterogeneous medium, integral equation, magnetization vector, strength field, homogenization problem, magnetic permeability tensor, polygradient separation, matrix, magnetic forces.