

С.Т. Толмачев, А.В. Ильченко

ПРИНЦИП ВЗАИМНОСТИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ БЕЗ ГИСТЕРЕЗИСА: ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА ПРИМЕНЕНИЯ

Розглянуто теоретичні та практичні аспекти побудови векторних матеріальних рівнянь нелінійних анізотропних середовищ. Показано, що існуючі методи обліку магнітних властивостей навіть в безгістерезисному наближенні не завжди задовольняють вимогам повноти й математичної строгості. Підтверджено ефективність енергетичного підходу до побудови векторних характеристик магнітного стану таких середовищ. Особливу увагу приділено принципу взаємності як фундаментальній властивості оборотних процесів намагнічування. Встановлено нові асимптотичні вирази для принципу взаємності і на численних прикладах показана їх ефективність при побудові векторної моделі магнітного середовища без використання енергетичного потенціалу. Бібл. 12, рис. 5.

Ключові слова: нелінійне анізотропне середовище, векторні характеристики намагнічування, енергетичний потенціал, принцип взаємності, асимптотичні вирази, тензор магнітної проникності.

Рассмотрены теоретические и практические аспекты построения векторных материальных уравнений нелинейных анизотропных сред. Показано, что используемые методы учета магнитных свойств даже в безгистерезисном приближении не всегда удовлетворяют требованиям полноты и математической строгости. Подтверждена эффективность энергетического подхода к построению векторных характеристик магнитного состояния таких сред. Особое внимание уделено принципу взаимности как фундаментальному свойству обратимых процессов намагничивания. Установлены новые асимптотические выражения для принципа взаимности и на численных примерах показана их эффективность при построении векторной модели магнитной среды без использования энергетического потенциала. Библ. 12, рис. 5.

Ключевые слова: нелинейная анизотропная среда, векторные характеристики намагничивания, энергетический потенциал, принцип взаимности, асимптотические выражения, тензор магнитной проницаемости.

Введение. Успехи в области информационных технологий в последние десятилетия стимулировали разработку методов математического моделирования магнитных полей в разнообразных электрофизических устройствах [1-7]. Одним из важных этапов практической реализации задач в полевой постановке является формирование материальных уравнений магнитной среды, которая в большинстве случаев обладает нелинейной анизотропией. Полнота учета магнитных свойств такой среды требует построения векторной характеристики $\mathbf{B}(\mathbf{H})$. Построение векторных моделей на основе скалярных зависимостей $B_i(H_i)$ для главных осей анизотропии [3, 4], учет магнитной анизотропии в рамках «эллиптических моделей» [4, 5] и другие упрощенные подходы являются скорее вынужденным, чем конструктивным решением и, как показано в [8], неизбежно приводят к потере информации и практически неконтролируемой погрешности вычислений.

Определенный прогресс при учете нелинейной анизотропии векторных моделей $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ в безгістерезисном приближении связан с энергетическим подходом [1, 6-10]. Базовым соотношением этого подхода является выражение [11]

$$\oint_{L_H} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{H} = 0, \quad (1)$$

где L_H – произвольный замкнутый контур в \mathbf{H} -пространстве, т.е. в пространстве, по осям которого откладываются величины H_1 и H_2 и который по сути является годографом вектора \mathbf{H} при произвольном циклическом перемагничивании среды. При таком определении \mathbf{H} -пространства соотношение (1) формально совпадает с классическим условием потенциальности, поскольку выражение под знаком интеграла является полным дифференциалом потенциала $\Psi(\mathbf{H})$.

Приведенное выше определение \mathbf{H} -пространства свидетельствует о независимости потенциала $\Psi(\mathbf{H})$ от пути интегрирования в \mathbf{H} -пространстве, о безвихревом характере поля магнитной индукции \mathbf{B} , которая является силовым вектором поля в этом пространстве:

$$\mathbf{B} = -\frac{d\Psi}{d\mathbf{H}} = \text{grad}_{\mathbf{H}} \Psi(\mathbf{H}) = i_1 B_1(H_1, H_2) + i_2 B_2(H_1, H_2). \quad (2)$$

Дополнительно отметим важное следствие соотношений (1) и (2) – симметрию тензора дифференциальной магнитной проницаемости $\mu_d(\mathbf{H})$:

$$\mu_d = \frac{d\mathbf{B}}{d\mathbf{H}}; \quad \mu_{dij} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial H_i \cdot \partial H_j} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial H_j \cdot \partial H_i} = \mu_{dji}. \quad (3)$$

В формулах (2), (3) приняты обозначения, связанные с используемыми в векторной алгебре понятиями производной скалярной и векторной функции по векторному аргументу [12, пп. 6.2, 6.3].

Энергетические потенциалы не могут быть изменены непосредственно, поэтому их конструирование является непростой задачей даже в двумерном случае [7]. Базовой информацией для построения потенциала является некоторый набор экспериментально измеренных характеристик намагничивания, которые используются либо путем их непосредственного интегрирования, либо путем подбора коэффициентов некоторой аналитической зависимости [7, 8]. Оставляя за пределами этой статьи известные проблемы с точностью измерения магнитных характеристик анизотропных материалов, отметим очевидные проблемы с численным дифференцированием потенциала $\Psi(\mathbf{H})$: непосредственным – для получения векторной зависимости $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ и повторным – для тензора дифференциальной магнитной проницаемости $\mu_d(\mathbf{H})$.

Альтернативным способом определения характеристик намагничивания во взаимно ортогональных

© С.Т. Толмачев, А.В. Ильченко

направлениях без явного определения потенциала $\Psi(\mathbf{H})$ является принцип взаимности, впервые сформулированный в [9] и развитый в ряде последующих публикаций (см., например, [8, 10]). Принцип взаимности является фундаментальным свойством анизотропной среды без гистерезиса и основан на независимости потенциала $\Psi(\mathbf{H})$ от пути интегрирования в \mathbf{H} -пространстве.

Пусть $H_1' \leq H_1 \leq H_1''$ и $H_2' \leq H_2 \leq H_2''$. Из выражения (1) вытекает равенство интегралов S_1 и S_2 :

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{H_1'}^{H_1''} [B_1(H_1, H_2') - B_1(H_1, H_2'')] \cdot dH_1; \\ S_2 &= \int_{H_2'}^{H_2''} [B_2(H_1', H_2) - B_2(H_1'', H_2)] \cdot dH_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Энергетические соотношения (4) имеют простой геометрический смысл: площади соответствующих криволинейных четырехугольников S_1 и S_2 одинаковы. Визуально соотношения (4) при $H_1' = H_2' = 0$ и $H_1'' = H_1^*$, $H_2'' = H_2^*$ представлены на рис. 1.

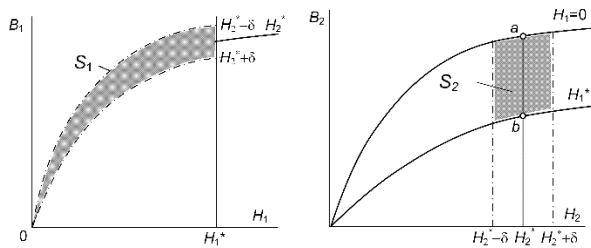


Рис. 1. Геометрический смысл принципа взаимности

В практическом отношении важность принципа взаимности состоит в возможности построения векторной характеристики намагничивания $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ по частично заданной информации о магнитных свойствах нелинейной анизотропной среды.

Целью настоящей статьи является дальнейшее обобщение принципа взаимности (4), в частности, получение его асимптотических выражений и использование их для оптимизации вычислительного процесса при построении векторной характеристики $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ и тензора дифференциальной магнитной проницаемости $\mu_d(\mathbf{H})$. Как известно, именно эта информация о магнитных свойствах среды используется в различных вычислительных схемах.

Асимптотические выражения для принципа взаимности.

А. Случай декартовых координат. Запишем соотношения (4) применительно к рис. 1:

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{H_1^*} [B_1(H_1, H_2^* + \delta) - B_1(H_1, H_2^* - \delta)] \cdot dH_1; \\ S_2 &= \int_{H_2^* - \delta}^{H_2^* + \delta} [B_2(0, H_2) - B_2(H_1^*, H_2)] \cdot dH_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку соотношения (5) справедливы для произвольных значений δ , рассмотрим предельные

выражения для интегралов $R_1^* = R_2^*$:

$$\begin{aligned} R_1^* &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{H_1^*} \frac{1}{2\delta} [B_1(H_1, H_2^* + \delta) - B_1(H_1, H_2^* - \delta)] \cdot dH_1; \\ R_2^* &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{H_2^* - \delta}^{H_2^* + \delta} \frac{1}{2\delta} [B_2(0, H_2) - B_2(H_1^*, H_2)] \cdot dH_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Для малых значений δ подынтегральное выражение в первом интеграле (6) можно выразить через дифференциальную магнитную проницаемость μ_{d12} :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} [\Delta B_1(H_1, H_2^*) / \Delta H_2] \approx \mu_{d12}(H_1, H_2^*),$$

поэтому интеграл R_1^* превращается в криволинейный и принимает вид

$$R_1^* = \int_0^{H_1^*} \mu_{d12}(H_1, H_2^*) \cdot dH_1. \quad (7)$$

Что же касается интеграла R_2^* , то как видно из рис. 1, при $\delta \rightarrow 0$ площадь S_2 вырождается в линию ab , которой соответствует приращение составляющей индукции B_2 при $H_2 = H_2^*$ и $0 \leq H_1 \leq H_1^*$. Поэтому

$$R_2^* \rightarrow ab = \int_0^{H_1^*} \mu_{d12}(H_1, H_2^*) \cdot dH_1. \quad (8)$$

Очевидно, что при сжатии пределов интегрирования в точку получим установленную ранее соотношением (3) симметрию тензора дифференциальной магнитной проницаемости $\mu_d(\mathbf{H})$. Таким образом, принцип взаимности имеет три возможных представления: точечное (в каждой «точке» \mathbf{H}) – (3) и два интегральных – соответственно (4) и (7), (8).

Отметим важное практическое значение полученных асимптотических выражений. В [8] показано, что восстановление потенциала Ψ возможно по семейству характеристик намагничивания в одном направлении, например, $B_1(H_1, H_2)$ и одной ортогональной характеристике, например, $B_2(0, H_2)$. Как будет показано ниже, недостающий массив точек характеристик $B_2(H_1, H_2)$ можно получить без вычисления потенциала Ψ использованием выражения (8).

Заметим, что путем перестановки индексов можно получить аналогичные (7), (8) соотношения для других исходных данных, например, $B_2(H_1, H_2)$ и $B_1(H_1, 0)$:

$$R_2^* = \int_0^{H_2^*} \mu_{d21}(H_2, H_1^*) \cdot dH_2; \quad (9)$$

$$R_1^* \rightarrow cd = \int_0^{H_2^*} \mu_{d12}(H_2, H_1^*) \cdot dH_2, \quad (10)$$

причем $R_1^* = R_2^*$.

Б. Случай полярных координат. Соотношения (1), (2) инвариантны относительно системы координат. Будем считать заданной (базовой) информацией семейство «продольных» характеристик намагничи-

вания $B_{\parallel}(H, \alpha)$, где B_{\parallel} – проекция вектора \mathbf{B} на вектор \mathbf{H} , а α – угол, определяющий направление вектора \mathbf{H} . Для вектора \mathbf{B} используем разложение $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\parallel}(H, \alpha) + \mathbf{B}_{\perp}(H, \alpha)$, где $\mathbf{B}_{\perp}(H, \alpha)$ – ортогональное к $\mathbf{B}_{\parallel}(H, \alpha)$ семейство характеристик «поперечного» намагничивания.

С учетом изложенного формула (2) принимает вид

$$\mathbf{B} = \frac{d\Psi}{d\mathbf{H}} = \text{grad}_{\mathbf{H}} \Psi(\mathbf{H}) = \mathbf{r}^0 \frac{\partial \Psi}{\partial H} + \boldsymbol{\alpha}^0 \frac{1}{H} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}, \quad (11)$$

где $\mathbf{r}^0, \boldsymbol{\alpha}^0$ – орты полярной системы координат.

Отметим возможность восстановления потенциала по заданному семейству характеристик $B_{\parallel}(H, \alpha)$. Так, принимая $\Psi(0) = 0$, для произвольной точки $\mathbf{H} = (H, \alpha^*)$ получим

$$\Psi(\mathbf{H}) = \int_0^H B_{\parallel}(H, \alpha) \cdot dH$$

$$\text{и } B_{\perp}(H, \alpha) = \frac{1}{H} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}.$$

Как и в случае декартовых координат, для расчета ортогональных характеристик $B_{\perp}(H, \alpha)$ без вычисления потенциала $\Psi(\mathbf{H})$ воспользуемся принципом взаимности. Пусть $H' \leq H \leq H''$ и $\alpha' \leq \alpha \leq \alpha''$. Имеет место равенство интегралов S_1 и S_2 :

$$S_1 = \int_{H'}^{H''} [B_{\parallel}(H, \alpha') - B_{\parallel}(H, \alpha'')] \cdot dH; \quad (12)$$

$$S_2 = \int_{\alpha'}^{\alpha''} [H' \cdot B_{\perp}(H', \alpha) - H'' \cdot B_{\perp}(H'', \alpha)] \cdot d\alpha.$$

Доказательство и иллюстрация соотношений (12) даны в [9]. Установим асимптотические свойства приведенного интегрального принципа взаимности, аналогичные соотношениям (9) и (10). Пусть заданы $\mathbf{H}^* = (H^*, \alpha^*)$ – некоторая точка в интервалах $H' \leq H^* \leq H''$, $\alpha' \leq \alpha^* \leq \alpha''$ и δ_{α} – отклонение угла α от этой точки. Тогда по аналогии с (5) для $H' = 0$ и $H'' = H^*$ (рис. 2)

$$S_1^* = \int_0^{H^*} [B_{\parallel}(H, \alpha^* + \delta_{\alpha}) - B_{\parallel}(H, \alpha^* - \delta_{\alpha})] \cdot dH; \quad (13)$$

$$S_2^* = \int_{\alpha^* - \delta_{\alpha}}^{\alpha^* + \delta_{\alpha}} -H^* \cdot B_{\perp}(H^*, \alpha) \cdot d\alpha.$$

Предельные выражения для этих соотношений

$$R_1^* = \lim_{\delta_{\alpha} \rightarrow 0} \int_0^{H^*} \frac{1}{2\delta_{\alpha}} [B_{\parallel}(H, \alpha^* + \delta_{\alpha}) - B_{\parallel}(H, \alpha^* - \delta_{\alpha})] \cdot dH; \quad (14)$$

$$R_2^* = \lim_{\delta_{\alpha} \rightarrow 0} \int_{\alpha^* - \delta_{\alpha}}^{\alpha^* + \delta_{\alpha}} \frac{-1}{2\delta_{\alpha}} H^* \cdot B_{\perp}(H^*, \alpha) \cdot d\alpha.$$

Первый интеграл в (14) можно выразить через дифференциальную магнитную проницаемость $\mu_{dH\alpha}$. Интеграл R_2^* , как видно из рис. 2, при $\delta_{\alpha} \rightarrow 0$ по аналогии с (7), (8) вырождается в линию cd :

$$R_1^* \rightarrow cd = \int_0^{H_1^*} \mu_{dH\alpha}(H, \alpha^*) \cdot dH. \quad (15)$$

Поскольку при $H = 0$ $H \cdot B_{\perp} = 0$ для всех α , значение отрезка cd определяет величину $H^* \cdot B_{\perp}(H^*)$ и, следовательно, $B_{\perp}(H^*)$. Аналогично можно рассчитать и остальные компоненты массива $B_{\perp}(\mathbf{H})$.

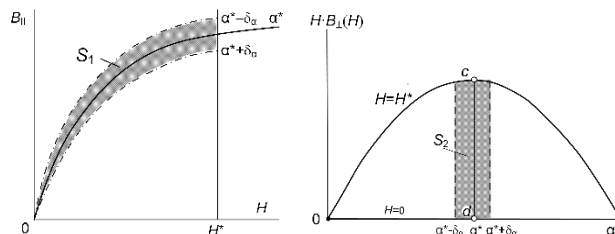


Рис. 2. Геометрический смысл принципа взаимности для полярных координат

Вычислительные эксперименты и обсуждение.

С целью исключения инструментальной погрешности и обеспечения максимальной точности и достоверности результатов используем точные характеристики намагничивания $B_1(H_1, H_2)$ и $B_2(H_1, H_2)$, полученные дифференцированием приведенного в [8] потенциала (рис. 3, a, b).

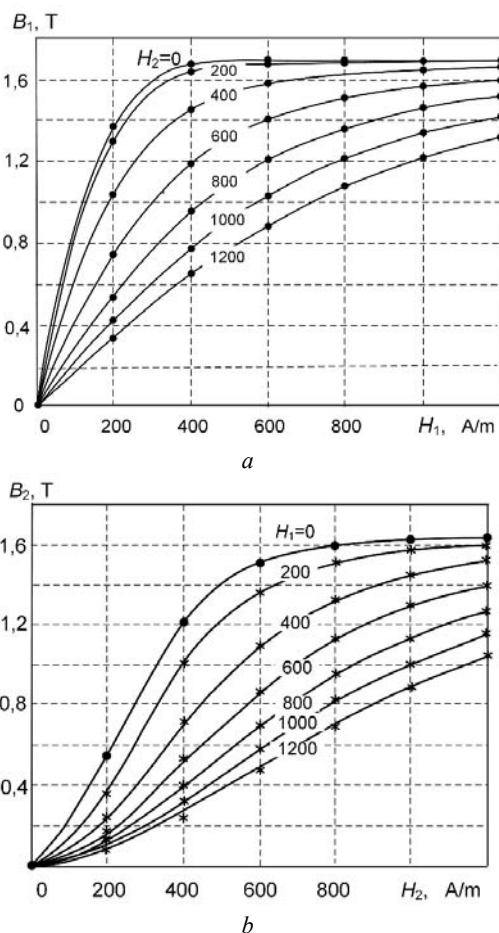


Рис. 3. Характеристики намагничивания нелинейной анизотропной среды, полученные дифференцированием потенциала [8]

Из принципа взаимности следует, что семейство характеристик $B_2(H_1, H_2)$ может быть рассчитано по

характеристикам $B_1(H_1, H_2)$ и одной из характеристик $B_2(H_1, H_2)$, например, $B_2(0, H_2)$. Эта информация отражена на рис. 3, *a, b* значками « \bullet » для узлов, в которых значения магнитной индукции будем считать известными. Значки « \ast » соответствуют расчетным значениям, полученным применением выражения (8) для недостающих узлов сетки. Из рис. 3, *b* видно практически полное совпадение с расчетными зависимостями $B_2(\mathbf{H})$ (сплошные линии).

Алгоритм «восполнения» информации о магнитных свойствах нелинейной анизотропной среды состоит в следующем. По известному массиву характеристик $B_1(\mathbf{H})$ дифференцированием получаем три компонента тензора $\mu_d(\mathbf{H})$: $\mu_{d11}(\mathbf{H}) = \partial B_1(\mathbf{H}) / \partial H_1$; $\mu_{d12}(\mathbf{H}) = \partial B_1(\mathbf{H}) / \partial H_2 = \mu_{d21}(\mathbf{H})$. Затем по выражению (8) находим соответствующие значения интегралов ab , вычитание которых из значений заданной характеристики $B_2(0, H_2)$ определяет семейство характеристик $B_2(\mathbf{H})$ и, наконец, $\mu_{d22}(\mathbf{H}) = \partial B_2(\mathbf{H}) / \partial H_2$.

Для подтверждения приведем некоторые численные примеры. Выберем два произвольных вектора напряженности \mathbf{H} , например, $\mathbf{H}^{(1)} = (450, 600)$ А/м и $\mathbf{H}^{(2)} = (1120, 375)$ А/м. Расчетные значения соответствующих векторов индукции $\mathbf{B}^{(1)} = (1.259, 1.005)$ Тл и $\mathbf{B}^{(2)} = (1.669, 0.275)$ Тл. Причем, если значения компонент B_1 (соответственно 1.259 Тл и 1.669 Тл) получены путем сплайн-интерполяции заданного массива узловых значений магнитной индукции $B_1(H_1, H_2)$ (см. рис. 3, *a*), то соответствующие значения компонент B_2 рассчитаны по приведенной выше методике без вычисления потенциала Ψ . Точные значения векторов магнитной индукции, полученные применением аналитических выражений из [8]: $\mathbf{B}^{(1)\ast} = (1.259, 1.022)$ Тл, $\mathbf{B}^{(2)\ast} = (1.670, 0.257)$ Тл. Углы рассогласования между векторами \mathbf{B} и \mathbf{H} соответственно равны 9.75° и 14.07° .

Приведем также расчетные и точные (\ast) значения тензоров дифференциальной абсолютной магнитной проницаемости для заданных значений $\mathbf{H}^{(1)}$ и $\mathbf{H}^{(2)}$:

- для $\mathbf{H} = \mathbf{H}^{(1)}$

$$\mu_d^{(1)} = \begin{vmatrix} \mu_{d11} & \mu_{d12} \\ \mu_{d21} & \mu_{d22} \end{vmatrix} = 10^{-3} \cdot \begin{vmatrix} 1.28247 & -1.25014 \\ -1.25014 & 1.54950 \end{vmatrix}$$

$$\mu_d^{(1)\ast} = 10^{-3} \cdot \begin{vmatrix} 1.26986 & -1.23883 \\ -1.23883 & 1.56906 \end{vmatrix}$$

- для $\mathbf{H} = \mathbf{H}^{(2)}$

$$\mu_d^{(2)} = 10^{-4} \cdot \begin{vmatrix} 0.53929 & -2.19504 \\ -2.19504 & 10.7357 \end{vmatrix}$$

$$\mu_d^{(2)\ast} = 10^{-4} \cdot \begin{vmatrix} 0.53756 & -2.21087 \\ -2.21087 & 11.2446 \end{vmatrix}$$

Заметим, что приведенные значения тензоров $\mu_d(\mathbf{H})$ являются локальными, поэтому из того факта, что для выбранных значений векторов напряженности поля $\mu_{d22} > \mu_{d11}$ нельзя делать вывод о том, что ось H_2 является направлением легкого намагничивания. Как будет проиллюстрировано на рис. 4, таким направлением является ось H_1 .

Отметим также одно из полезных следствий интегрального принципа взаимности: при одинаковых

масштабах для соответствующих компонентов векторов \mathbf{B} и \mathbf{H} площади, ограниченные предельными кривыми намагничивания, одинаковы, поскольку согласно (4) одинаковы площади всех соответствующих криволинейных четырехугольников. Для приведенных на рис. 3, *a, b* граничных характеристик $B_1(H_1, 0)$ и $B_1(H_1, 1200)$, $B_2(0, H_2)$ и $B_2(1200, H_2)$ интегрированием получены практически одинаковые значения: 880.4670 Дж и 880.4688 Дж. Это свойство может быть полезным в условиях ограниченной информации о магнитных свойствах анизотропной среды, когда заданы только по две характеристики в ортогональных направлениях.

Для дополнительной иллюстрации анизотропных свойств рассматриваемой среды на рис. 4 приведены годографы вектора \mathbf{H} (полуокружности радиусов 1200, 600 и 300 А/м) и соответствующие им годографы вектора магнитной индукции \mathbf{B} . Анизотропия среды проявляется выраженной нелинейной зависимостью магнитной индукции от напряженности поля, более «легким» намагничиванием в направлении оси H_1 , а также значительным рассогласованием между векторами \mathbf{B} и \mathbf{H} практически во всем диапазоне изменения поля.

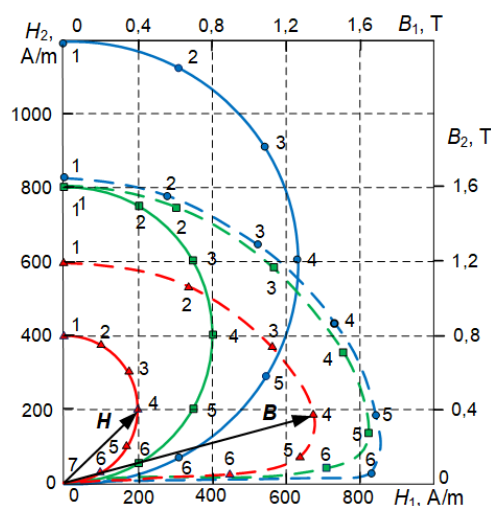


Рис. 4. Годографы изменения векторов \mathbf{B} и \mathbf{H} нелинейной анизотропной среды

На рис. 5, *a, b* приведены характеристики намагничивания для полярной системы координат (H, α) , которые получены пересчетом приведенных на рис. 3, *a, b* характеристик. Как и на рис. 3 значками « \bullet » отмечены узлы «продольных» характеристик намагничивания $B_{||}(H, \alpha)$ с известными значениями индукции при $H=0:200:1200$ А/м, $\alpha=0:\pi/12:\pi/2$, а значки « \ast » соответствуют рассчитанным значениям, полученным применением выражения (15) для узлов «поперечных» характеристик намагничивания $B_{\perp}(H, \alpha)$.

Алгоритм расчета по заданным характеристикам $B_{||}(H, \alpha)$ характеристик намагничивания в ортогональном направлении $B_{\perp}(H, \alpha)$ и тензора дифференциальной магнитной проницаемости $\mu_d(\mathbf{H})$ остается практически таким же, как и в описанном выше случае декартовых координат: по характеристикам $B_{||}(H, \alpha)$ сначала определяем три компонента тензора

$\mu_d(\mathbf{H})$: $\mu_{dH\parallel} = \partial B_{\parallel} / \partial H$, $\mu_{dH\alpha} = \frac{1}{H} \partial B_{\parallel} / \partial \alpha = \mu_{d\alpha H} = \frac{1}{H} \partial(H \cdot B_{\perp}) / \partial H$. Затем интегрированием согласно выражению (15) находим значения $H \cdot B_{\perp}(H, \alpha)$ для всех $H = \text{const}$ и, наконец, значения недостающей компоненты $\mu_{d\alpha\alpha} = \frac{1}{H} \partial B_{\perp} / \partial \alpha$.

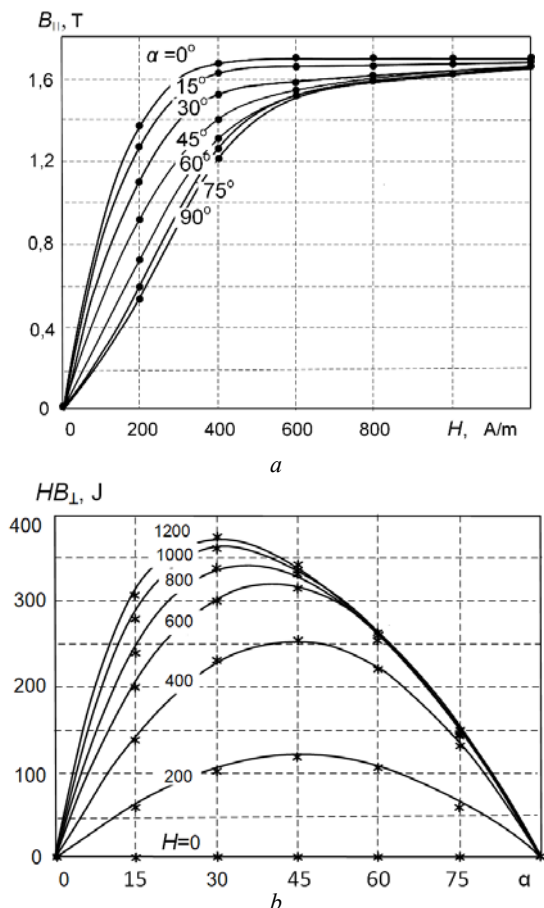


Рис. 5. «Продольные» – а и «поперечные» – b характеристики намагничивания анизотропной среды, полученные пересчетом характеристик рис. 3

Справедливость полученных результатов подтверждена численными расчетами. Для принятых ранее значений вектора напряженности $\mathbf{H}^{(1)} = (450, 600)$ А/м = $(H, \alpha) = (750$ А/м, $39.06^\circ)$ и $\mathbf{H}^{(2)} = (1120, 375)$ А/м = $(1181$ А/м, $8.758^\circ)$ расчетные значения соответствующих векторов индукции $\mathbf{B}^{(1)} = (B_{\parallel}, B_{\perp}) = (1.574, 0.392)$ Тл и $\mathbf{B}^{(2)} = (1.666, 0.283)$ Тл. Точные значения векторов магнитной индукции, полученные применением аналитических формул из [8]: $\mathbf{B}^{(1)*} = (1.573, 0.394)$ Тл, $\mathbf{B}^{(2)*} = (1.666, 0.286)$ Тл.

В заключение заметим, что подынтегральное выражение в интеграле (1) характеризует изменение плотности коэнергии магнитного поля, затрачиваемой на циклическое намагничивание среды. Полученные результаты легко перенести на аналогичный интеграл для плотности энергии $Hd\mathbf{B}$, использование которого приводит к векторным зависимостям $\mathbf{H}(\mathbf{B})$, а именно $H_{\parallel}(B_{\parallel}, B_{\perp})$ и $H_{\perp}(B_{\parallel}, B_{\perp})$ или $H_{\parallel}(B, \alpha)$ и $H_{\perp}(B, \alpha)$ в зависимости от выбранной системы координат.

Примеры использования полученных результатов применительно к анизотропным электротехническим сталям будут предметом специального рассмотрения.

Выводы.

1. Задача построения корректных векторных материальных уравнений для нелинейных анизотропных магнитомягких материалов остается одним из основных резервов повышения точности математических моделей при решении задач магнитостатики в полевой постановке.

2. Эффективным направлением решения указанной проблемы, которое активно развивается в последние годы, является использование энергетического подхода к построению векторных характеристик намагничивания. Однако невозможность непосредственного измерения энергетических потенциалов, сложность аналитического описания и обеспечения точности при двойном дифференцировании для определения тензора дифференциальной магнитной проницаемости делают задачу их конструирования достаточно трудоемкой.

3. Альтернативным методом построения векторных характеристик намагничивания является использование принципа взаимности, который справедлив для сред с обратимыми процессами намагничивания. Его основным преимуществом является возможность непосредственного пересчета характеристик намагничивания в одном из направлений по заданным характеристикам намагничивания в ортогональном направлении без вычисления энергетического потенциала.

4. Установленные в данной статье асимптотические выражения для принципа взаимности, имеющие универсальный характер для произвольных магнитных сред в безгистерезисном приближении, открывают дополнительные возможности оптимизации вычислительных процессов и повышения точности численных методов решения задач магнитостатики в полевой постановке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Silvester P.P., Gupta R.P. Effective computational models for anisotropic soft B-H curves. *IEEE Transactions on Magnetics*, 1991, vol. 27, no. 5, pp. 3804-3807. doi: 10.1109/20.104930.
2. Liu J., Basak A., Moses A.J., Shirkoochi G.H. A method of anisotropic steel modelling using finite element method with confirmation by experimental results. *IEEE Transactions on Magnetics*, 1994, vol. 30, no. 5, pp. 3391-3394. doi: 10.1109/20.312666.
3. Lin D., Zhou P., Badics Z., Fu W.N., Chen Q.M., Cendes Z.J. A new nonlinear anisotropic model for soft magnetic materials. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2006, vol. 42, no. 4, pp. 963-966. doi: 10.1109/TMAG.2006.871380.
4. Sabonnadiere J.C., Meunier G. Modelling nonlinear magnetic materials for field computation. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 1990, no. 4, pp. 1027-1054.
5. Biró O., Außerhofer S., Preis K., Chen Y. A modified elliptic model of anisotropy in nonlinear magnetic materials. *COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 2010, vol. 29, no. 6, pp. 1482-1492. doi: 10.1108/03321641011078553.
6. Higuchi S., Nakao T., Takahashi Y., Tokumasu T., Fujiwara K., Ishihara Y. Modeling of two-dimensional magnetic properties based on one-dimensional magnetic measurements. *IEEE*

Transactions on Magnetics, 2012, vol. 48, no. 11, pp. 3486-3489. doi: 10.1109/TMAG.2012.2198878.

7. Martin F., Singh D., Belahcen A., Rasilo P., Haavisto A., Arkkio A. Analytical model for magnetic anisotropy of non-oriented steel sheets. *COMPTEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 2015, vol. 34, no. 5, pp. 1475-1488. doi: 10.1108/compel-02-2015-0076.

8. Tolmachev S., Il'chenko O. Mathematical modelling of magnetic properties of non-linear anisotropic medium in anhyseretic approximation. *Proc. of International Conference Modern electrical and energy systems (MEES 2017)*, November 15-17, 2017, Kremenchuk, Ukraine, pp. 316-319. doi: 10.1109/MEES.2017.8248920.

9. Толмачев С.Т., Рожненко Ж.Г. Принцип взаимности для магнитной среды без гистерезиса. *Электричество*, 1992, № 12, С. 51-53.

10. Tolmachev S., Rozhnenko Z. The theory of the defining equations for nonlinear anisotropic materials. *Proc. of the XIII International Symposium on Theoretical Electrical Engineering ISTE'05*, Ukraine, Lviv, 2005, pp. 97-100.

11. Маергоиз И.Д. Итерационные методы расчета статических полей в неоднородных, анизотропных и нелинейных средах. Киев: Наук. думка, 1979. – 210 с.

12. Бортакровский А.С., Пантелеев А.В. Линейная алгебра в примерах и задачах: Учебное пособие. М.: Высш. шк., 2005. – 509 с.

REFERENCES

1. Silvester P.P., Gupta R.P. Effective computational models for anisotropic soft B-H curves. *IEEE Transactions on Magnetics*, 1991, vol. 27, no. 5, pp. 3804-3807. doi: 10.1109/20.104930.

2. Liu J., Basak A., Moses A.J., Shirkoohi G.H. A method of anisotropic steel modelling using finite element method with confirmation by experimental results. *IEEE Transactions on Magnetics*, 1994, vol. 30, no. 5, pp. 3391-3394. doi: 10.1109/20.312666.

3. Lin D., Zhou P., Badics Z., Fu W.N., Chen Q.M., Cendes Z.J. A new nonlinear anisotropic model for soft magnetic materials. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2006, vol. 42, no. 4, pp. 963-966. doi: 10.1109/TMAG.2006.871380.

4. Sabonnadiere J.C., Meunier G. Modelling nonlinear magnetic materials for field computation. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 1990, no. 4, pp. 1027-1054.

5. Bíró O., Außerhofer S., Preis K., Chen Y. A modified elliptic model of anisotropy in nonlinear magnetic materials. *COMPTEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 2010, vol. 29, no. 6, pp. 1482-1492. doi: 10.1108/03321641011078553.

6. Higuchi S., Nakao T., Takahashi Y., Tokumasu T., Fujiwara K., Ishihara Y. Modeling of two-dimensional magnetic properties based on one-dimensional magnetic measurements. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2012, vol. 48, no. 11, pp. 3486-3489. doi: 10.1109/TMAG.2012.2198878.

7. Martin F., Singh D., Belahcen A., Rasilo P., Haavisto A., Arkkio A. Analytical model for magnetic anisotropy of non-oriented steel sheets. *COMPTEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 2015, vol. 34, no. 5, pp. 1475-1488. doi: 10.1108/compel-02-2015-0076.

8. Tolmachev S., Il'chenko O. Mathematical modelling of magnetic properties of non-linear anisotropic medium in anhyseretic approximation. *Proc. of International Conference Modern electrical and energy systems (MEES 2017)*, November 15-17, 2017, Kremenchuk, Ukraine, pp. 316-319. doi: 10.1109/MEES.2017.8248920.

9. Tolmachev S.T., Rozhnenko Z.G. The reciprocity principle for a magnetic medium without hysteresis. *Elektrichestvo*, 1992, no. 12, pp. 51-53. (Rus).

10. Tolmachev S., Rozhnenko Z. The theory of the defining equations for nonlinear anisotropic materials. *Proc. of the XIII International Symposium on Theoretical Electrical Engineering ISTE'05*, Ukraine, Lviv, 2005, pp. 97-100.

11. Маергоиз И.Д. *Итерационные методы расчета статических полей в неоднородных, анизотропных и нелинейных средах*. [Iterative methods for calculating static fields in inhomogeneous anisotropic and nonlinear media]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1979. 210 p. (Rus).

12. Bortakovskiy A.S., Panteleev A.V. *Lineynaya algebra v primerakh i zadachakh: Uchebnoye posobiye*. [Linear algebra in examples and tasks]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2005. 509 p. (Rus).

Поступила (received) 29.10.2019

Толмачев Станислав Трофимович¹, д.т.н., проф.,

Ильченко Александр Владимирович¹, к.т.н., доц.,

¹ Криворожский национальный университет,

50027, Днепропетровская обл.,

Кривой Рог, ул. Виталия Матусевича, 11,

e-mail: kafem.knu@gmail.com

S.T. Tolmachev¹, A.V. Il'chenko¹

¹ Kryvyi Rih National University,

11, Vitaliy Matusevich Str., Kryvyi Rih, Dnipropetrovsk Region,

50027, Ukraine.

The reciprocity principle for a nonlinear anisotropic medium without hysteresis: theory and practice of application.

The construction of the correct vector material equations for nonlinear anisotropic soft magnetic materials remains one of the main reserves for increasing the accuracy of mathematical models in solving magnetostatic problems in the field formulation. The aim of the work is to establish asymptotic expressions for the reciprocity principle, which is a fundamental property of reversible magnetization processes of nonlinear anisotropic media, and to use the obtained results to optimize the computational process when constructing the vector magnetization characteristic and differential permeability tensor. The potentiality property of the magnetic flux density vector \mathbf{B} in \mathbf{H} -space is used. The main result of the paper is an illustration, using concrete examples, of an alternative method for calculating vector magnetization characteristics for one of the orthogonal families. In order to eliminate the instrumental error and ensure maximum accuracy and reliability of the obtained results, the exact characteristics for the components of the vector magnetization characteristic obtained by differentiating a special analytical expression for the potential were used as initial ones. The principle of reciprocity, by virtue of its universal nature, makes a significant contribution to the theory of nonlinear anisotropic media in the hysteresis-free approximation. Asymptotic expressions for the reciprocity principle are obtained for the first time. The performed computational experiments on the construction of vector characteristics based on the known magnetization characteristics in one of the directions confirm almost complete coincidence with the exact values obtained analytically. The use of asymptotic expressions for the reciprocity principle not only greatly simplifies computational processes for determining the orthogonal magnetization characteristics, but also implements the calculation of differential permeability tensors for arbitrary field values. The proposed method can be implemented in applications for calculating the magnetic field in devices with nonlinear anisotropic magnetically soft materials, primarily with cold rolled sheet electrical steels, which are most used in electrical engineering. References 12, figures 5.

Key words: nonlinear anisotropic medium, vector magnetization characteristics, energy potential, reciprocity principle, asymptotic expressions, magnetic permeability tensor.