

В.С. Маляр, О.Є. Гамола, В.С. Мадай, І.І. Васильчишин

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПУСКОВИХ РЕЖИМІВ АСИНХРОННИХ ДВИГУНІВ З КОРОТКОЗАМКНЕНИМ РОТОРОМ

Розроблено методи і алгоритми числового аналізу пускових режимів асинхронного електроприводу, які дають змогу розраховувати статичні характеристики і перехідні процеси з урахуванням насичення магнітопроводу і явища скін-ефекту в стержнях ротора. Математичною основою розроблених алгоритмів є проєкційний метод розв'язування нелінійних крайових задач, метод продовження по параметру, метод Ньютона розв'язування нелінійних систем рівнянь, числового інтегрування нелінійних систем диференціальних рівнянь. Розроблені математичні моделі дають змогу здійснювати з високою достовірністю розрахунок пускових режимів у трифазних і двофазних координатних осях, що дає змогу аналізувати не тільки симетричні, але й несиметричні режими і прогнозувати особливості функціонування системи асинхронного електроприводу в заданих технологічних умовах експлуатації. Бібл. 15, рис. 5.

Ключові слова: асинхронний двигун, математичні моделі, пускові статичні характеристики, перехідні процеси, насичення магнітопроводу, витіснення струму, компенсація реактивної потужності.

Разработаны методы и алгоритмы численного анализа пусковых режимов асинхронного электропривода, которые позволяют рассчитывать статические характеристики и переходные процессы с учетом насыщения магнитопровода и явления скин-эффекта в стержнях ротора. Математической основой разработанных алгоритмов является проекционный метод решения нелинейных краевых задач, метод продолжения по параметру, метод Ньютона решения нелинейных систем уравнений, численного интегрирования нелинейных систем дифференциальных уравнений. Разработанные математические модели позволяют осуществлять расчет пусковых режимов в трехфазных и двухфазных координатных осях, что позволяет анализировать не только симметричные, но и несимметричные режимы и прогнозировать особенности функционирования системы асинхронного электропривода в заданных технологических условиях эксплуатации. Библ. 15, рис. 5.

Ключевые слова: асинхронный двигатель, математические модели, пусковые статические характеристики, переходные процессы, насыщение магнитопровода, вытеснение тока, компенсация реактивной мощности.

Вступ. Трифазні асинхронні двигуни (АД) з короткозамкненим ротором є найпоширенішими в сучасних електроприводах. Вони є основними споживачами електричної енергії взагалі і реактивної потужності, зокрема. Однією з проблем асинхронних електроприводів є значні пускові струми, які впливають на якість електричної енергії мережі, що негативно впливає на інші приймачі. Незважаючи на короткочасність процесів пуску, часті вмикання АД впливають на надійність їх роботи і зменшують строк експлуатації. Пряме вмикання АД в мережу супроводжується не тільки значними пусковими струмами, але й значними пульсаціями електромагнітного моменту, а ударні моменти впливають на підшипникові вузли і інші елементи електроприводу. Зрештою, пускові струми АД зумовлюють електричні втрати в лінії живлення, а якщо за умовами роботи електроприводу частота пусків значна, то відповідно частка енергії, яка витрачається на пуски, суттєва. Особливо актуальною ця проблема є для електроприводів з важкими умовами пуску, в тому числі й частотно-регульованих.

Аналіз останніх досліджень. Під час пуску струм обмотки статора АД може сягати 5–7-кратного значення [1, 2], яке не завжди є прийнятним в конкретних умовах експлуатації [3]. Крім того, для деяких електроприводів (кульові млини, різного роду дробарки тощо), які запускаються під навантаженням, необхідно, щоб рушійний момент у кілька разів перевищував критичний [4, 5], за якого пусковий струм може перевищувати номінальний в кілька разів. Для тривалої роботи таке значення струму неприпустиме, однак при цьому значно зменшується час пуску [2], а значить скорочується час роботи з таким струмом. Затяжний пуск електроприводу з важкими умовами пуску може призвести до перевищення допустимого

нагрівання обмотки статора двигуна, особливо в умовах частих пусків.

Для формування необхідного закону зміни електромагнітного моменту АД в процесі пуску використовують пуско-регульовальні пристрої [6]. Задача розроблення алгоритму роботи пускової апаратури за умов забезпечення необхідного рушійного моменту при мінімальному значенні пускового струму [2] потребує визначення законів зміни пускових струмів та електромагнітного моменту.

Пускові струми АД мають значну реактивну складову, компенсувати яку можна за допомогою статичних конденсаторів [6–8]. Зокрема, для зменшення тривалості пуску двигунів великої потужності можуть використовуватись увімкнені послідовно до обмотки статора конденсатори, які не тільки зумовлюють підвищення напруги на двигуні, але й можуть зумовити появу резонансу [9]. У зв'язку зі зазначеними проблемами важливе значення має вибір пускорегульовальної апаратури, яка повинна забезпечити в процесі пуску необхідні механічні характеристики з мінімально можливими витратами електричної енергії [4, 5]. А оскільки регульовальна апаратура і її обслуговування потребує додаткових матеріальних витрат, то необхідно знаходити компроміс між економією електроенергії за рахунок економічного перебігу процесів пуску і витратами на регулювання. Огляд методів підвищення енергоефективності асинхронних електроприводів наведений в [10].

Для оптимізації процесу пуску АД з урахуванням умов експлуатації електроприводу необхідно здійснити його аналіз методами математичного моделювання. Отже розроблення методів розрахунку пускових процесів є актуальною задачею.

АД є основним елементом електроприводу, тому достовірність результатів розрахунку залежать від рівня адекватності його математичної моделі, а швидкодія програм розрахунку – від математичного методу і алгоритму його реалізації. Високої точності розрахунку режимів роботи АД неможливо досягнути з використанням простих їх математичних моделей, а використання високого рівня складності моделей потребує застосування складного математичного апарату. Рівень складності математичної моделі АД та методи, які необхідно застосовувати для розрахунків режимів і характеристик з її використанням, взаємопов'язані.

Більшість методів розрахунку пускових режимів, в тому числі й ті, що використовуються у відомих обчислювальних середовищах, мають в своїй основі класичні заступні схеми АД, які не завжди задовольняють потребам практики. З метою підвищення точності розрахунків в деяких роботах [4, 11] розділяють процес пуску на окремі частини. Однак достовірну інформацію про перебіг процесів під час пуску можна отримати лише за допомогою високорозвинених математичних моделей АД, в яких адекватно враховуються всі основні чинники, зокрема, зміна індуктивних опорів внаслідок насичення та активних внаслідок скін-ефекту. Крім того, математична модель системи електроприводу повинна враховувати закон зміни моменту опору на валу АД під час пуску [1]. Методи [2, 12, 13], які мають в своїй основі поєднання польових методів з коловими, дають змогу підвищити точність визначення електромагнітного моменту, однак вони внаслідок громіздкості непридатні для керування роботою електроприводу в реальному часі.

Метою статті є розроблення математичних моделей, методів і алгоритмів розрахунку пускових режимів АД.

Виклад основного матеріалу. Рівняння електричної рівноваги контурів АД, записані для фізичних контурів, мають вигляд

$$\frac{d\boldsymbol{\Psi}}{dt} + R\mathbf{i} = \mathbf{u}, \quad (1)$$

де $\boldsymbol{\Psi} = (\psi_1, \dots, \psi_k)^*$, $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k)^*$ – вектори потокозчеплень та струмів k контурів (верхній індекс (*) означає транспонування); R – діагональна матриця активних опорів; \mathbf{u} – вектор прикладених напруг.

Математична модель АД потребує обчислення потокозчеплень $\boldsymbol{\Psi}$ та електромагнітних параметрів $L = \partial\boldsymbol{\Psi}/\partial\mathbf{i}$ у відповідності з вибраною системою координат. Потокозчеплення кожної обмотки є складною нелінійною функцією $\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Psi}(i, \gamma)$ струмів усіх його контурів й положення ротора, яке визначається кутовою координатою γ повороту ротора. Тому диференціальні рівняння (ДР), записані для миттєвих значень фізичних координат, мають періодичні коефіцієнти що ускладнює їх розв'язування. Проте більшість практично важливих задач можна розв'язати з використанням перетворених систем координат, які засновані на теорії зображувальних векторів [6, 14], метою переходу до яких є вилучення з рівнянь електричної рівноваги контурів АД кута повороту ротора.

Питання вибору системи координат має принципове значення для розроблення математичних моде-

лей конкретних динамічних режимів електроприводів. Від вибраної системи координат залежить як обсяг обчислень, так і точність результатів розрахунку. В розроблених методах використовуються:

а) система нерухомих трифазних осей, які збігаються з фізичними осями фаз статора;

б) система ортогональних осей $x, y, 0$, які обертаються з довільною швидкістю.

Магнітопроводи сучасних АД мають високий рівень насичення, а це зумовлює нелінійність залежностей потокозчеплень контурів від струмів, тому математичні моделі, побудовані на основі допущення про їх лінійність, не забезпечують можливості розрахунків динамічних режимів з необхідною для сучасної інженерної практики точністю. Лінеаризація електромагнітних зв'язків в АД не вирішує проблеми, оскільки в реальній машині насичення змінюється в широких межах і визначається миттєвими значеннями струмів усіх контурів. В розроблених математичних моделях для обчислення матриці L диференціальних індуктивностей контурів АД використовується основна характеристика намагнічування $\psi_\mu = \psi_\mu(i_\mu)$ як залежність робочого потокозчеплення від струму намагнічування i_μ та залежностей потокозчеплень розсіювання контурів обмотки статора $\psi_{\sigma s} = \psi_{\sigma s}(i_s)$ та ротора $\psi_{\sigma r} = \psi_{\sigma r}(i_r)$ від відповідних струмів статора (s) та ротора (r), які розраховані на основі геометричних розмірів магнітопроводу та обмоткових даних.

Крім насичення, на процеси в АД в динамічних режимах значно впливає явище витіснення струму в стержнях короткозамкненого ротора, врахування якого в пускових режимах є принципово необхідним. Його врахування штучними методами на основі прогнозованого розподілу проникнення в глибину паза електромагнітної хвилі має імовірнісний характер. Методи врахування скін-ефекту на підставі розрахунку магнітного поля в пазу машини [12, 13] неприйнятні з причини їх громіздкості. В розроблених математичних моделях стержні ротора і короткозамикаючі кільця по висоті розбиваються на n шарів, що дає змогу розв'язати задачу на основі теорії кіл [9]. У результаті на роторі отримуємо n короткозамкнених обмоток, між якими існує взаємодійний зв'язок як за рахунок основного магнітного потоку, так і потоків розсіювання.

Математична модель у нерухомих трифазних координатах. Процеси в АД описуються складеною за першим та другим законами Кірхгофа системою скінченних та диференціальних рівнянь. Для розрахунку перехідних процесів складені за першим законом Кірхгофа скінченні рівняння доцільно замінити диференціальними. В результаті у нерухомій трифазній системі координат електромагнітні процеси описуються системою ДР, яка складається з трьох рівнянь для контурів статора

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_A}{dt} - \frac{d\psi_B}{dt} &= u_{AB} - r_A i_A + r_B i_B; \\ \frac{d\psi_B}{dt} - \frac{d\psi_C}{dt} &= u_{BC} - r_B i_B + r_C i_C; \\ \frac{di_A}{dt} + \frac{di_B}{dt} + \frac{di_C}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (2a)$$

та $3n$ рівнянь для n еквівалентних обмоток ротора

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_{aj}}{dt} - \frac{d\psi_{bj}}{dt} &= -r_{aj}i_{aj} + r_{bj}i_{bj} - \alpha(\psi_{bj} - 2\psi_{cj} + \psi_{aj}), \\ \frac{d\psi_{bj}}{dt} - \frac{d\psi_{cj}}{dt} &= -r_{bj}i_{bj} + r_{cj}i_{cj} - \alpha(\psi_{cj} - 2\psi_{aj} + \psi_{bj}), \quad (2b) \\ \frac{di_{aj}}{dt} + \frac{di_{bj}}{dt} + \frac{di_{cj}}{dt} &= 0; \quad (j=1, \dots, n), \end{aligned}$$

де $\alpha = \omega_0(1-s)/\sqrt{3}$; s – ковзання; ω_0 – частота напруги живлення двигуна; ψ_k, i_k, r_k ($k=A, B, C, a_j, b_j, c_j$) – потокозчеплення, струми та активні опори фаз, $j=1, \dots, n$; u_{AB}, u_{BC} – миттєві значення лінійних напруг.

Проблема пуску системи електроприводу потребує дослідження процесу рушання АД з урахуванням механічної характеристики робочого механізму [1, 5] у вигляді залежності миттєвого значення моменту навантаження на валу $M_c = M_c(t)$ від часу або кута повороту ротора, який може перевищувати максимальне його паспортне значення в робочому режимі [4, 5]. Важливою проблемою є дослідження часу розгону двигуна до номінальної швидкості [2], особливо для електроприводів, з важкими умовами пуску. Нерідко швидкодія є основною вимогою роботи технологічного обладнання. Для формування необхідних характеристик системи електроприводу використовують спеціально програмовані пускові системи [1, 6], що можна здійснити з використанням відповідних математичних моделей.

Для розрахунку електромеханічного процесу пуску АД необхідно систему ДР (2) доповнити рівнянням механічної рівноваги

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{p_0}{J}(M_e - M_c), \quad (3)$$

де ω – кутова частота обертання ротора; p_0 – кількість пар полюсів АД; J – приведений до валу двигуна момент інерції системи електроприводу.

Електромагнітний момент АД у фазних координатах визначається за формулою

$$M_e = p_0(\psi_A(i_B - i_C) + \psi_B(i_C - i_A) + \psi_C(i_A - i_B))/\sqrt{3},$$

де $\psi_A, \psi_B, \psi_C, i_A, i_B, i_C$ – проєкції зображувальних векторів потокозчеплення ψ_μ та струму i_μ намагнічування на відповідні осі фаз.

Система ДР (2) разом з рівнянням (3) дає змогу розрахувати перехідний процес пуску АД. Для цього необхідно проінтегрувати її числовим методом за нульових початкових умов, обчислюючи на кожному крокові інтегрування матрицю диференціальних індуктивностей та вектор потокозчеплень [14].

Приклад розрахунку процесу пуску АД 4A160M6Y3 ($P_N = 15$ кВт, $U_N = 380/220$ В, $s_N = 0,026$; $k_{M\max} = 2,0$; $k_{M1} = 1,2$; $n_N = 1000$ об/хв; $k_{\Gamma 1} = 6$; $\cos\varphi_N = 0,875$) з номінальним навантаженням для різних значень моменту інерції системи електроприводу наведено на рис. 1.

З метою викладу проєкційного методу розрахунку усталеного режиму запишемо систему (2) у вигляді векторного ДР

$$\frac{d\psi(i, t)}{dt} = z(\psi(i, t), u(t)), \quad (4)$$

в якій періодичним збуренням є вектор прикладених напруг $u(t) = u(t+T)$.

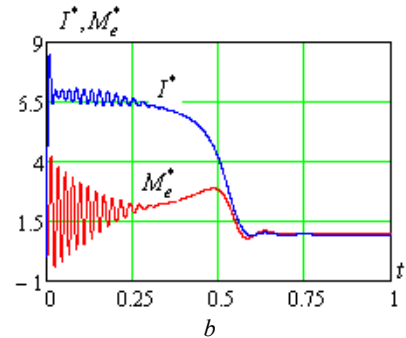
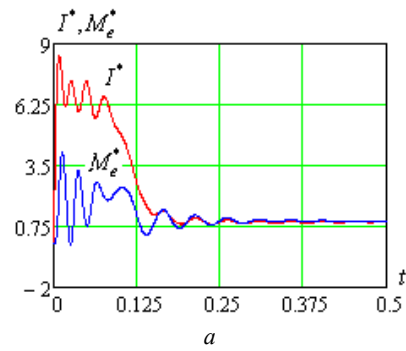


Рис. 1. Часові залежності відносних значень струму статора (I^*) і електромагнітного моменту (M_e^*) під час пуску АД з номінальним моментом навантаження та різних моментах інерції: J – (a) і $5J$ – (b)

В усталеному режимі (при постійному значенні ковзання s) розв'язком системи ДР (4) є T -періодичні часові залежності компонент вектора $i(t) = i(t+T)$. Задача їх визначення найбільш ефективно може бути розв'язана в позачасовій області шляхом розв'язування крайової задачі розробленим на основі загальної теорії нелінійних коливань проєкційним методом, теоретичною основою якого є апроксимація координат стану сплайнами. Для цього апроксимуємо кожен координату вектора ψ на сітці N вузлів періоду сплайном третього порядку у відповідності з викладеним у [15]. В результаті отримаємо неперервну функцію, яка на кожній j -ій часовій ділянці $h = t_j - t_{j-1}$ ($j = 1, \dots, M$) описується рівнянням вигляду

$$\psi(t) = a_j + b_j(t_j - t) + c_j(t_j - t)^2 + d_j(t_j - t)^3,$$

де a_j, b_j, c_j, d_j – коефіцієнти сплайна, співвідношення між яким визначаються його властивостями. Зокрема,

$$\psi(t_j) = \psi_j = a_j, \quad d\psi/dt|_{t=t_j} = -b_j.$$

У результаті отримаємо систему дискретних рівнянь

$$H\Psi - Z = 0, \quad (5)$$

в якій H – матриця переходу від неперервної зміни координат до їх вузлових значень [15], елементи якої визначаються лише сіткою вузлів на періоді; $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_N)^*$; $Z = (z_1, \dots, z_N)^*$; $U = (u_1, \dots, u_N)^*$ – вектори-стовпці, компонентами яких є вузлові значення відповідних векторів системи (4).

Система (5) алгебричних рівнянь є дискретним аналогом системи ДР (4). Її розв'язком є вектор вузлових значень координат, отримати залежність яких від ковзання s можна диференціальним методом. Для цього систему (5) диференціюємо по s

$$W \frac{d\Psi}{ds} = \frac{dZ}{ds}, \quad (6)$$

де W – матриця Якобі.

В результаті інтегрування нелінійної системи ДР (6) одним із числових методів по s отримаємо багатовимірну характеристику у вигляді сукупності періодичних часових залежностей вузлових координат для кожного ковзання, використовуючи які отримуємо залежності поточозчеплень, електромагнітного моменту тощо. Приклад розрахунків статичних характеристик для двигуна 4A160M6Y3 наведено на рис. 2.

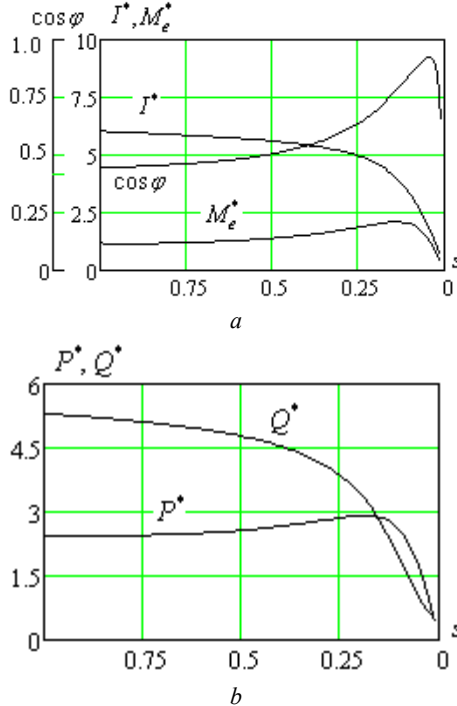


Рис. 2. Пускові характеристики АД для струму (I^*), електромагнітного моменту (M_e^*) і $\cos \varphi$ (a), та активної (P^*) і реактивної (Q^*) потужностей (b) у відносних одиницях

Особливості математичного моделювання пускових режимів електроприводу з індивідуальною компенсацією реактивної потужності. Так звані косинусні конденсатори можуть вмикатись як послідовно, так і паралельно. Для математичного моделювання пускових режимів електроприводу з подовженою компенсацією необхідно у вихідній системі ДР (2) замінити перші два рівняння (2a) системи на такі, в яких враховано наявність послідовно увімкнених конденсаторів:

$$\frac{d\psi_A}{dt} - \frac{d\psi_B}{dt} = u_{AB} - r_A i_A + r_B i_B - u_{kA} + u_{kB};$$

$$\frac{d\psi_B}{dt} - \frac{d\psi_C}{dt} = u_{BC} - r_B i_B + r_C i_C - u_{kB} + u_{kC},$$

де u_{kA} , u_{kB} , u_{kC} – напруги на конденсаторах, та доповнити її рівняннями

$$\frac{du_{kA}}{dt} = \frac{i_A}{C}; \quad \frac{du_{kB}}{dt} = \frac{i_B}{C}; \quad \frac{du_{kC}}{dt} = \frac{i_C}{C}.$$

У цьому разі спад напруги на конденсаторах фаз впливає на напругу живлення двигуна, а значить електромагнітний момент, струм та потужність можуть набагато перевищувати номінальні значення. Приклад

залежностей діючого значення струму, активної потужності і електромагнітного моменту від ємності послідовно увімкнених конденсаторів, виконаних на основі розрахунку струмів і потокозчеплень контурів двигуна 4A160M6Y3 при $s = 1$, наведено на рис. 3.

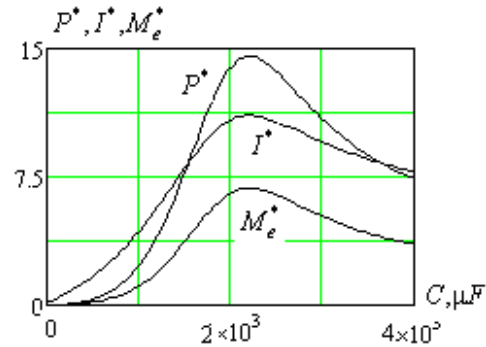


Рис. 3. Залежності відносних значень струму (I^*), активної потужності (P^*) і електромагнітного моменту (M_e^*) АД від ємності послідовно увімкнених конденсаторів

Якщо конденсатори увімкнені паралельно до АД, описана системою рівнянь (2) математична модель не потребує змін, оскільки струми у них можна знайти окремо, так як напруга на них відома. Струми в лінії живлення i'_A , i'_B , i'_C визначаються як сума струмів двигуна i_A , i_B , i_C та паралельно під'єднаних конденсаторів i_{Ak} , i_{Bk} , i_{Ck} . Приклад результатів розрахунку періодичних залежностей миттєвих значень струмів фази A наведений на рис. 4, а залежностей їх діючих значень (у відносних одиницях) та $\cos \varphi$ від значення ємності конденсаторів – на рис. 5.

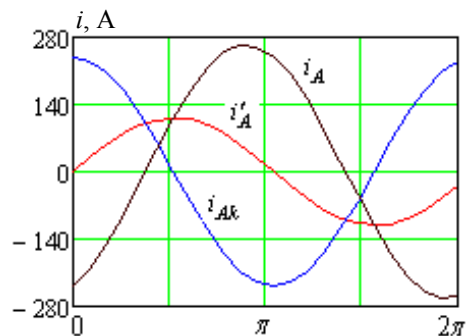


Рис. 4. Криві струмів фази A:

i'_A – лінії живлення; i_{Ak} – конденсатора; i_A – двигуна

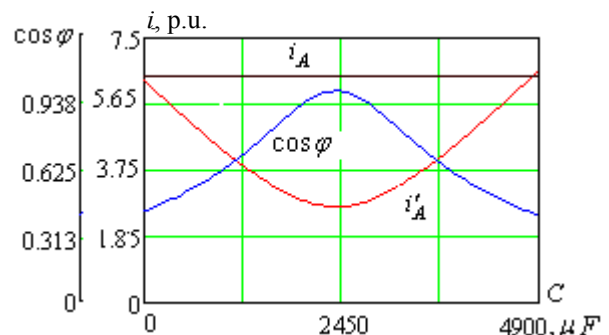


Рис. 5. Залежності від ємності діючих значень струмів фази A: i'_A – лінії живлення; i_A – двигуна та $\cos \varphi$ системи електроприводу з паралельно увімкненими конденсаторами

Вибране за статичною характеристикою значення ємності необхідно перевірити в динамічному режимі

шляхом розрахунку перехідного процесу, тому що послідовно увімкнені конденсатори можуть призвести до появи резонансних явищ [6, 9].

Математична модель в ортогональних координатах. В симетричних режимах роботи АД за відсутності вищих гармонік в напругах живлення статора пускові режими можна розглядати в ортогональних координатах. Математична модель системи електроприводу в перетвореному до ортогональних осей координатному базисі значно простіша від моделі у трифазних осях, однак сфера застосування її звужена.

Розглянемо математичну модель для дослідження пускових характеристик АД з використанням системи координатних осей x, y . Для цього трифазну обмотку статора і утворені стержнями ротора n еквівалентних трифазних обмоток приводимо до осей x, y . У результаті матимемо дві обмотки на статорі і $2n$ обмоток на роторі. Система ДР електричної рівноваги контурів має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_{sx}}{dt} &= \omega_0 \psi_{sy} - r_s i_{sx} + u_{sx}; \\ \frac{d\psi_{sy}}{dt} &= -\omega_0 \psi_{sx} - r_s i_{sy} + u_{sy}; \\ \frac{d\psi_{1x}}{dt} &= s \omega_0 \psi_{1y} - r_1 i_{1x}; \\ \frac{d\psi_{1y}}{dt} &= -s \omega_0 \psi_{1x} - r_1 i_{1y}; \\ &\vdots \\ \frac{d\psi_{nx}}{dt} &= s \omega_0 \psi_{ny} - r_n i_{nx}; \\ \frac{d\psi_{ny}}{dt} &= -s \omega_0 \psi_{nx} - r_n i_{ny}, \end{aligned} \quad (7)$$

де $\psi_{sx}, \psi_{sy}, \psi_{1x}, \psi_{1y}, \dots, \psi_{nx}, \psi_{ny}$ – потокозчеплення та $i_{sx}, i_{sy}, i_{1x}, i_{1y}, \dots, i_{nx}, i_{ny}$ – струми перетворених контурів; r_s, r_1, \dots, r_n – їх активні опори.

Система ДР (7) разом з рівняннями руху ротора

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{p_0}{J\omega_0} \left(\frac{3}{2} p_0 (\psi_{sx} i_{sy} - \psi_{sy} i_{sx}) - M_c \right)$$

дає змогу дослідити процес пуску АД з навантаженням чи без нього ($M_c = 0$) шляхом розв'язування задачі Коші в часовій області.

За умови постійного ковзання система ДР (7) перетворюється у систему звичайних нелінійних рівнянь

$$\begin{aligned} -\omega_0 \psi_{sy} + r_s i_{sx} &= U_m; \\ \omega_0 \psi_{sx} + r_s i_{sy} &= 0; \\ -s \omega_0 \psi_{1y} + r_1 i_{1x} &= 0; \\ s \omega_0 \psi_{1x} + r_1 i_{1y} &= 0; \\ &\vdots \\ -s \omega_0 \psi_{ny} + r_n i_{nx} &= 0; \\ s \omega_0 \psi_{nx} + r_n i_{ny} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Багатовимірну статичну характеристику як залежність координат режиму від ковзання можна розрахувати шляхом розв'язування системи рівнянь (8) для послідовності значень ковзання s . Одним із шляхів

визначення розв'язку системи (8) при заданому значенні ковзання s є метод диференціювання по параметру. Для цього запишемо її у векторній формі

$$y(\psi, i, s) = u, \quad (9)$$

помножимо вектор u на скалярний параметр ε ($0 \leq \varepsilon \leq 1$) і диференціюємо отриману систему по параметру ε . В результаті отримаємо ДР

$$A \frac{di}{d\varepsilon} = u. \quad (10)$$

Інтегруючи векторне ДР (10) по ε (що можна здійснити методом Ейлера за кілька кроків), отримуємо значення вектора струмів i , який уточнюємо ітераційним методом Ньютона. Початкові умови (значення вектора i) – нульові, оскільки при $\varepsilon = 0$ вектор прикладених напруг дорівнює нулю. Приріст $\Delta i^{(k)}$ вектора струмів i на k -му кроці ітерації визначається за формулою

$$A \Delta i^{(k)} = -Z(i^{(k)}), \quad (11)$$

де $Z(i^{(k)})$ – вектор нев'язок системи (9) при заданих значеннях ковзання s і вектора напруг $u^{(k)}$.

У разі наявності послідовно увімкнених конденсаторів перші два рівняння системи (8) мають вигляд

$$\begin{aligned} \omega_0 \psi_{sy} - r_s i_{sx} + x_c i_{sy} &= u_{sx}; \\ -\omega_0 \psi_{sx} - r_s i_{sy} - x_c i_{sx} &= u_{sy}, \end{aligned}$$

де $x_c = 1/(\omega_0(1-s))$; $u_{sx} = U_m$; $u_{sy} = 0$.

Задаючись рядом значень ковзання s ротора АД, можна отримати багатовимірну статичну характеристику у вигляді залежності координат від ковзання.

Висновки та перспективи розвитку напруги.

Одним з найважливіших режимів асинхронного електроприводу є процес пуску, тому в технічній літературі проблемі його аналізу приділяється значна увага. Для проектування керованих асинхронних електроприводів і систем їх регулювання розробляються різні комп'ютерні технології, основою яких є пакети прикладних програм, необхідних для аналізу електромеханічних процесів в електроприводах. Від їх адекватності залежать не тільки кількісні, але й якісні показники системи електроприводу, яка повинна забезпечувати необхідні механічні характеристики, що визначаються технологічним процесом, й відповідати сучасним вимогам щодо енергоефективності. Для вирішення зазначених проблем в статті розроблено математичні моделі, які адекватно відображають електромагнітні процеси в АД і не потребують значних обчислювальних ресурсів. Зокрема, проектування системи електроприводу потребує вибору його елементів, у тому числі й пускорегулювальної апаратури, що можна здійснити шляхом розрахунку статичних характеристик. За їх допомогою можна визначити граничні значення струмів, моменту, потужності тощо з метою налагодження функціонування пускорегулювальної апаратури.

Розроблені методи розрахунку мають в своїй основі математичну модель АД, в якій враховується як зміна власних та взаємних диференціальних індуктивних опорів двигуна внаслідок насичення магнітопроводу, так і активних опорів короткозамкненої обмотки ротора внаслідок витіснення струму в стержнях.

Математична модель для розрахунку статичних характеристик в трифазних загальмованих осях має в своїй основі розв'язування крайової задачі для ДР першого порядку з періодичними крайовими умовами і дає змогу з мінімальними затратами обчислень виконувати оптимізаційні розрахунки. Особливістю моделі є можливість досліджувати процеси при несиметрії напруг живлення, а також наявності конденсаторів при поздовжній компенсації реактивної потужності.

Для симетричних режимів роботи розроблено метод розрахунку режимів і характеристик в ортогональних координатних осях x, y , який дає змогу здійснювати розрахунок з мінімальним обсягом обчислень і відповідно витратами машинного часу, а отже використовувати розроблений алгоритм для керування системою електроприводу в динамічних режимах в реальному часі протікання процесу. Однак його застосування обмежується симетричними режимами роботи електроприводу.

Наведено особливості використання розроблених математичних моделей і алгоритмів для дослідження впливу конденсаторів на параметри електроприводу при поздовжній та поперечній компенсації реактивної потужності.

Конфлікт інтересів. Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Черный А.П., Гладырь А.И., Осадчук Ю.Г., Курбанов И.Р., Вошун А.Н. Пусковые системы нерегулируемых электроприводов: монография. Кременчуг: ЧП Щербатых А.В., 2006. – 280 с.
2. Abhishek Garg, Arun Singh Tomar. Starting time calculation for induction motor. *International Journal of Engineering Research and Applications*, May 2015, vol. 5, iss. 5, pp. 56-60. Available at: http://www.ijera.com/papers/Vol5_issue5/Part%20-%203/J505035660.pdf (accessed 12.10.2020).
3. Гашимов А.М., Рахманов Р.Н. Исследование влияния пуска мощных асинхронных двигателей газокomppressorных установок на режим питающей электрической сети. *Энергетика. Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ*, 2012, № 1, С. 17-22.
4. Беляев В.П., Скакун В.В. Динамика процессов пуска асинхронного электропривода. *Труды БГТУ*, 2015, № 9 (182), С. 34-40. Режим доступу: <https://elib.belstu.by/bitstream/123456789/17345/1/dinamika-processov-puska-asinxronnogo-ehlektroprivoda-dynamics-of-processes-of-start-up-of-the-asynchronous-electric-drive-v.-p.-belyaev-v.-v.-skakun-v.-p.-belyaev-v.-v.-skakun.pdf> (Дата звернення: 12.10.2020).
5. Khrebtova O. Forming the induction motor torque when starting. *Technical Electrodynamics*, 2020, no. 5, pp. 40-44. doi: <https://doi.org/10.15407/techned2020.05.040>.
6. Афлятунов И.Ф. Асинхронный электропривод с конденсаторным пуско-регулирующим устройством: дис. канд. техн. наук: 05.09.03. – Ульяновск: Ул ГТУ, 2016. – 150 с. Режим доступу: <https://www.dissercat.com/content/asinkhronnyi-ehlektroprivod-s-kondensatornym-pusko-kompensiruyushchim-ustroystvom> (Дата звернення: 12.10.2020).
7. Вишневикий Л.В., Муха Н.И., Павленко С.С. Пуск асинхронных электродвигателей с компенсацией реактивной мощности: монография. Одесса: НУ «ОМА», 2016. – 160 с.
8. Горбачевский Н.И., Афлятунов И.Ф. Исследование пуска асинхронного двигателя с последовательно включенными в цепь статора конденсаторами. *Вестник Казанского технологического*

университета, 2013, Т. 16, № 12, С. 112-114. Режим доступу: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_19141286_43355538.pdf (Дата звернення: 12.10.2020).

9. Malyar V., Hamola O., Maday V., Vasylychshyn I. Mathematical modeling of processes in asynchronous motors with capacitors connected in series. *2015 16th International Conference on Computational Problems of Electrical Engineering (CPEE)*, Lviv, Ukraine, 2015, pp. 107-109. doi: <https://doi.org/10.1109/cpee.2015.7333350>.

10. Diachenko G.G., Aziukovskiy O.O. Review of methods for energy-efficiency improvement in induction machines. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*, 2020, no. 1, pp. 80-88. doi: <https://doi.org/10.33271/nvngu/2020-1/080>.

11. Khrisanov V.I. Analysis of starting transients of squirrel-cage induction motor. The start-off stage. *Russian Electrical Engineering*, 2010, vol. 81, no. 3, pp. 109-114. doi: <https://doi.org/10.3103/S1068371210030016>.

12. Kocman S., Orsag P., Pecinka P. Simulation of Start-Up Behaviour of Induction Motor with Direct Online Connection. *Advances in Electrical and Electronic Engineering*, 2018, vol. 15, no. 5, pp. 754-762. doi: <https://doi.org/10.15598/aece.v15i5.2342>.

13. Замчалкин А. С., Тюков В. А. Численное моделирование процесса пуска асинхронного двигателя. *Доклады ТУСУР*, 2012, № 1 (25), ч. 1, С. 171-177.

14. Кулагин Д.О. Математична модель тягового асинхронного двигуна з урахуванням насичення магнітних кіл. *Науковий вісник НГУ*, 2014, № 6, С. 103-110. Режим доступу: <https://nvngu.in.ua/index.php/en/component/jdownloads/finish/50-06/1538-2014-6-kulagin/0> (Дата звернення: 12.10.2020).

15. Малаяр В.С. Основные положения сплайн-метода расчета периодических режимов работы электрических цепей. *Электроника и связь*, 1998, № 5, С. 11-14.

REFERENCES

1. Chernyy, A.P., Gladyyr, A.I., Osadchuk, Yu.G., Kurbanov, I.R., Voshun, A.N. *Starting systems of unregulated electric drives*. Kremenchug: PF Shcherbatykh A.V., 2006, 280 p. (Rus).
2. Abhishek Garg, Arun Singh Tomar. Starting time calculation for induction motor. *International Journal of Engineering Research and Applications*, May 2015, vol. 5, iss. 5, pp. 56-60. Available at: http://www.ijera.com/papers/Vol5_issue5/Part%20-%203/J505035660.pdf (accessed 12.10.2020).
3. Hashimov A.M., Rahmanov R.N. Starting-Up Impact of Powerful Asynchronous Motors Used at Gas-Compressor Units on GRID Mode. *ENERGETIKA. Proceedings of CIS higher education institutions and power engineering associations*. 2012, no. 1, pp. 17-22. (Rus).
4. Belyaev V.P., Skakun V.V. Dynamics of processes of start-up of the asynchronous electric drive. *Proceedings of BSTU*, 2015, no. 9 (182), pp. 34-40. Available at: <https://elib.belstu.by/bitstream/123456789/17345/1/dinamika-processov-puska-asinxronnogo-ehlektroprivoda-dynamics-of-processes-of-start-up-of-the-asynchronous-electric-drive-v.-p.-belyaev-v.-v.-skakun-v.-p.-belyaev-v.-v.-skakun.pdf> (accessed 12.10.2020). (Rus).
5. Khrebtova O. Forming the induction motor torque when starting. *Technical Electrodynamics*, 2020, no. 5, pp. 40-44. doi: <https://doi.org/10.15407/techned2020.05.040>.
6. Aflyatunov I.F. *Asinkhronnyi elektroprivod s kondensatornym pusko-reguliruyushchim ustroystvom: dis. kand. tekhn. nauk* [Asynchronous electric drive with capacitor start up regulator device. Cand. tech. sci. diss.]. Ulyanovsk, UIGTU Publ., 2016. 150 p. Available at: <https://www.dissercat.com/content/asinkhronnyi-ehlektroprivod-s-kondensatornym-pusko-kompensiruyushchim-ustroystvom> (accessed 12.10.2020). (Rus).
7. Vishnevskiy L.V., Muha N.I., Pavlenko S.S. *Pusk asinkhronnykh elektrodvigatelei s kompensatsiei reaktivnoi*

moshchnosti: monografiia [Start of asynchronous motors with reactive power compensation]. Odessa, NU OMA Publ., 2016. 160 p. (Rus).

8. Gorbachevskiy N.I., Aflyatunov I.F. Investigation of starting an induction motor with capacitors in series in the stator circuit. *Bulletin of the Kazan Technological University*, 2013, vol. 16, no. 12, pp. 112-114. Available at: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_19141286_4335553_8.pdf (accessed 12.10.2020). (Rus).

9. Malyar V., Hamola O., Maday V., Vasylchyshyn I. Mathematical modeling of processes in asynchronous motors with capacitors connected in series. *2015 16th International Conference on Computational Problems of Electrical Engineering (CPEE)*, Lviv, Ukraine, 2015, pp. 107-109. doi: <https://doi.org/10.1109/cpee.2015.7333350>.

10. Diachenko G.G., Aziukovskiy O.O. Review of methods for energy-efficiency improvement in induction machines. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*, 2020, no. 1, pp. 80-88. doi: <https://doi.org/10.33271/nvngu/2020-1/080>.

11. Khrisanov V.I. Analysis of starting transients of squirrel-cage induction motor. The start-off stage. *Russian Electrical Engineering*, 2010, vol. 81, no. 3, pp. 109-114. doi: <https://doi.org/10.3103/S1068371210030016>.

12. Kocman S., Orsag P., Pecinka P. Simulation of Start-Up Behaviour of Induction Motor with Direct Online Connection. *Advances in Electrical and Electronic Engineering*, 2018, vol. 15, no. 5, pp. 754-762. doi: <https://doi.org/10.15598/aece.v15i5.2342>.

13. Zamchalkin A.S., Tyukov V.A. Numerical modeling of process of start-up of the induction motor. *Proceedings of TUSUR University*, 2012, no. 1 (25), part 1, pp. 171-177. Available at: <https://journal.tusur.ru/storage/45503/171.pdf?1466640193> (accessed 12.10.2020). (Rus).

14. Kulagin D.O. The mathematical model of asynchronous traction motor taking into account the saturation of magnetic circuits. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*, 2014, no. 6, pp. 103-110. Available at: <https://nvngu.in.ua/index.php/en/component/jdownloads/finish/50-06/1538-2014-6-kulagin/0> (accessed 12.10.2020). (Ukr).

15. Malyar V.S. Main provisions of the spline method for calculating the periodic operation modes of electric circuits. *Electronics and Communications*, 1998, no. 5, pp. 11-14. (Rus).

Надійшла (Received) 12.11.2020

Прийнята (Accepted) 01.02.2021

Опублікована (Published) 05.04.2021

Маляр Василь Сафронівич¹, д.т.н., проф.,

Гамола Орест Євгенович¹, к.т.н., доц.,

Мадай Володимир Степанович¹, к.т.н., доц.,

Васильчишин Іванна Іванівна¹, к.т.н., доц.,

¹ Національний університет «Львівська політехніка»,

79013, Львів, вул. С. Бандери, 12,

e-mail: vasyi.s.maliar@lpnu.ua, orest.y.hamola@lpnu.ua,

volodymyr.s.madai@lpnu.ua

V.S. Malyar¹, O.Ye. Hamola¹, V.S. Maday¹, I.I. Vasylchyshyn¹

¹ Lviv Polytechnic National University,

12, S. Bandera Str., Lviv, 79013, Ukraine.

Mathematical modelling of starting modes of induction motors with squirrel-cage rotor.

Purpose. Development of methods and algorithms for calculation of starting modes of the induction motors with the squirrel-cage rotor. **Methodology.** Mathematical modelling of starting modes of asynchronous electric drives in various coordinate systems with the use of numerical methods for solving boundary problems for systems of differential equations and nonlinear systems of final equations and calculation with their use of static characteristics. **Results.** Methods and algorithms for numerical analysis of the starting modes of asynchronous electric drive have been developed, which make it possible to calculate the static characteristics and transients in fixed three-phase and orthogonal two-phase coordinate systems. **Academic novelty.** Known in the literature methods of calculation of starting modes have in their basis classical equivalent circuits with different approximate methods of calculating the parameters taking into account the saturation of a magnetic core and current displacement in a rotor winding. This approach requires a special solution of the adequacy problem for each problem. The methods described in the article for the saturation accounting use real magnetization characteristics of the main magnetic flux and leakage fluxes separately, and the skin effect phenomenon is taken into account by representing the squirrel-cage rotor winding as multilayer. Such mathematical model of the motor is universal and makes it possible to take into account the saturation and current displacement in any dynamic mode, including the start-up process. Mathematical models developed on the basis of the proposed methods provide the adequacy of results with a minimum amount of calculations and make it possible to perform optimization calculations. **Practical value.** Created on the basis of developed algorithms calculation programs allow to carry out with high reliability calculation of starting modes both in three-phase and two-phase axes of coordinates that gives the chance to analyze not only symmetric, but also asymmetric modes and to predict special features of functioning of system of the electric drive in the set technological conditions of operation and to form requirements to development and adjustment of starting systems with the purpose of maintenance of power effective and reliable operation of system of asynchronous electric drives. References 15, figures 5.

Key words: induction motor, mathematical models, starting static characteristics, transients, saturation of the magnetic core, current displacement, compensation of reactive power.