

---

УДК 608.03

**Р.А. Абдикаримов**, канд. техн. наук  
Ташкентский финансовый ин-т  
(Республика Узбекистан, 100084, Ташкент, Кичик халка йули, 7,  
тел. (99871) 2346641, e-mail: rabdikarimov@mail.ru)

## **Моделирование динамической устойчивости вязкоупругих ортотропных прямоугольных пластин переменной жесткости**

На основе гипотезы Кирхгофа—Лява в геометрически нелинейной постановке приведена математическая модель задачи о динамической устойчивости вязкоупругих прямоугольных ортотропных пластин переменной жесткости с учетом распространения упругих волн. С помощью метода Бубнова—Галеркина, основанного на многочленной аппроксимации прогиба и перемещений, задача сведена к решению систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Рассмотрено влияние вязкоупругих свойств материала и изменения толщины на процесс динамической устойчивости ортотропной пластины.

На основі гіпотези Кірхгофа—Лява в геометрично нелінійній постановці наведено математичну модель задачі про динамічну стійкість в'язкопружних прямокутних ортотропних пластин змінної жорсткості з урахуванням розповсюдження пружних хвиль. За допомогою метода Бубнова—Гальоркіна, базованого на багаточленній апроксимації прогибу і переміщень, задачу зведено до розв'язку систем нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами. Розглянуто вплив в'язкопружних властивостей матеріалу та зміни товщини на процес динамічної стійкості ортотропної пластини.

*Ключевые слова: математическая модель, вязкоупругость, ортотропность, динамическая устойчивость, интегро-дифференциальное уравнение, метод Бубнова—Галеркина.*

В различных областях техники широко внедряются пластины и оболочки переменной жесткости. Это связано, прежде всего, с предъявляемыми требованиями к прочности, долговечности, а также к дизайну тонкостенных элементов современных конструкций. Наряду с тонкостенными элементами конструкций из традиционных металлических материалов широко используются конструкции из композиционных материалов, что приводит к необходимости изучения ортотропных или, в общем случае, анизотропных пластин и оболочек.

Такие задачи следует описывать с помощью моделей теории пластин и оболочек в классической и уточненной постановках. Исследования плас-

© Р.А. Абдикаримов, 2014

тин и оболочек переменной жесткости представляют собой достаточно сложную задачу, а иногда связаны с непреодолимыми трудностями. С одной стороны, требуется решение довольно громоздких уравнений, получаемых посредством математического моделирования, при стремлении отразить реальную механическую сущность процесса. С другой стороны, для решения полученных уравнений отсутствуют подходящие универсальные численные методы и единые вычислительные алгоритмы. Применение современных компьютеров и программных продуктов для решения задач динамики пластин и оболочек переменной жесткости способствует более широкому использованию численных методов.

Разработка математических моделей, вычислительных алгоритмов и программных средств для решения задач динамики вязкоупругих ортотропных элементов тонкостенных конструкций переменной жесткости является актуальной проблемой. Исследованию колебаний и динамической устойчивости элементов тонкостенных конструкций типа пластин и оболочек переменной толщины в геометрически нелинейной постановке при учете вязкоупругих свойств материала посвящены работы [1—8].

Исследуем влияние вязкоупругих свойств материала и изменения толщины на процесс динамической устойчивости вязкоупругой ортотропной пластины переменной жесткости.

**Математическая модель задачи о динамической устойчивости вязкоупругой ортотропной пластины переменной жесткости.** Построим математическую модель задачи о динамической устойчивости вязкоупругой прямоугольной пластины ( $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ) переменной толщины  $h = h(x, y)$  в геометрически нелинейной постановке согласно классической теории Кирхгофа—Лява. Предположим, что вязкоупругая пластина изготовлена из материала, обладающего ортотропными свойствами, нагружена поперечной нагрузкой  $q$  и подвергается быстровозрастающему сжатию вдоль стороны  $a$  силой  $P(t) = \upsilon t$ , где  $\upsilon$  — скорость нагружения.

В этом случае физическую зависимость между напряжениями  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  и деформациями  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  запишем в виде [9, 10]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= B_{11}(1 - \Gamma_{11}^*) \varepsilon_x + B_{12}(1 - \Gamma_{12}^*) \varepsilon_y, \\ (x \leftrightarrow y, 1 \leftrightarrow 2), \tau_{xy} &= 2B(1 - \Gamma^*) \gamma_{xy}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\Gamma^*$ ,  $\Gamma_{ij}^*$  — интегральные операторы с ядрами релаксации соответственно  $\Gamma(t)$  и  $\Gamma_{ij}(t)$ ,

$$\Gamma^* \varphi = \int_0^t \Gamma(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau; \quad \Gamma_{ij}^* \varphi = \int_0^t \Gamma_{ij}(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad i, j = 1, 2;$$

$$B_{11} = \frac{E_1}{1-\mu_1\mu_2}; \quad B_{22} = \frac{E_2}{1-\mu_1\mu_2}; \quad B_{12} = B_{21} = \mu_1 B_{22} = \mu_2 B_{11}; \quad B = \frac{G}{2};$$

$E_1, E_2$  — модули упругости в направлении осей  $x$  и  $y$ ;  $G$  — модуль сдвига;  $\mu_1, \mu_2$  — коэффициенты Пуассона. Здесь и в дальнейшем символы  $x \leftrightarrow y$ ,  $1 \leftrightarrow 2$  указывают на то, что остальные соотношения получаются круговой подстановкой индексов.

Связь между деформациями в срединной поверхности  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  и перемещениями  $u, v, w$  по направлениям  $x, y, z$  с учетом начальных непрямоугольностей представим в виде [11]

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right], \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right],$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y},$$
(2)

где  $w_0 = w_0(x, y)$  — начальный прогиб пластины. Изгибающие  $M_x, M_y$  и крутящие  $H$  моменты с учетом (2) имеют вид [9, 10]

$$M_x = -\frac{h^3}{12} \left[ B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial x^2} + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial y^2} \right], \quad (x \leftrightarrow y, 1 \leftrightarrow 2),$$

$$H = -\frac{Bh^3}{3} (1-\Gamma^*) \frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial x \partial y}.$$
(3)

Подставляя (1) и (3) в уравнения движения [11]

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left( N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + P(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + q - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

получаем систему интегро-дифференциальных уравнений в частных производных:

$$h \left[ B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} + 2B(1-\Gamma^*) \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} \right] +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial h}{\partial x} [B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \varepsilon_x + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \varepsilon_y] + 2B \frac{\partial h}{\partial y} (1-\Gamma^*) \varepsilon_{xy} - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\
 & h \left[ B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} + 2B(1-\Gamma^*) \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} \right] + \\
 & + 2B \frac{\partial h}{\partial x} (1-\Gamma^*) \varepsilon_{xy} + \frac{\partial h}{\partial y} [B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \varepsilon_x + B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \varepsilon_y] - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad (4) \\
 & D \left[ B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \frac{\partial^4 (w-w_0)}{\partial x^4} + (8B(1-\Gamma^*) + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) + B_{21}(1-\Gamma_{21}^*)) \frac{\partial^4 (w-w_0)}{\partial x^2 \partial y^2} + \right. \\
 & \quad \left. + B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \frac{\partial^4 (w-w_0)}{\partial y^4} \right] + \frac{\partial^4 D}{\partial x^2} \left( B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \frac{\partial^2 (w-w_0)}{\partial x^2} + \right. \\
 & \quad \left. + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \frac{\partial^2 (w-w_0)}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial D}{\partial y} \left[ B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \frac{\partial^3 (w-w_0)}{\partial y^3} + (B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) + \right. \\
 & \quad \left. + 4B(1-\Gamma^*)) \frac{\partial^3 (w-w_0)}{\partial x^2 \partial y} \right] + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \left[ B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \frac{\partial^2 (w-w_0)}{\partial y^2} + \right. \\
 & \quad \left. + B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \frac{\partial^2 (w-w_0)}{\partial x^2} \right] + 8 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} B(1-\Gamma^*) \frac{\partial^2 (w-w_0)}{\partial x \partial y} - \\
 & \quad - \frac{\partial w}{\partial x} \left\{ h \left[ B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + 2B(1-\Gamma^*) \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} \right] + \frac{\partial h}{\partial x} [B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \varepsilon_x + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \varepsilon_y] + 2B \frac{\partial h}{\partial y} (1-\Gamma^*) \varepsilon_{xy} \right\} - \\
 & \quad + h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} [B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \varepsilon_x + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \varepsilon_y] - \frac{\partial w}{\partial y} \left\{ h \left[ B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} + 2B(1-\Gamma^*) \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} \right] + 2B \frac{\partial h}{\partial x} (1-\Gamma^*) \varepsilon_{xy} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial h}{\partial y} [B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \varepsilon_x + B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \varepsilon_y] \right\} - h \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} [B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \varepsilon_x + \\
 & \quad + B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \varepsilon_y] - 4h \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} B(1-\Gamma^*) \varepsilon_{xy} + P(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q.
 \end{aligned}$$

Полученная математическая модель (4) с соответствующими граничными и начальными условиями учитывает одновременно вязкоупругие и ортотропные свойства материала, а также переменность толщины.

Следует заметить, что если при решении задач динамики вязкоупругих систем в изотропной постановке в системе интегро-дифференциальных уравнений участвует только одно ядро релаксации с тремя различными реологическими параметрами, то в ортотропной постановке согласно гипотезе Кирхгофа—Лява принимают участие пять различных ядер с 15-ю реологическими параметрами вязкости. При расчетах в качестве ядер релаксации  $\Gamma(t), \Gamma_{ij}(t), i, j = 1, 2$ , используются сингулярные ядра Колтунова—Ржаницына [10]:

$$\Gamma(t) = A e^{-\beta t} t^{\alpha-1} \quad (0 < \alpha < 1), \quad \Gamma_{ij}(t) = A_{ij} e^{-\beta_{ij} t} t^{\alpha_{ij}-1} \quad (0 < \alpha_{ij} < 1).$$

**Дискретная модель задачи о динамической устойчивости вязкоупругой ортотропной пластины переменной жесткости.** Наиболее эффективным методом построения дискретной модели нелинейных задач динамики наследственной теории вязкоупругости является вариационный метод Бубнова—Галеркина, с помощью которого получим основные разрешающие интегро-дифференциальные уравнения данной задачи.

Пусть зависимость изменения толщины имеет вид  $h = 1 + \alpha^* x$ ,  $h_0 = h(0) = \text{const}$ , где  $\alpha^*$  — параметр изменения толщины. Решение системы (4), удовлетворяющее граничным условиям задачи, будем искать относительно перемещений  $u$  и  $v$ , а также прогиба  $w$  в виде

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M u_{nm}(t) \phi_{nm}(x, y), \quad v(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M v_{nm}(t) \varphi_{nm}(x, y),$$

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{nm}(t) \psi_{nm}(x, y). \quad (5)$$

Подставляя (5) в систему уравнений (4) и выполняя процедуру Бубнова—Галеркина, с учетом безразмерных величин  $u/h_0, v/h_0, w/h_0, w_0/h_0, x/a, y/b, h/h_0, \lambda = a/b, \delta = b/h_0, t^* = P/P_{кр} = \nu t/P_{кр} = \omega t/\sqrt{S} = P^*/P_{кр}^*$ ,

$$P^* = \frac{P}{E} \left( \frac{b}{h_0} \right)^2, \quad q^* = \frac{q}{E} \left( \frac{b}{h_0} \right)^4, \quad S = P_{кр}^* \left( \frac{\pi c E h_0^3}{\nu b^4} \right)^2$$

и при сохранении прежних обозначений получаем следующую систему основных разрешающих нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\frac{1}{S} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_{klmn} \ddot{u}_{nm} - \eta_1 \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \{ [(1-\Gamma_{11}^*) d_{1klmn} + (1-\Gamma^*) d_{2klmn}] u_{nm} + \right.$$

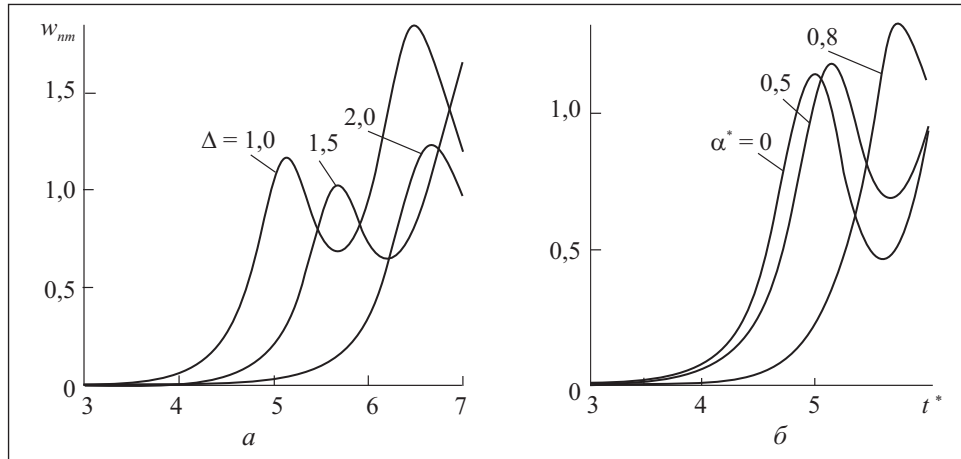
$$\begin{aligned}
 & + \left[ (1-\Gamma_{12}^*) d_{3klm} + (1-\Gamma^*) d_{4klm} \right] v_{nm} \} + \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M [(1-\Gamma_{11}^*) d_{7klmij} + \\
 & \quad + (1-\Gamma_{12}^*) d_{8klmij} + (1-\Gamma^*) d_{9klmij} ] (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) \} = 0, \\
 & \frac{1}{S} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M b_{klm} \ddot{v}_{nm} - \eta_2 \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \{ [(1-\Gamma_{21}^*) e_{1klm} + (1-\Gamma^*) e_{2klm} ] u_{nm} + \right. \\
 & \quad + \left. [(1-\Gamma_{22}^*) e_{3klm} + (1-\Gamma^*) e_{4klm} ] v_{nm} \} + \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M [(1-\Gamma_{22}^*) e_{7klmij} + \right. \\
 & \quad \left. + (1-\Gamma_{21}^*) e_{8klmij} + (1-\Gamma^*) e_{9klmij} ] (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) \} = 0, \\
 & \frac{1}{S} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M c_{klm} \ddot{w}_{nm} + \eta_3 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M [(1-\Gamma_{11}^*) f_{5klm} + (1-\Gamma_{12}^*) f_{6klm} + (1-\Gamma_{22}^*) f_{7klm} + \\
 & \quad + (1-\Gamma_{21}^*) f_{8klm} + (1-\Gamma^*) f_{9klm} ] (w_{nm} - w_{0nm}) + \eta_3 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M p_{klm}^* w_{nm} t^* - \\
 & - \eta_3 \left\{ \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M w_{nm} \{ [(1-\Gamma_{11}^*) \xi_{1klmij} + (1-\Gamma_{21}^*) \xi_{2klmij} + (1-\Gamma^*) \xi_{3klmij} ] u_{ij} + \right. \\
 & \quad + \left. [(1-\Gamma_{22}^*) \xi_{4klmij} + (1-\Gamma_{12}^*) \xi_{5klmij} + (1-\Gamma^*) \xi_{6klmij} ] v_{ij} \} + \right. \\
 & \quad + \sum_{n,i,r=1}^N \sum_{m,j,s=1}^M w_{nm} \{ [(1-\Gamma_{11}^*) g_{5klmijrs} + (1-\Gamma_{12}^*) g_{6klmijrs} + (1-\Gamma_{22}^*) g_{7klmijrs} + \\
 & \quad \left. + (1-\Gamma_{21}^*) g_{8klmijrs} + (1-\Gamma^*) g_{9klmijrs} \} (w_{ij} w_{rs} - w_{0ij} w_{0rs}) \} = 0,
 \end{aligned} \tag{6}$$

где постоянные коэффициенты связаны с координатными функциями и их производными;  $c = \sqrt{\frac{E_1 E_2}{\rho}}$  — скорость звука в материале пластины;

$\omega = \sqrt{\pi^2 \frac{\sqrt{E_1 E_2} h^2 P_{кр}^*}{\rho b^4}}$ ;  $P_{кр}$  — статическая критическая нагрузка;  $\rho$  — плот-

ность материала пластины. На основе разработанного алгоритма составлена программа на языке Delphi.

**Расчет деформирования вязкоупругой ортотропной прямоугольной пластины переменной жесткости.** Интегрирование системы (6) выполнено с помощью численного метода, основанного на использовании



Зависимость прогиба пластины от времени при изменении параметров  $\Delta$  (а) и  $\alpha^*$  (б)

квадратурных формул [12, 13]. Как и в работе [11], в качестве критерия, определяющего критическое время и критическую нагрузку, принимаем условие, что стрела прогиба не должна превышать величину, равную толщине пластины  $h_0$ . В качестве параметра, определяющего устойчивость пластины, принят коэффициент динамичности  $K_d$ , равный отношению динамической критической нагрузки к эйлеровой статической.

На рисунке приведены результаты расчетов динамической устойчивости пластины из неоднородного вязкоупругого материала при различных физических и геометрических параметрах. Изучено влияние неоднородных свойств материала на процесс устойчивости пластины. Как видно из рисунка а, увеличение параметра  $\Delta = \sqrt{E_1/E_2}$ , определяющего степень анизотропии, приводит к более позднему интенсивному возрастанию прогибов и соответственно увеличению критического значения  $K_d$ . Аналогичные результаты для вязкоупругой пластины постоянной толщины получены в работе [14].

Результаты исследования влияния изменения толщины пластины  $\alpha^*$  на динамическую устойчивость приведены на рисунке б. При значениях  $\alpha^* = 0; 0,5; 0,8$  коэффициент динамичности  $K_d$  равен соответственно 4,85; 4,97; 5,52. Напомним, что увеличение параметра  $\alpha^*$  влечет за собой увеличение толщины пластины. Вычисления выполнены при равных объемах пластин постоянной и переменной толщины. Из рисунка видно, что с увеличением толщины пластины значение  $K_d$  увеличивается.

## Выводы

Разработанный вычислительный алгоритм позволяет исследовать нелинейные задачи динамики вязкоупругих систем переменной жесткости.

Созданный комплекс прикладных программ на языке Delphi дает возможность получить решения задач в числовом и графическом виде.

Исследование задачи о динамической устойчивости вязкоупругой ортотропной пластины переменной жесткости на основе многочленной аппроксимации прогибов позволило установить, что изменение толщины пластины по различным законам приводит к уменьшению критической нагрузки в пределах от 20 до 50 %, а учет вязких свойств материала — к уменьшению коэффициента динамичности на 20—40 %.

Based on the Kirchhoff—Love hypothesis a mathematical model of the problem on dynamic stability of visco-elastic rectangular orthotropic plates of variable rigidity is presented in geometric nonlinear posing with respect to propagation of elastic waves. The problem is reduced to solution of the system of nonlinear integro-differential equations with variable coefficient with the help of Bubnov—Galyorkin method based on the polynomial approximation of a sagging and translations. The effect of visco-elastic properties of material and thickness changes on the process of dynamic stability of the orthotropic plate has been considered.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Верлань А.Ф., Абдикаримов Р.А., Эшматов Х. Численное моделирование нелинейных задач динамики вязкоупругих систем с переменной жесткостью // Электрон. моделирование. — 2010. — **32**. — № 2. — С. 3—14.
2. Абдикаримов Р.А., Жгуты В.М. Математические модели задач нелинейной динамики вязкоупругих ортотропных пластин и оболочек переменной толщины // Инженерно-строительный журнал. — 2010. — **23**. — № 6. — С. 38—47.
3. Абдикаримов Р.А. Нелинейные колебания вязкоупругих пластин с переменной жесткостью // ДАН РУз. — 2010. — № 4. — С. 40—42.
4. Абдикаримов Р.А., Жгуты В.М. Геометрически нелинейное математическое моделирование динамической устойчивости вязкоупругих пологих оболочек переменной толщины // Инженерно-строительный журнал. — 2011. — **24**. — № 6. — С. 12—22.
5. Abdikarimov R.A. Numerical Research of Nonlinear Vibrations of Isotropic Viscoelastic Plates with Variable Rigidity by the Method of Computer Simulation // Social and Natural Sciences Journal. — 2011. — Vol. 3. — P. 46—49.
6. Абдикаримов Р.А., Худаяров Б.А. Моделирование колебательных процессов вязкоупругих ортотропных пластин с переменной жесткостью // Mechanics. Proc. of National Academy of Sciences of Armenia. — 2011. — № 4 (64). — P. 30—38.
7. Абдикаримов Р.А., Голоскоков Д.П. Численное исследование нелинейных колебаний вязкоупругих пластин переменной толщины // Журнал Университета водных коммуникаций. — 2011. — № 2. — С. 102—107.
8. Абдикаримов Р.А., Худаяров Б.А. Исследование вязкоупругих круговых цилиндрических панелей переменной толщины // Вычислительная механика сплошных сред. — 2012. — **5**. — № 1. — С. 11—18.



9. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. — М. : Наука, 1970. — 280 с.
10. *Колтунов М.А.* Ползучесть и релаксация. — М. : Высшая школа, 1976. — 276 с.
11. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. — М. : Наука, 1972. — 432 с.
12. *Бадалов Ф.Б., Эшматов Х., Юсупов М.* О некоторых методах решения систем ИДУ, встречающихся в задачах вязкоупругости // ПММ. — 1987. — № 5 (51). — С. 867—871.
13. *Эшматов Х.* Интегральный метод математического моделирования задач динамики вязкоупругих систем. Автореферат дисс... д-ра тех. наук. — Ин-т проблем моделирования в энергетике НАН Украины. — Киев, 1991. — 40 с.
14. *Eshmatov V.Kh.* Nonlinear Vibrations and Dynamic Stability of Viscoelastic Orthotropic Rectangular Plate // Journal of Sound and Vibration. — 2007. — Vol. 300. — P. 709—726.

Поступила 22.01.14;  
после доработки 07.04.14

*АБДИКАРИМОВ Рустамхан Алимханович, канд. техн. наук, профессор кафедры математики Ташкентского финансового ин-та. В 1982 г. окончил Ташкентский госуниверситет. Область научных исследований — математическое моделирование.*

