УДК 539.3: 534.1

А.Ф. Верлань[1], **Б.А. Худаяров**[2], доктора техн. наук,
Э.Ф. Файзибоев[2], канд. физ.-мат. наук
[1] Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины
(Украина, 03164, Киев, ул. Генерала Наумова, 15,
тел. (044) 4241063, e-mail: a.f.verlan@gmail.com),
[2] Ташкентский ин-т ирригации и мелиорации
(Республика Узбекистан, 100000, Ташкент, ул. Кары-Ниязова, 39,
тел. (+99871) 2370986, e-mail: bakht-flpo@yandex.ru; fayziboeyevef@inbox.ru)

Моделирование флаттера вязкоупругой цилиндрической оболочки в потоке газа

На примере вязкоупругой оболочки рассмотрены задачи динамики тонкостенных конструкций при аэродинамической нагрузке с учетом вязкоупругих свойств материала и геометрической нелинейности. Аэродинамическое давление определено в соответствии с поршневой теорией А.А. Ильюшина. С помощью метода Бубнова — Галеркина математическая модель задачи сведена к исследованию системы обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений, решаемых численным методом, основанным на использовании квадратурных формул. Определена критическая скорость флаттера вязкоупругих оболочек при различных физических и геометрических параметрах.

На прикладі в’язкопружної оболонки розглянуто задачі динаміки тонкостінних конструкцій при аеродинамічному навантаженні з урахуванням в’язкопружних властивостей матеріалу та геометричної нелінійності. Аеродинамічний тиск визначено згідно з поршневою теорією О.А. Ільюшина. За допомогою метода Бубнова — Гальоркіна математичну модель задачі зведено до дослідження системи звичайних інтегро-диференціальних рівнянь, які розв’язуються чисельним методом, базованим на використанні квадратурних формул. Визначено критичну швидкість флатера в’язкопружних оболонок при різних фізичних та геометричних параметрах.

Ключевые слова: *вязкоупругость, интегро-дифференциальные уравнения, алгоритм, флаттер, оболочка.*

Рассмотрим шарнирно опертую замкнутую вязкоупругую цилиндрическую оболочку с радиусом кривизны R срединной поверхности и длиной L, обтекаемую с внешней стороны потоком газа, направленным вдоль образующих со сверхзвуковой скоростью V [1—5]. Уравнения вязкоупругой цилиндрической оболочки запишем в виде

$$\frac{D}{h}(1-R^*)\nabla^4 W=\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\partial y}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}-\rho\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+\frac{q}{h},$$

$$\frac{1}{E}\nabla^4\Phi=-(1-R^*)\left\{\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)^2+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right\}. \qquad (1)$$

Здесь $\nabla^2 W$ — оператор Лапласа; ρ — плотность материала оболочки; h — толщина оболочки; E — модуль Юнга; R^* — интегральный оператор с ядром релаксации $R(t)$; $W(x, y, t)$ — прогиб оболочки; $\Phi(x, y, t)$ — функция напряжений, действующих в срединной поверхности оболочки; D — цилиндрическая жесткость, $D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$; μ — коэффициент Пуассона; q — аэродинамическое давление, определяемое согласно теории Ильюшина [6],

$$q=-B\frac{\partial W}{\partial t}-BV\frac{\partial W}{\partial x}-B_1V^2\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2,$$

где $B=\text{æ}\,p_\infty/V_\infty$; $B_1=\text{æ}\,(\text{æ}+1)\,p_\infty/4V_\infty^2$; æ — показатель политропы газа; p_∞ и V_∞ — давление и скорость звука в невозмущенном потоке.

Решение системы (1) находим в виде

$$W(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}W_{nm}(t)\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{my}{R},$$

$$\Phi(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\Phi_{nm}(t)\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{my}{R}. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в систему (1) и применяя метод Бубнова — Галеркина, получаем систему интегро-дифференциальных уравнений относительно $W_{nm}(t)$ и $\Phi_{nm}(t)$:

$$A_{kl}\Phi_{kl}(t)=E(1-R^*)\sum_{n,i=1}^{\infty}\sum_{m,r=1}^{\infty}C_{klnmir}W_{nm}W_{ir}+E(1-R^*)\,R\left(\frac{k}{\lambda}\right)W_{kl},$$

$$\frac{D}{h}(1-R^*)\left[\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{l}{R}\right)^2\right]^2W_{kl}=-\frac{1}{R}\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2\Phi_{kl}+$$

ISSN 0204–3572. Electronic Modeling. 2014. V. 36. № 3

$$+\frac{E\pi}{L^2R^2}\sum_{n,i,j=1}^{\infty}\sum_{m,r,s=1}^{\infty}a_{klnmirjs}W_{nm}(1-R^*)W_{ir}W_{js}+$$

$$+\frac{E\pi}{L^2R}\sum_{n,i=1}^{\infty}\sum_{m,r=1}^{\infty}W_{nm}F_{klnmir}(1-R^*)W_{ir}-\rho\ddot{W}_{kl}-\frac{B}{h}\dot{W}_{kl}-$$

$$-\frac{2BV}{Lh}\sum_{n=1}^{\infty}n(\gamma_{k-n}+\gamma_{k+n})W_{nl}-\frac{B_1V^2}{h}\frac{\pi}{2L^2}\sum_{n,i=1}^{\infty}\sum_{m,r=1}^{\infty}\Gamma_{klnmir}W_{nm}W_{ir}. \qquad (3)$$

Вводя безразмерные коэффициенты, сводим систему (3) к уравнению относительно амплитуды прогиба W_{kl}:

$$\ddot{W}_{kl}+\lambda^4\Omega^2\left\{\left[\left(\frac{k}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{l}{\pi}\right)^2\right]^2+\frac{12(1-\mu^2)}{\pi^2\beta_1^2}\left(\frac{k}{\lambda}\right)^2E_{kl}\right\}(1-R^*)W_{kl}+\beta_1\pi^2M_E^2\times$$

$$\times\sum_{n,i=1}^{\infty}\sum_{m,r=1}^{\infty}K_{klnmir}(1-R^*)W_{nm}W_{ir}-\frac{12\lambda^2(1-\mu^2)\Omega^2}{\pi^3}\times$$

$$\times\sum_{n,i,j=1}^{\infty}\sum_{m,r,s=1}^{\infty}a_{klnmirjs}W_{nm}(1-R^*)W_{ir}W_{js}-$$

$$-\pi\beta_1M_E^2\sum_{n,i=1}^{\infty}\sum_{m,r=1}^{\infty}F_{klnmir}W_{nm}(1-R^*)W_{ir}+MM_0\dot{W}_{kl}+2MM^*\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_{kl}W_{nl}+$$

$$+\frac{M_1M^{*2}}{2}\pi\sum_{n,i=1}^{\infty}\sum_{m,r=1}^{\infty}\Gamma_{klnmir}W_{nm}W_{ir}=0, \qquad (4)$$

где

$$\Omega^2=\frac{\pi^4}{12(1-\mu^2)}M_E^2\left(\frac{h}{E}\right)^2;\quad M=æ\,M_p^2\left(\frac{L}{h}\right);\quad M_1=\frac{æ(æ+1)M_p^2}{4};$$

$$M_E=\sqrt{\frac{E}{\rho V_0^2}};\quad M_P=\sqrt{\frac{P_\infty}{\rho V_0^2}};$$

$M_0=V_0/V_\infty$; $\beta_1=h/R$; $M^*=V/V_\infty$ — число Маха; γ_{kl}, Γ_{klnmir}, a_{klnmir}, K_{klnmir}, F_{klnmir} — безразмерные коэффициенты [5].

Требуется найти критическую скорость флаттера V^* из решения системы интегро-дифференциальных уравнений (4), удовлетворяющую начальным условиям $W_{nm}(0)=W_{0nm}, \dot{W}_{nm}(0)=\dot{W}_{0nm}$. Уравнения (4) позволяют выполнить качественный анализ решения задачи о флаттере вязкоупругой цилиндрической оболочки. Интегрирование системы (4) с использованием ядра Колтунова—Ржаницына ($R\,(t)=A\exp(-\beta t)\,t^{\alpha-1}$, $A>0$, $\beta>0$, $0<\alpha<1$) проводилось численным методом [7—11].

В таблице приведены результаты расчетов, выполненных в процессе многократного решения уравнения (4) при $n=2$ для оболочек, обтекаемых потоком газа со сверхзвуковой скоростью, которые имеют параметры $p_\infty=$ $=1{,}014$ кГ/см^2 , æ =1,4 и V_∞ =340 м/с. В качестве критерия, определяющего критическую скорость флаттера V^*, примем следующее условие: при дан-

Зависимость критической скорости флаттера от физико-механических и геометрических параметров оболочки

A	α	β	λ	L/h	m	V^*, м/с
0,0						780
0,001						687
0,01	0,25	0,05	1	4000	6	555
0,1						423
	0,1					505
0,01	0,5	0,05	1	4000	6	550
	0,75					575
0,01	0,25	0,1	1	4000	6	540
		0,01				545
			1,2			380
0,01	0,025	0,05	1,4	4000	6	875
			1,5			1230
				2000		1081
0,01	0,25	0,05	1	2200	6	815
				2500		547
					2	1053
					4	1010
0,01	0,025	0,05	1	4000	6	555
					8	605
					10	1000

ных скоростях амплитуда колебаний изменяется по гармоническому закону. При сверхкритических скоростях происходит колебательное движение с интенсивно нарастающими амплитудами, которое может привести конструкцию к разрушению. В случае $V<V^*$ амплитуда колебаний затухает [10—12].

Из таблицы видно, что увеличение коэффициента вязкости A приводит к уменьшению критической скорости флаттера на 45 %. При $A=0$ $V^*=$ $=780$ м/с, а при $A=0{,}1$ $V^*=$ 423 м/с. Увеличение параметра α приводит к существенному изменению значения V^*. Исследования проведены при α = 0,1; 0,5; 0,75. Как видим, увеличение параметра α от 0,1 до 0,75 сопровождается увеличением критического числа флаттера от $V^*=505$ м/с до $V^*=$ 575 м/с. В результате исследования влияния параметра L/h на поведение оболочек установлено, что увеличение отношения L/h от 2000 до 2500 приводит к уменьшению значения V^* на 50 %.

Определение числа волн m в окружном направлении представляет интерес при решении задач панельного флаттера оболочек. Во-первых, зная число m, можно устранить известную неопределенность задачи флаттера, обусловленную наличием m в исходных уравнениях. Во-вторых, определив m, можно глубже проникнуть в суть явления флаттера оболочек.

До настоящего времени не удалось построить достаточно простого и эффективного метода определения числа волн m в окружном направлении, реализуемого в каждой конкретной задаче колебания оболочки в потоке газа. Объясняется это существенными затруднениями, стоящими на пути решения этой задачи. Число m в значительной степени определяет общую картину волнообразования оболочки в процессе колебаний, которая, в свою очередь, определяет суммарную энергию вязкоупругой конструкции, обтекаемой потоком газа. При этом из множества возможных картин волнообразования оболочки реализуется та, которая является наиболее устойчивой в рассматриваемой ситуации, определяемой всей совокупностью параметров, характеризующих как вязкоупругую конструкцию, так и окружающий ее поток газа. Рациональное решение вопроса об устойчивости той или иной формы колебаний оболочки в наиболее общем виде представляется в настоящее время достаточно проблематичным.

В силу указанных причин не существует какого-либо общего аналитического и достоверного выражения для вычисления числа m в задачах панельного флаттера оболочек. Обычно каждую конкретную задачу сначала решают для ряда значений m и выбирают то значение $m_{\min}$, которое соответствует минимальной критической скорости флаттера (см. таблицу). Все дальнейшие вычисления проводят, используя полученное значение $m_{\min}$.

Выводы

Таким образом, рассмотренная математическая модель флаттера вязкоупругой оболочки позволяет с достаточной для инженерных расчетов точностью исследовать колебательные процессы объектов данного класса в потоке газа, в том числе определять минимальную критическую скорость потока, при которой начинает проявляться эффект флаттера. В частности установлено, что для круговой цилиндрической оболочки минимальной критической скорости соответствует число волн в окружном направлении, равное шести. Вычислительные эксперименты с моделью позволяют оценить влияние размеров и характеристик материала оболочки на количество указанных волн.

Problems of dynamics of thin-walled structures under aerodynamic load with allowance for visco-elastic properties of material and geometric nonlinearity were considered on the example of visco-elastic shell. The aerodynamic pressure was determined in corespondence with A.A. Ilyushin's piston theory. With the help of the Bubnov-Galyorkin method the mathematical model was reduced to investigation of the system of ordinary integro-differential equations which are solved by the numerical method based on the use of quadrature formulas. A critical rate of the flutter of visco-elastic shells was determined under different physical and geometrical parameters.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Скурлатов Э.Д.* Поведение цилиндрических оболочек в сверхзвуковом потоке газа // Сб. статей. «Расчеты на прочность». Вып. 15. — М. : Машиностроение, 1971. — С. 356—365.
2. *Новичков Ю.Н.* Флаттер пластин и оболочек // МТТ. Итоги науки и техники. Вып. 11. — М. : ВИНИТИ, 1978. — С. 67—122.
3. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. — М. : Наука, 1972.
4. *Алгазин С.Д., Кийко И.А.* Численное исследование флаттера пологой оболочки // ПМТФ. —1999. — **40**, № 6. — С. 97—102.
5. *Эшматов Х., Худаяров Б.А.* Алгоритмизация нелинейных задач о флаттере вязкоупругих пластин и цилиндрических панелей // Проблемы информатики и энергетики. (г. Ташкент). — 1999. — № 1. — С. 3—8.
6. *Ильюшин А.А.* Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей // ПММ. — 1956. — **XX**. — Вып.6. — С. 733—755.
7. *Бадалов Ф.Б.* Методы решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости. — Ташкент : Мехнат, 1987. — 271 с.
8. *Верлань А.Ф., Худаяров Б.А., Файзибоев Э.Ф., Юлдашев З.У.* Компьютерное моделирование флаттера вязкоупругих ортотропных пластин в сверхзвуковом потоке газа // Вест. НТУ «ХПИ». — 2012. — № 62 (968). — С. 8—17.
9. *Абдикаримов Р., Худаяров Б.А.* Исследование вязкоупругих круговых цилиндрических панелей переменной толщины // Вычислительная механика сплошных сред. — 2012. — **5**, № 1. — С. 11—18.
10. *Худаяров Б.А.* Об одном численном методе решения интегральных уравнений задачи нелинейного флаттера вязкоупругих систем // Междунар. конф. «Интегральные

уравнения-2009». 26—29 января. Киев: Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН украины, 2009. — С. 147—149.

11. *Худаяров Б.А.* Математическое моделирование нелинейного флаттера вязкоупругих элементов и узлов летательного аппарата // Математическое моделирование. — 2010. — **22**, № 6. — С. 111—131.
12. *Khudayarov B.A.* Numerical Analysis of the Nonlinear Flutter of Viscoelastic Plates//Intern. J. Applied mechanics. — 2005. — Vol. 41, № 5. — P. 538—542.

Поступила 22.01.14;
после доработки 04.03.14

ВЕРЛАНЬ Анатолий Федорович, д-р техн. наук, зав. отделом Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 1956 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — методы математического и компьютерного моделирования в задачах исследования динамических систем, электрических цепей; численные методы и алгоритмы решения интегральных уравнений.

ХУДАЯРОВ Бахтияр Алимович, д-р техн. наук, зав. кафедрой высшей математики Ташкентского ин-та ирригации и мелиорации. В 1990 г. окончил Ташкентский госуниверситет. Область научных исследований — математическое моделирование, численные методы и алгоритмы решения интегро-дифференциальных уравнений, механика деформируемого твердого тела.

ФАЙЗИБОЕВ Элчи Файзибоевич, канд. физ.-мат. наук, проф. кафедры высшей математики Ташкентского ин-та ирригации и мелиорации. В 1959 г. окончил Среднеазиатский госуниверситет. Область научных исследований — дифференциальные уравнения.