УДК 517.968

М.В. Булатов, д-р физ.-мат. наук
Ин-т динамики систем и теории управления СО РАН
(Россия, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134,
тел. 8 (3952) 453018, e-mail: mvbul@icc.ru)

Исследование интегральных уравнений с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью*

Рассмотрены системы интегральных уравнений Вольтерры с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью. Установлены принципиальные отличия таких систем от интегральных уравнений первого и второго родов. Определены условия существования единственного непрерывного решения.

Розглянуто системи інтегральних рівнянь Вольтерри з тотожною виродженою матрицею перед головною частиною. Встановлено принципові відміни таких систем від інтегральних рівнянь першого та другого родів. Визначено умови існування єдиного неперервного розв'язку.

Ключевые слова: *интегральные уравнения Вольтерры, индекс, матричные полиномы, интегро-алгебраические уравнения.*

Первые результаты, относящиеся к теории интегральных уравнений, были получены в начале XIX века (Ж.Б. Фурье —1811 г., Н. Абель — 1823 г., Ж. Лиувилль — 1837 г.). Однако детальное исследование таких уравнений началось несколько позже — в конце XIX и в начале XX века — и связано с именами В. Вольтерры и Э.И. Фредгольма. К настоящему времени опубликовано большое количество монографий и статей, посвященных различным аспектам качественной теории и теории численных методов решения различных классов интегральных уравнений. Современное состояние проблемы, исторический обзор и достаточно полную библиографию можно найти в работах [1—8].

Будем рассматривать взаимосвязанные интегральные уравнения Вольтерры первого и второго рода, когда число уравнений совпадает с числом искомых функций. Объединив эти уравнения в одну систему, получим

* Исследования поддержаны грантом РФФИ № 13-01-93002-Вьет_а.

систему интегральных уравнений с тождественно вырожденной главной частью. Такие задачи принципиально отличаются от классических интегральных уравнений Вольтерры первого и второго рода. Поэтому использовать результаты, полученные для классических интегральных уравнений, не всегда возможно. Исследование таких уравнений началось относительно недавно — первая статья вышла в 1987 г. [5, 9, 10—13].

Сформулируем условия существования единственного решения для класса систем интегральных уравнений с тождественно вырожденной главной частью. При этом используем аппарат полиномиальных матриц, матричных пучков [14, 15] и полуобратных (обобщенных обратных) матриц [14, 16].

Постановка задачи. Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$A(t)x(t)+\int_0^t K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau = f(t), \quad 0\le\tau\le t\le 1, \tag{1}$$

где $A(t)$ и $K(t,\tau)$ — $(n\times n)$-матрицы; $f(t)$ и $x(t)$ — заданная и искомая n-мерные вектор-функции. Под решением исходной системы будем понимать любую непрерывную вектор-функцию, обращающую (1) в тождество. Далее будем предполагать, что элементы матриц $A(t)$, $K(t,\tau)$ и векторы функций $f(t)$ и $x(t)$ обладают необходимой степенью гладкости.

Примем следующую классификацию системы (1) [2, 3, 6]:

1) если $A(t)\equiv 0$ — нулевая матрица, то такие задачи называют системами интегральных уравнений Вольтерры первого рода (ИУВ1);

2) если $A(t)\equiv E$ — единичная матрица или $\det A(t)\ne 0$ $\forall t\in[0,1]$, то такие задачи называют системами интегральных уравнений Вольтерры второго рода (ИУВ2);

3) если $\det A(t_j)=0$, $t_j\in[0,1]$, то такие задачи называют системами интегральных уравнений Вольтерры третьего рода (ИУВ3), а точки t_j, в которых происходит вырождение матрицы $A(t)$, — особыми точками.

В настоящее время качественная теория и численные методы для ИУВ2, в том числе и с различными особенностями в ядре, достаточно полно разработана [2—4, 6]. Известны многочисленные публикации по различным аспектам качественной теории и численному решению некоторых классов ИУВ1 и ИУВ3 [1, 3, 5 —7, 17].

Рассмотрим систему (1) при условии

$$\det A(t)\equiv 0. \tag{2}$$

Такие уравнения принято называть интегро-алгебраическими уравнениями (ИАУ), а также системами интегральных уравнений Вольтерры четвертого рода [12] и интегральными аналогами дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) [18]. Если $x(t)$ — функция, то рассматриваемые задачи будут ИУВ1:

$$\int_0^t K(t,\tau)\,x(\tau)\,d\tau = f(t),\ 0\le\tau\le t\le 1, \tag{3}$$

где $K(t,\tau)$ и $f(t)$ — заданные функции.

Известно [2, 7, 8], что при выполнении условий

$$K(t,\tau)\big|_{\tau=t} = K'_t(t,\tau)\big|_{\tau=t} = \ldots K(t,\tau)^{(r-2)}_{t^{r-2}}(t,\tau)\Big|_{\tau=t} = 0,$$

$$K^{(r-1)}_{t^{r-1}}(t,\tau)\Big|_{\tau=t} = k(t) > 0,\ t\in[0,1], \tag{4}$$

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(r-1)}(0) = 0$$

уравнение (3) имеет единственное непрерывное решение и эквивалентно ИУВ2

$$x(t) + \int_0^t K_1(t,\tau)\,x(\tau)\,d\tau = \varphi(t),\ 0\le\tau\le t\le 1,$$

где

$$K_1(t,\tau)\big| = \frac{K^{(r)}_{t^r}(t,\tau)}{k(t)},\quad \varphi(t) = \frac{f^{(r)}(t)}{k(t)}.$$

Число r принято называть индексом некорректности уравнения (3) [1, 19]. В настоящее время разработаны методы решения уравнений (3) с индексом некорректности $r=1$ или $r=2$ [1, 5—7, 17]. Многие численные алгоритмы для уравнения (3) при $r>2$ порождают неустойчивые процессы.

Для того чтобы обосновать численные методы решения ИАУ (1), необходимо ответить на непростые вопросы: имеет ли исходная задача решение, и если имеет, то единственное ли оно. Приведем примеры.

Рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d(t-\tau) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(\tau) \\ v(\tau) \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где a, b, c, d — скалярные параметры. Если $a\ne 0$, $b\ne 0$, $c\ne 0$, $d\ne 0$, $\varphi(t) = \psi(t) = 0$ и $ad - cb = 0$, то нетрудно убедиться, что данная система имеет множество решений $u = g(t)$, $v = -ag'(t)/b$, где $g'(t)$ — любая непрерывно дифференцируемая функция.

Следует заметить, что точки, в которых матрица $A(t)$ меняет свой ранг, не всегда являются особыми. Например, в системе

$$\begin{pmatrix} \omega(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}+\int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(\tau) \\ v(\tau) \end{pmatrix} d\tau=\begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad f(0)=0, \tag{6}$$

точки, в которых $\omega(t)$ обращается в нуль, являются особыми. В частности, если $\omega(t)=-t$, то данная система имеет семейство решений $u(t)=c$, $v(t)=f'(t)$, где c — произвольное число.

Аналогичная предыдущей система

$$\begin{pmatrix} \omega(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}+\int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(\tau) \\ v(\tau) \end{pmatrix} d\tau=\begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad f(0)=0, \tag{7}$$

имеет единственное решение $u(t)=f'(t)$, $v(t)=-(\omega(t)\, f'(t))'$ при любых значениях $f(t)$ и $\omega(t)$, удовлетворяющих условиям $f(0)=0$, $\omega(0)\, f'(0)=0$ и $f(t)\in C^1$, $\omega(t)\, f'(t)\in C^1$. Для формулировки результата о существовании единственного решения системы (1) приведем необходимые сведения.

Матричные пучки и многочлены. Приведем следующие определения.

Определение 1 [15]. Пучком матриц назовем сумму $\lambda A+B$, где λ — скаляр; A и B — $(m\times n)$-матрицы.

Определение 2 [14]. Если $m=n$ и определитель матрицы $\lambda A+B$ тождественно не равен нулю, то матричный пучок называют регулярным. В противном случае ($m\neq n$ или $\det(\lambda A+B)\equiv 0$) пучок называют сингулярным.

Определение 3 [14]. Индексом регулярного матричного пучка называют минимальное целое неотрицательное число l, при котором справедливо равенство

$$\operatorname{rank}\,((\lambda A+B)^{-1}A)^{l+1}=\operatorname{rank}\,((\lambda A+B)^{-1}A)^{l}.$$

Определение 4 [9]. Пучок переменных матриц $\lambda A(t)+B(t)$ удовлетворяет критерию «ранг—степень» (имеет простую структуру и индекс 1) на отрезке [0, 1], если $\operatorname{rank} A(t)=r_1=\mathrm{const}\ \forall\, t\in[0,1]$ и $\deg\det(\lambda A(t)+B(t))=$ $=r_1=\mathrm{const}\ \forall\, t\in[0,1]$. Здесь $\deg(\cdot)$ означает показатель степени полинома по λ.

Определение 5. Назовем λ-матрицей степени k матрицу вида

$$A(\lambda)=\sum_{j=0}^{l}\lambda^{k-j}A_j,$$

где $A_0, A_1, \ldots, A_k$ — матрицы одинаковых размерностей.

При исследовании существования единственного решения важное значение имеет следующее.

Определение 6 [18]. Квадратная λ-матрица

$$A(\lambda)=\sum_{j=0}^{k}\lambda^{k-j}A_j,\ \ A_0\neq 0,$$

обладает доминантным свойством (ДС), если deg det $A(\lambda)\geq k\times\operatorname{rank} A_0$.

Определение 7 [14, 16]. Матрица, обозначаемая далее A^-, называется полуобратной к матрице A, если она удовлетворяет матричному уравнению $AA A^- = A$, которое перепишем в виде $(E-AA^-)A=0$.

Если $\det A\neq 0$, то полуобратная матрица — единственная и совпадает с обратной, а если $\det A=0$, то A^- определена как неединственная. Одной из полуобратных матриц является псевдообратная матрица, которая существует и определена единственным способом для любой (в том числе и прямоугольной) матрицы A [16].

Рассмотрим свойства λ-матриц.

Свойство 1. Если $A(\lambda)$ — регулярная матрица, не обладающая ДС, то существует целое положительное число m такое, что матрица $\lambda^m A(\lambda)$ обладает ДС.

Свойство 2. Если матрица $A(\lambda)$ обладает ДС, то матрица $(E+\lambda(E-A_0A_0^-))A(\lambda)$ также обладает ДС.

Образуем цепочку λ-матриц по правилу

$$A^{(i)}(\lambda)=(E+\lambda\,(E-A_0^{(i-1)}A_0^{(i-1)-}))\,A^{(i-1)}(\lambda),\tag{8}$$

где $A_0^{(0)}=A_0$, $A_0^{(0)}(\lambda)=A_0(\lambda)$, $i=1,2,\ ...,\ p$. Здесь верхние индексы указывают номер итерации; $A^{(i-1)-}$ — полуобратная матрица к $A^{(i-1)}$. Опуская выкладки, приведем минимальное значение p из формулы (8), при котором в матрице

$$A^{(p)}(\lambda)=\sum_{j=0}^{k}\lambda^{k-j}A_j^{(p)}$$

матрица $A_0^{(p)}$ невырождена:

$$p=\begin{cases}(nk-s)/(n-r), \text{ если } nk-s \text{ кратно } n-r,\\ [(nk-s)/(n-r)]+1 \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Здесь $[\cdot]$ — целая часть числа; $s=\deg\det A(\lambda)$; $r=\operatorname{rank} A_0$; n — размерность матрицы $A(\lambda)$. Приведенные выражения и свойство 1 позволяют вычислить индекс матричного пучка $\lambda A+B$ (см. определение 3) другим способом:

$$l=\begin{cases}(n-s)/(n-r), \text{ если } n-s \text{ кратно } n-r,\\ [(n-s)/(n-r)]+1 \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Здесь $s=\deg\det(\lambda A+B)$; $r=\operatorname{rank} A$.

Теоремы существования единственного решения ИАУ. Приведем достаточные условия существования единственного решения задачи (1).

Теорема 1 [9]. Пусть для задачи (1) выполнены условия:

1) элементы $A(t)$ и $K(t,\tau)$, $f(t)$ принадлежат классу C^1;

2) $\operatorname{rank} A(0)=\operatorname{rank}(A(0)|f(0))$;

3) $\operatorname{rank} A(t)=\deg\det(\lambda A(t)+B(t))=r_1=\text{const}\ \forall t\in[0,1]$.

Тогда задача (1) имеет единственное непрерывное решение.

Условие 2 теоремы 1 — это условие разрешимости системы линейных уравнений (теорема Кронекера—Капелли), условие 3 означает отсутствие на отрезке [0, 1] сингулярных точек. Например, в системе (6) $\operatorname{rank} A(t)=1$ и $\deg\det(\lambda A(t)+K(t,\tau))=1$, если $\omega(t)\neq 0$. Если $\omega(t_j)=0$, то в этих точках $\operatorname{rank} A(t)=0$ и $\deg\det(\lambda A(t)+K(t,\tau))=\deg(\omega(t)\lambda+1)=1$. Таким образом, в точках t_j ранг $A(t)$ и степень $\det(\lambda A(t)+K(t,\tau))$ являются переменными, т.е. в этих точках нарушается условие 3 теоремы.

В системе (7) $\deg\det(\lambda A(t)+K(t,\tau))=\deg(-1)=0$ при любых значениях $\omega(t)$. Следовательно, в этом случае результаты теоремы 1 неприменимы для анализа (в силу их достаточности).

Характеристикой сложности рассматриваемых задач является понятие индекса.

Определение 8. Минимальное число r, при котором существует линейный дифференциальный оператор,

$$L_r=Z_0(t)+Z_1(t)\frac{d}{dt}+\ldots+Z_r(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^r,$$

где $Z_j(t)$, $j=0,1,\ldots,r$, — $(n\times n)$-матрицы с непрерывными элементами, такой, что

$$L_r\circ\left(A(t)x(t)+\int_0^t K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau\right)=\overline{A}(t)x(t)+\int_0^t \overline{K}(t,\tau)\,x(\tau)\,d\tau,$$

где $\det\overline{A}(t)\neq 0\ \forall t\in[0,1]$, назовем индексом ИАУ (1). В частности, если для системы (1) выполнены условия теоремы 1, то ее индекс равен единице и оператор L_1 можно выбирать в виде

$$L_1=E+(E-A(t)A^{-}(t))\frac{d}{dt}$$

или

$$L_1 = A(t)A^{-}(t) + (E - A(t)A^{-}(t))\frac{d}{dt}.$$

Для интегральных уравнений первого рода (3) при условиях (4) определение 8 совпадает с понятием индекса некорректности. В этом случае оператор имеет вид $L_r = \left(\frac{d}{dt}\right)^r$.

Рассмотрим частный случай задачи (1):

$$Ax(t) + \int_0^t K(t-\tau)x(\tau)\,d\tau = f(t),\ 0 \le \tau \le t \le 1, \tag{9}$$

где A — постоянная квадратная матрица, $\det A = 0$. Для исследования вопроса о существовании единственного решения задачи (9) можно применять различные интегральные преобразования. Однако при таком подходе придется вычислять ряд несобственных интегралов, что является непростой задачей.

Выделим семейство задач (9), для которых приведем достаточно простое правило вычисления индекса и предложим редукцию к системе ИУВ2. Обозначим

$$A_0 = A,\ A_i = K^{(i-1)}(0),\ i = 1, 2, \ldots, r, \tag{10}$$

где A и $K(u)$ — те же матрицы, что и в исходном уравнении (9). Образуем цепочку уравнений

$$A^{(i)}x(t) + \int_0^t K_i(t-\tau)x(\tau)\,d\tau = f_i(t),\ 0 \le \tau \le t \le 1, \tag{11}$$

где

$$A^{(i)}x(t) = A^{(i-1)} + V_{i-1}K_{i-1}(0); \tag{12}$$

$$K_i(u) = K_{i-1}(u) + V_{i-1}K'_{i-1}(u); \tag{13}$$

$$f_i(t) = f_{i-1}(t) + V_{i-1}f'_{i-1}(t); \tag{14}$$

$$A^{(0)} = A,\ K_0(u) = K(u),\ f_0(t) = f(t);$$

$$V_{i-1} = E - A^{(i-1)}A^{(i-1)-};$$

$A^{(i-1)-}$ — полуобратная матрица к матрице $A^{(i-1)}$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Сформулируем без доказательства вывод о существовании единственного непрерывного решения и рассмотрим вычисление индекса ИАУ (9).

Теорема 2. Пусть для задачи (9) выполнены и следующие условия:

1) для ИАУ существует такое r, что матрица $A(\lambda)$ обладает ДС, где A_i вычисляется по формуле (10);

2) $\operatorname{rank} A^{(i)} = \operatorname{rank} (A^{(i)} | f_i(0))$, $i = 0, 1, \ldots, r-1$;

3) элементы правой части и ядра $K(u)$ принадлежат классу C^{r-1}.

Тогда:

1) исходное ИАУ (9) эквивалентно любой из ИАУ (11);

2) ИАУ (9) имеет единственное непрерывное решение;

3) при $i = r$ в системе (11) $\det A^{(r)} \neq 0$ (т.е. (11) при $i = r$ является системой ИУВ2).

Применим теорему 2 к неоднородной системе (5) с параметрами $a = 1$ и $c = 1$. Рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & d(t-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\tau) \\ v(\tau) \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \le \tau \le t \le 1, \tag{15}$$

где b и d — параметры. Вначале выясним, при каких условиях, накладываемых на правую часть и параметры b и d, данная система имеет единственное решение, и найдем его. Подставив в систему $t = 0$, получим условие $\psi(t) = 0$. Дифференцируя второе уравнение системы (15), находим

$$u(t) = \psi'(t) - d\int_0^t v(\tau)\, d\tau .$$

Подставляя это выражение в первое уравнение системы (15), получаем

$$\int_0^t (b-d)\, v(\tau)\, d\tau = \varphi(t) - \psi'(t) .$$

При выполнении условий $\varphi(0) - \psi'(0) = 0$ и $b \neq d$ последнее уравнение имеет единственное решение

$$v(t) = \frac{\varphi'(t) - \psi'(t)}{b-d} .$$

Применим для этой системы теорему 2. Вычисляем индекс системы (15). Матрица $\lambda A_0 + A_1 = \lambda A + K(0)$ не обладает ДС, так как $\operatorname{rank} A_0 = 1$, а $\deg \det (\lambda A + K(0)) = \deg (1) = 0$. Матрица

$$\lambda^2 A_0 + \lambda A_1 + A_2 = \lambda^2 A + \lambda K(0) + K'(s)|_{s=0}$$

обладает ДС при $b \neq d$, так как

$$\deg \det(\lambda^2 A + K(0) + K'(s)|_{s=0}) = \deg((d-b)\lambda^2) = 2 .$$

Следовательно, данная система имеет индекс 2, т.е. в цепочке (11) при $i=2$ получим систему ИУВ2.

Запишем уравнения (11) при $i=1$, $i=2$ и условия на правую часть. Согласно условию 2 теоремы 2 $\psi(0)=0$, а в системе

$$A^{(1)} x(t) + \int_0^t K_1(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau = f_1(t), \tag{16}$$

матрицы $A^{(1)}$, $K_1(t-\tau)$ и $f_1^{(t)}$ определены в виде (см. формулы (12)—(14))

$$A^{(1)} = A + VK(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_1(t-\tau) = K(t-\tau) + VK'_t(t-\tau) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & d(t-\tau+1) \end{pmatrix},$$

$$f_1^{(t)} = f(t) + Vf' = (\varphi(t), \psi(t) + \psi'(t))^T, \; V = E - AA^+ .$$

Здесь и далее для простоты вычислений положим, что $A^- = A^+$ — псевдообратная матрица [14—16].

Для системы интегральных уравнений (16) согласно условию 2 теоремы 2 ($\operatorname{rank} A^{(1)} = \operatorname{rank}(A^{(1)} | f_1(0))$) находим $\psi(0) + +\psi'(0) - \varphi(0) = 0$, а с учетом $\psi(0)=0$ получаем $\varphi(0) - \psi'(0) = 0$.

В системе

$$A^{(2)} x(t) + \int_0^t K_2(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau = f_2(t), \tag{17}$$

учитывая, что

$$V_1 = E - A^{(1)} A^{(1)+} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix},$$

матрицы $A^{(2)}$, $K_2(t-\tau)$ и f_2 определены в виде

$$A^{(2)} = A^{(1)} + V_1 K_1(0) = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5(b-d) \\ 1{,}5 & -0{,}5(b-d) \end{pmatrix},$$

$$K_2(t-\tau)=K_1(t-\tau)+V_1K_t'(t-\tau)=\begin{pmatrix}0 & b-0{,}5d\\ 1 & d\,(t-\tau+1{,}5)\end{pmatrix},$$

$$f_2(t)=f_1(t)+V_1f'(t)=(\varphi(t)+0{,}5(\varphi'(t)-\psi'(t)-$$

$$-\psi''(t),\ \psi(t)+1{,}5\psi'(t)+0{,}5(\psi''(t)-\varphi'(t))^T,$$

$$V_1=E-A^{(1)}A^{(1)+}\ .$$

Поскольку по условию задачи $b\neq d$ и $\det A^{(2)}=d-b$, система (17) является системой ИУВ2. Непосредственной проверкой убеждаемся, что в данном примере решения уравнений системы (11) при $i=1{,}2$ совпадают с решением исходного уравнения.

Выводы

Свойства систем интегральных уравнений с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью существенно отличаются от свойств, характеризующих качество традиционных видов интегральных уравнений Вольтерры I и II рода. Данный вывод следует из приведенных определений характеристик элементов рассматриваемых систем уравнений и доказанных теорем о существовании и единственности их решений.

The article deals with a system of Volterra integral equations with a singular matrix before the principal part. The fundamental differences of such systems from integral equations of the first and the second kinds have been established. The conditions of existence of unique continuous solution have been defined.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Апарцин А.С.* Неклассические уравнения Вольтерры I рода: теория и численные методы. — Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 1999. — 192 с.
2. *Верлань А.Ф. Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. — Киев : Наук. Думка, 1986. — 543 с.
3. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. — М. : Наука, 1975. — 304 с.
4. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. —Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
5. *Brunner H.* Collocation Methods for Volterra Integral and Related Funktional Differential Equations. — Cambridge University Press, 2004. — 597 c.
6. *Brunner H., van der Houwen P.J.* The Numerical Solution of Volterra Equations. CWI Monographs 3. — North-Holland, Amsterdam,1986. — 588 c.
7. *Linz P.* Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations. — Studies in Applied Mathematics. — Philadelphia, 1985. — 227 c.
8. *Brunner H.* 1896—1996: One Hundred Years of Volterra Integral Equations of the First Kind // Applied Numerical Mathematics. — 1997. — Vol. 24. — P. 83—93.

9. *Чистяков В.Ф.* О сингулярных системах обыкновенных дифференциальных уравнений и их интегральных аналогах // Функции Ляпунова и их применения. — Новосибирск : Наука, 1987. — С. 231—239.
10. *Булатов М.В., Будникова О.С.* Исследование многошаговых методов для решения интегро-алгебраических уравнений: построение областей устойчивости // Журн. вычислительной математики и математической физики. — 2013. — **53**, № 9. — С. 1448— 1459.
11. *Булатов М.В.* Регуляризация вырожденных систем интегральных уравнений// Там же. — 2002. — **42**, № 3. — С. 58—63.
12. *Чистяков В.Ф.* О некоторых свойствах интегральных уравнений Вольтерры 4-го рода с ядром типа свертки // Математические заметки. — 2006. — **80** (1). — С. 115—118.
13. *Hadizadeh M., Ghoreishi F., Pishbin S.* Jacobi Spectral Solution for Integral Algebraic Equations of Index-2 // Applied Numerical Mathematics. — 2011. — Vol. 161 (1). — P. 131—148.
14. *Бояринцев Ю.Е.* Регулярные и сингулярные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. — Новосибирск : Наука, 1980. — 222 с.
15. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М. : Наука, 1966. — 576 с.
16. *Ваарман О.* Обобщенные обратные отображения. —Таллинн : Валгус, 1988. — 120 с.
17. *Тен Мен Ян.* Приближенное решение линейных интегральных уравнений Вольтерры I рода: Автореф. дис.... канд. физ.-мат. наук . — Иркутск, 1985. — 160 с.
18. *Bulatov M.V., Chistyakov V.F.* The properties of differential-algebraic systems and their integral analogs// Preprint. — Memorial University of Newfoundland, 1997. — P. 35.
19. *Апарцин А.С.* Дискретизационные методы регуляризации некоторых интегральных уравнений первого рода // Сб. тр. «Методы численного анализа и оптимизации». — Новосибирск : Наука, 1987. — С. 263—297.

Поступила 14.02.14

БУЛАТОВ Михаил Валерьянович, д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. Ин-та динамики систем и теории управления СО РАН (г. Иркутск). В 1982 г. окончил Иркутский госуниверситет. Область научных исследований — качественная теория дифференциально-алгебраических и интегро-алгебраических уравнений, численное решение обыкновенных дифференциальных, дифференциально-алгебраических, интегро-алгебраических уравнений и интегральных уравнений Вольтерры.