УДК 536.24

В.И. Гаврыш, д-р техн. наук
Национальний университет «Львовская политехника»,
(Украина, 79013, Львов, ул. С.Бандеры, 12,
тел. (032) 2582578, e-mail: ikni.pz@gmail.com)

Численно-аналитическое решение нелинейной стационарной задачи теплопроводности для бесконечной термочувствительной многослойной пластины

Предложен метод решения нелинейных граничных задач теплопроводности на примере бесконечной термочувствительной многослойной пластины с теплоизолированными лицевыми поверхностями, конвективным теплообменом и локально сосредоточенными внутренними источниками тепла. Выполнен численный анализ температурного поля для двухслойной пластины. Приведены результаты эксперимента.

Запропоновано метод розв'язування нелінійних крайових задач теплопровідності на прикладі нескінченної термочутливої багатошарової пластини з теплоізольованими лицевими поверхнями, конвективним теплообміном і локально зосередженими внутрішніми джерелами тепла. Виконано числовий аналіз температурного поля для двошарової пластини. Наведено результати експерименту.

Ключевые слова: *температура, теплопроводность, конвективный теплообмен, идеальный тепловой контакт, термочувствительные кусочно-однородные структуры.*

Исследование процессов теплопроводности в элементах микроэлектронных устройств способствует более глубокому пониманию происходящих в них микропроцессов, связанных с движением и рассеиванием элементарных частиц. Ни одно из явлений переноса не дает таких всеобъемлющих сведений о колебаниях решетки, о возбужденном состоянии электронов, о взаимодействии электронов с решеткой в полупроводниках, как теплопроводность. В элементах микроэлектронных устройств, в которых протекает электрический ток, всегда происходит неоднородное выделение тепла, а в некоторых случаях создается большой градиент температуры. Поэтому эффективность работы микроэлектронных устройств существенно зависит от температурных режимов, устанавливающихся в процессе нагревания. Это особенно важно для устройств, в которых применяются тонкопленочные слои.

© В.И. Гаврыш, 2014

В процессе проектирования и эксплуатации отдельных элементов и узлов микроэлектронных устройств, работающих в широком диапазоне температур при воздействии высоких тепловых нагрузок, возникает ряд сложных инженерных проблем, для решения которых необходимо иметь достоверную информацию об их тепловом состоянии и температурных режимах. Такую информацию можно получить только расчетным путем, так как экспериментальные исследования невозможны вследствие высоких температур и герметизирующих свойств систем теплоотвода. Это, в свою очередь, требует решения сложных нелинейных краевых задач теплопроводности, полученных на основе математических моделей, максимально отражающих существенные аспекты теплофизических процессов, осуществляемых в рассматриваемых термочувствительных конструкциях.

Определению теплового состояния однородных и неоднородных конструкций с учетом термочувствительности (зависимости теплофизических параметров от температуры) посвящены многие исследования.

В работах [1—6] рассмотрена тепловая модель осесимметричной биполярной транзисторной структуры с неоднородностью теплофизического типа в области контакта кристалл—теплоотвод и температурно зависимой плотностью тока. Найдены неоднородные распределения плотности теплового потока и температуры в активной области в зависимости от модельных параметров, характеризующих размер дефекта Ks и его теплофизические свойства Kd. Показано, что показатель неоднородности температуры нелинейно зависит от параметра Ks. Для различных значений величин модельных параметров полупроводниковой структуры проведена оценка отношения максимальных температур активной области кристалла с дефектом и без него. Найдено распределение температуры на поверхности транзисторной структуры в условиях изменения напряжения коллектор — база и тока коллектора [7] .

В работе [8] сформулирована задача стационарной теплопроводности для слоистых пластин постоянной и переменной толщины в пространственной постановке. Методом начальных функций трехмерная задача сведена к двумерной. Для пластины со слоями переменной толщины получена система уравнений с переменными коэффициентами. Проанализированы полученные двумерные краевые задачи. Для пластин с однородными слоями постоянной толщины построено решение в аналитической форме и показано, что это решение совпадает с решением, полученным методом разделения переменных.

В работе [9] исследованы теплоперенос и напряженное состояние в слоистой пластине с составляющими различной прозрачности, соединенными тонким промежуточным слоем, в условиях теплового облучения со стороны частично прозрачного слоя. С помощью эффективного коэффициента отражения на поверхности контакта получены приближенные соотношения для определения поля излучения в основном частично прозрачном слое. Найдены приближенные соотношения для напряжений в пластине, учитывающие характеристики жесткости на изгиб и растяжение промежуточного слоя. Нелинейная краевая задача теплопереноса решена методом конечных разностей с применением процедуры квазилинеаризации. Предложен метод решения одномерного нестационарного уравнения теплопроводности. Использование метода функций Грина позволило преобразовать полученное уравнение к нелинейному интегральному уравнению Вольтерры второго рода относительно температуры, которое решается методом квадратичных форм. Полученная система рекуррентных уравнений решена численно. Проанализировано влияние нелинейности на профили температуры [10].

С использованием операционного метода и метода последовательных интервалов решены нелинейные задачи нестационарной теплопроводности с переменным коэффициентом теплообмена, с нелинейностью первого и второго рода, а также задачи теплопроводности с общей нелинейностью [11].

Работы [12—17] посвящены развитию методов решения стационарных нелинейных задач теплопроводности для конструкций кусочно-однородной структуры (слоистые, однородные и слоистые с инородными включениями).

Рассмотрим метод решения стационарных нелинейных задач теплопроводности для термочувствительных кусочно-однородных (слоистых) структур на примере бесконечной пластины с теплоизолированными лицевыми поверхностями, на границах которой осуществляется конвективный теплообмен с внешней средой и в одном из слоев локально сосредоточены внутренние источники тепла.

Постановка задачи. Рассмотрим изотропную (относительно теплофизических параметров) термочувствительную многослойную бесконечную пластину толщиной 2δ с теплоизолированными лицевыми поверхностями $|z|=\delta$, состоящую из n разнородных слоев с различными геометрическими и теплофизическими параметрами, отнесенную к декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ с началом на одной из ее граничных поверхностей (рис.1).

В области параллелепипеда, имеющего j-й слой ($j=\overline{2, n-1}$) пластины объемом $4h\delta\,(y_j - y_{j-1})$, действуют равномерно распределенные внутренние источники тепла мощностью $q_0 = \mathrm{const}$. На граничных поверхностях $K_k = \{(x, y_k, z): |x|<\infty, |z|\le\delta\}$, $k=\overline{1, n-1}$, слоев осуществляется идеальный тепловой контакт, а на граничных поверхностях $K_0 = \{(x, 0, z): |x|<\infty, |z|\le\delta\}$,

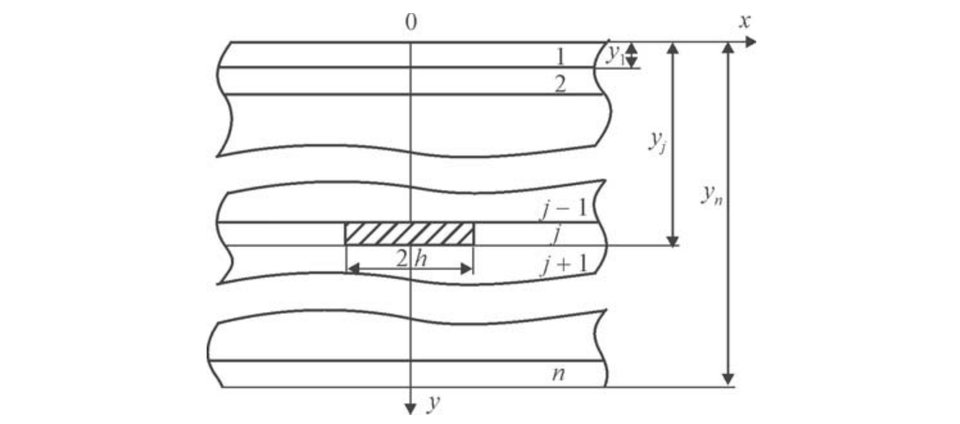

Рис. 1. Сечение изотропной термочувствительной многослойной бесконечной пластины плоскостью $z=0$

$K_n=\{(x,y_n,z):|x|<\infty,|z|\le\delta\}$ пластины происходит конвективный теплообмен с внешней средой постоянной температуры t_c = const.

Математическая модель задачи. Распределение стационарного температурного поля $t(x,y)$ в многослойной термочувствительной бесконечной пластине находим в результате решения нелинейного уравнения теплопроводности [18, 19]

$$\operatorname{div}[\lambda(y,t)\operatorname{grad} t]=-q_0N(x,h)\ N_1(y,\,y_{j-1}) \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\lambda_1(t)\left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y=0}=\alpha_0(t|_{y=0}-t_c),\ \lambda_n(t)\left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y=y_n}=\alpha_n(t_c-t|_{y=y_n}),$$

$$t\,|_{|x|\to\infty}=0,\ \ \left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{|x|\to\infty}=0, \tag{2}$$

где $\lambda(y,t)$ — коэффициент теплопроводности неоднородной пластины,

$$\lambda(y,t)=\lambda_1(t)+\sum_{k=1}^{n-1}[\lambda_{k+1}(t)-\lambda_k(t)]S_-(y-y_k)\,;$$

$\lambda_k(t)$ — коэффициент теплопроводности k-го слоя пластины; α_0 и α_n — коэффициенты теплоотдачи с граничных поверхностей K_0 и K_n пластины;

$N_1(y, y_{j-1}) = S_-(y-y_{j-1}) - S_-(y-y_j)$; $N(x, h) = S_-(x+h) - S_+(x-h)$; $S_\pm(\zeta)$ — асимметрические единичные функции [20],

$$S_\pm(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta > 0, \\ 0{,}5 \mp 0{,}5, & \zeta = 0, \\ 0, & \zeta < 0. \end{cases}$$

Введем функцию

$$\vartheta = \int_0^{t(x,y)} \lambda_1(\zeta)\, d\zeta + \sum_{k=1}^{n-1} S_-(y-y_k) \int_{t(x,y_k)}^{t(x,y)} [\lambda_{k+1}(\zeta) - \lambda_k(\zeta)]\, d\zeta, \tag{3}$$

продифференцировав которую по переменным x и y, получим

$$\begin{gathered} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \lambda(y,t)\frac{\partial t}{\partial x} - \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ [\lambda_{k+1}(t) - \lambda_k(t)] \frac{\partial t}{\partial x} \right\}\Bigg|_{y=y_k} S_-(y-y_k), \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \lambda(y,t)\frac{\partial t}{\partial y}. \end{gathered} \tag{4}$$

С учетом (4) исходное уравнение (1) примет следующий вид:

$$\Delta\vartheta = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \left[(\lambda_{k+1}(t) - \lambda_k(t)) \frac{\partial t}{\partial x} \right]\Bigg|_{y=y_k} S_-(y-y_k) \right\} - $$

$$- q_0 N(x, h)\, N_1(y, y_{j-1}). \tag{5}$$

Использовав соотношение (3), граничные условия (2) запишем в виде

$$\begin{gathered} \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right|_{y=0} = \alpha_0 (t|_{y=0} - t_c), \quad \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right|_{y=y_n} = \alpha_n (t_c - t|_{y=y_n}), \\ \vartheta|_{|x|\to\infty} = 0, \quad \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right|_{|x|\to\infty} = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Таким образом, нелинейная математическая модель (1), (2) с помощью функции (3) приведена к частично линеаризованной граничной задаче (5), (6).

Аппроксимируем функции $t(x, 0)$, $t(x, y_k)$ выражениями

$$t(x, y_k) = t_1^{(k)} + \sum_{l=1}^{m-1} (t_{l+1}^{(k)} - t_l^{(k)}) S_-(x - x_l), \tag{7}$$

где $k = \overline{0, n}$; $y_0 = 0$; $x_l \in]-x_*; x_*[$; $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_{m-1}$; m — число разбиений интервала $]-x_*; x_*[$; x_* — значение абсциссы, для которой температура практически равна t_c $(k=0,n)$ и нулю $(0<k<\overline{n})$ (определяется решением соответствующей линейной задачи); $t_l^{(k)}$, $l=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,n}$, — неизвестные аппроксимирующие значения. Подставив (7) в (5) и (6), получим линейную граничную задачу относительно функции ϑ:

$$\Delta\vartheta = -\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{m-1}(t_{l+1}^{(k)} - t_l^{(k)})[\lambda_{k+1}(t_{l+1}^{(k)}) -$$

$$-\lambda_k(t_{l+1}^{(k)})]\delta'_-(x-x_l)\,S_-(y-y_k) - q_0 N(x,h)\,N(y,y_{j-1}), \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right|_{y=0} = \alpha_0\left[t_1^{(0)} + \sum_{l=1}^{m-1}(t_{l+1}^{(0)} - t_l^{(0)})\,S_-(x-x_l) - t_c\right],$$

$$\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right|_{y=y_n} = -\alpha_n\left[t_1^{(n)} + \sum_{l=1}^{m-1}(t_{l+1}^{(n)} - t_l^{(n)})\,S_-(x-x_l) - t_c\right], \tag{9}$$

$$\vartheta\big|_{|x|\to\infty} = 0, \quad \left.\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right|_{|x|\to\infty} = 0.$$

Здесь $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа в декартовой прямоугольной системе координат; $\delta_-(\zeta) = \dfrac{dS_-(\zeta)}{d\zeta}$ — асимметрическая дельта-функция Дирака [20].

Решение граничной задачи. Применив интегральное преобразование Фурье по координате x к задаче (8), (9), получим обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2\overline{\vartheta}}{dy^2} - \xi^2\overline{\vartheta} = i\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left\{\xi\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{m-1} e^{i\xi x_l}(t_{l+1}^{(k)} - t_l^{(k)})[\lambda_{k+1}(t_{l+1}^{(k)}) - \lambda_k(t_{l+1}^{(k)})]\times\right.$$

$$\left.\times\, S_-(y-y_k) + 2q_0\frac{sh i\xi h}{\xi}\,N_1(y,y_{j-1})\right\} \tag{10}$$

и граничные условия

$$\left.\frac{d\overline{\vartheta}}{dy}\right|_{y=0} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\frac{i\alpha_0}{\xi}\sum_{l=1}^{m-1}(t_{l+1}^{(0)} - t_l^{(0)})\,e^{i\xi x_l},$$

$$\left.\frac{d\overline{\vartheta}}{dy}\right|_{y=y_n} = -\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\frac{i\alpha_n}{\xi}\sum_{l=1}^{m-1}(t_{l+1}^{(n)} - t_l^{(n)})\,e^{i\xi x_l}, \tag{11}$$

где $\overline{\vartheta}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi x}\vartheta dx$ — трансформанта функции ϑ; ξ — параметр интегрального преобразования Фурье; $i=\sqrt{-1}$ — мнимая единица.

Общее решение уравнения (10) находим методом вариации постоянных в следующем виде:

$$\overline{\vartheta}=C_1e^{\xi y}+C_2e^{-\xi y}-\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\frac{i}{\xi}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{m-1}e^{i\xi x_l}(t_{l+1}^{(k)}-t_l^{(k)})[\lambda_{k+1}(t_{l+1}^{(k)})-\lambda_k(t_{l+1}^{(k)})]\times\right.$$

$$\times(1-ch\xi(y-y_k))\,S_-(y-y_k)+\frac{2q_0 sh\,i\xi h}{\xi^2}\times$$

$$\left.\times[N_1(y,y_{j-1})-ch\xi(y-y_{j-1})S_-(y-y_{j-1})+ch\xi(y-y_j)S_-(y-y_j)\right\},$$

где C_1,C_2 — постоянные интегрирования. Использовав граничные условия (11), получим частное решение задачи (10), (11):

$$\overline{\vartheta}=-\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\frac{i}{\xi}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{m-1}e^{i\xi x_l}(t_{l+1}^{(k)}-t_l^{(k)})[\lambda_{k+1}(t_{l+1}^{(k)})-\lambda_k(t_{l+1}^{(k)})]\times\right.$$

$$\times\left[(1-ch\xi(y-y_k))\,S_-(y-y_k)+ch\xi y\,\frac{sh\xi(y_n-y_k)}{sh\xi y_n}\right]+$$

$$+\frac{2q_0e^{i\xi h}}{\xi^2}[N_1(y,y_{j-1})-ch\xi(y-y_{j-1})S_-(y-y_{j-1})+$$

$$\left.+ch\xi(y-y_j)S_-(y-y_j)+ch\xi y\,\frac{sh\xi(y_n-y_{j-1})-sh\xi(y_n-y_j)}{sh\xi y_n}\right]+$$

$$\left.+\frac{1}{\xi sh\xi y_n}\left[\alpha_n\sum_{l=1}^{m-1}e^{i\xi x_l}(t_{l+1}^{(n)}-t_l^{(n)})\,ch\xi y+\alpha_0\sum_{l=1}^{m-1}e^{i\xi x_l}(t_{l+1}^{(0)}-t_l^{(0)})\,ch\xi(y-y_n)\right]\right\}. \quad (12)$$

Применив обратное интегральное преобразование Фурье к соотношению (12), найдем выражение для функции ϑ:

$$\vartheta=-\frac{1}{\pi}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{m-1}(t_{l+1}^{(k)}-t_l^{(k)})[\lambda_{k+1}(t_{l+1}^{(k)})-\lambda_k(t_{l+1}^{(k)})]\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin\xi(x-x_l)}{\xi}\times\right.$$

$$\times\left[(1-ch\xi(y-y_k))\,S_-(y-y_k)+\frac{sh\xi(y_n-y_k)}{sh\xi y_n}\,ch\xi y\right]d\xi+$$

$$+q_0\int_0^\infty\frac{[\sin\xi(x-h)-\sin\xi(x+h)]}{\xi^3}\Bigg(N_1(y,y_{j-1})-ch\xi(y-y_{j-1})S_-(y-y_{j-1})+$$

$$+ch\xi(y-y_j)\,S_-(y-y_j)+ch\xi y\,\frac{sh\xi(y_n-y_{j-1})-sh\xi(y_n-y_j)}{sh\xi y_n}\Bigg)d\xi+$$

$$+\alpha_n\sum_{l=1}^{m-1}(t_{l+1}^{(n)}-t_l^{(n)})\int_0^\infty\frac{\sin\xi(x-x_l)}{\xi^2 sh\xi y_n}\,ch\xi y d\xi+$$

$$+\alpha_0\sum_{l=1}^{m-1}(t_{l+1}^{(0)}-t_l^{(0)})\int_0^\infty\frac{\sin\xi(x-x_l)}{\xi^2 sh\xi y_n}\,ch\xi(y-y_n)\,d\xi\Bigg\}. \qquad (13)$$

Подставив выражения зависимости коэффициента теплопроводности от температуры для каждого из слоев пластины в соотношения (3), (13), после некоторых преобразований получим систему нелинейных уравнений для определения неизвестных аппроксимирующих значений температуры $t_l^{(k)}$, $k=\overline{0,n-1}$, $l=\overline{1,m}$. Искомое температурное поле для рассматриваемой системы определяем с помощью полученного нелинейного уравнения после подстановки в (3), (13) конкретных выражений зависимостей коэффициента теплопроводности от температуры для материалов каждого слоя пластины.

Расчетные формулы для трехслойной пластины. Рассмотрим пластину, состоящую из трех слоев, с внутренними источниками тепла в среднем слое ($n=3$, $j=2$). Пусть зависимость коэффициента теплопроводности от температуры для материалов каждого из слоев пластины, которая используется для решения многих практических задач, описывается соотношением $\lambda(t)=\lambda^0(1-kt)$ [21, 22], где λ^0 и k — опорный и температурный коэффициенты теплопроводности. Из выражений (3), (13) получим формулы для определения температуры t:

в области $0\le y<y_1$ —

$$t=(1-\sqrt{1-2k_1\vartheta/\lambda_1^0})/k_1, \qquad (14)$$

в области $y_1\le y<y_2$ —

$$t=(1-\sqrt{1-2k_2(\vartheta/\lambda_2^0+\vartheta_1^*)})/k_2, \qquad (15)$$

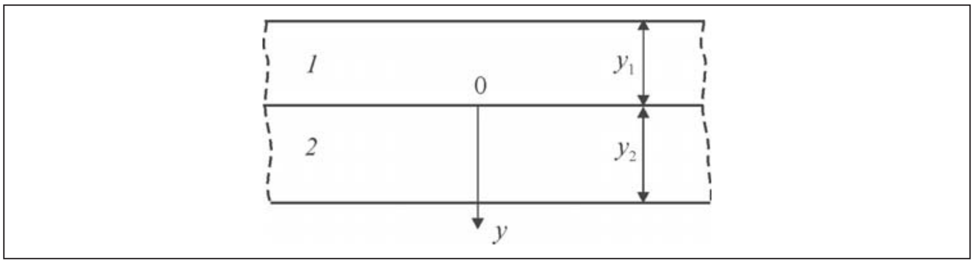

Рис. 2. Двухслойная термочувствительная бесконечная пластина

в области $y_2 \le y \le y_3$ —

$$t = (1 - \sqrt{1 - 2k_3(\vartheta / \lambda_3^0 + \vartheta_2^*)}) / k_3, \tag{16}$$

где

$$\vartheta_1^* = \left\{ \left[1 - \lambda_1^0 / \lambda_2^0 + \frac{1}{2} (k_1 \lambda_1^0 / \lambda_2^0 - k_2)\, t \right] t \right\} \Big|_{y=y_1}; \; t|_{y=y_1} = (1 - \sqrt{1 - 2k_1 \vartheta|_{y=y_1} / \lambda_1^0}) / k_1;$$

$$\vartheta_2^* = \left\{ \left[1 - \lambda_2^0 / \lambda_3^0 + \frac{1}{2} (k_2 \lambda_2^0 / \lambda_3^0 - k_3)\, t \right] t \right\} \Big|_{y=y_2} +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_3^0} \left\{ \left[\lambda_2^0 - \lambda_1^0 + \frac{1}{2} (k_1 \lambda_1^0 - k_2 \lambda_2^0)\, t \right] t \right\} \Big|_{y=y_1};$$

$$t|_{y=y_2} = (1 - \sqrt{1 - 2k_2 (\vartheta|_{y=y_2} / \lambda_2^0 + \vartheta_1^*)}) / k_2 .$$

Формулы (14)—(16) полностью описывают распределение температуры в термочувствительной многослойной бесконечной пластине с теплоизолированными лицевыми поверхностями, конвективным теплообменом и локально сосредоточенными внутренними источниками тепла.

Пример. Рассмотрим пластину, состоящую из двух слоев с равномерно распределенными источниками тепла на поверхностях сопряжения слоев (рис. 2). Предположим, что на граничных поверхностях пластины $y = -y_1$, $y = y_2$ температура соответственно составляет $t_1 = 0$, $t_2 = 700$ °С. Для рассматриваемой системы соотношения (1)—(5) и (13) соответственно примут вид

$$\frac{d}{dy} \left[\lambda(y, t) \frac{dt}{dy} \right] = -q_0 \delta(y), \;\; t|_{y=-y_1} = t_1, \;\; t|_{y=y_2} = t_2,$$

$$\vartheta = \int_{t_1}^{t} \lambda_1(\zeta)\, d\zeta + S_-(y) \int_{t_1}^{t} [\lambda_2(\zeta) - \lambda_1(\zeta)]\, d\zeta,$$

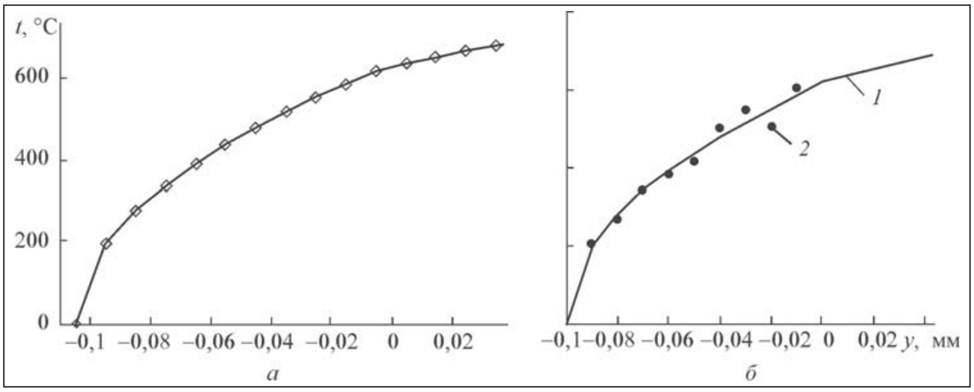

Рис. 3. Зависимость температуры термочувствительной пластины от пространственной координаты *y*: *а* — численные расчеты на модели в диапазоне температур от нуля до 700 °С; *б* — *1* — расчетная кривая; *2*— экспериментальные значения

$$\frac{d^2\vartheta}{dy^2} = -q_0\delta(y),\ \ \vartheta|_{y=-y_1} = 0,\ \ \vartheta|_{y=y_2} = \int_{t_1}^{t_2}\lambda_1(t)\,dt + \int_{t_1}^{t_2}[\lambda_2(t)-\lambda_1(t)]\,dt,$$

$$\vartheta = \frac{y+y_1}{y_1+y_2}\left\{y_2q_0 + \int_{t_1}^{t}\lambda_1(\zeta)\,d\zeta + S_-(y)\int_{t_1}^{t}[\lambda_2(\zeta)-\lambda_1(\zeta)]\,d\zeta\right\} - yq_0S(y),$$

где $\lambda(y,t) = \lambda_1(t) + [\lambda_2(t)-\lambda_1(t)]S_-(y)$; $\delta(y)$ — дельта-функция Дирака; $S(y)$— симметрическая единичная функция. В качестве материалов слоев пластины возьмем сталь У12 и 08. В диапазоне температур от нуля до 700 °С эти материалы описываются следующими зависимостями коэффициента теплопроводности от температуры:

$$\lambda_1(t) = 47{,}5\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{град}}\left(1+0{,}37\frac{1}{\text{град}}\,t\right),\ \ \lambda_2(t) = 64{,}5\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{град}}\left(1+0{,}49\frac{1}{\text{град}}\,t\right).$$

Распределение температуры в рассматриваемой структуре определяется из квадратного уравнения для первого слоя,

$$\lambda_1^0k_1t^2 - 2\lambda_1^0t + \lambda_1^0t_1(2-k_1t_1) + \frac{y+y_1}{y_1+y_2}\{2y_2q_0 - \lambda_1^0t_1(2-k_1t_1) + \lambda_2^0t_2(2-k_2t_2) +$$
$$+\ t_0[\lambda_1^0(2-k_1t_0) - \lambda_2^0(2-k_2t_0)]\} = 0,$$

и для второго слоя —

$$\lambda_2^0k_2t^2 - 2\lambda_2^0t + \lambda_1^0t_1(2-k_1t_1) - \lambda_1^0t_0(2-k_1t_0) + \lambda_2^0t_0(2-k_2t_0) + \frac{y+y_1}{y_1+y_2}\{2y_2q_0 -$$
$$-\lambda_1^0t_1(2-k_1t_1) + \lambda_2^0t_2(2-k_2t_2) + t_0[\lambda_1^0(2-k_1t_0) - \lambda_2^0(2-k_2t_0)]\} - 2yq_0 = 0\,.$$

Здесь $t_0 = t(0)$ и определяется из квадратного уравнения

$$[\lambda_1^0 k_1 + \frac{y_1}{y_1 + y_2}(\lambda_2^0 k_2 - \lambda_1^0 k_1)]\, t_0^2 - 2[\lambda_1^0 + \frac{y_1}{y_1 + y_2}(\lambda_2^0 - \lambda_1^0)]\, t_0 + \lambda_1^0 t_1 (2 - k_1 t_1) +$$

$$+ \frac{y_1}{y_1 + y_2}[2 y_2 q_0 - \lambda_1^0 t_1 (2 - k_1 t_1) + \lambda_2^0 t_2 (2 - k_2 t_2)] = 0 .$$

Результаты численных расчетов температурного поля, выполненных с помощью математической модели, адекватны реальному физическому процессу (рис. 3, *а*). Максимальная относительная ошибка между расчетными значениями температуры и результатами эксперимента составляет 15 % (рис. 3, *б*).

Выводы

Предложенная кусочно-линейная аппроксимация температуры на граничных поверхностях инородных слоев и пластины дала возможность полностью линеаризовать задачу, численно-аналитическое решение которой получено с использованием интегрального преобразования Фурье.

A method has been proposed for solving the nonlinear boundary value problems of heat conduction as an example of an infinite plate with temperature-sensitive multilayer insulated facial surfaces, convective heat transfer and locally focused internal heat sources. A numerical analysis of temperature field for the two-layer plate has been done with results of the experiment presented.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Carpinteri A., Paggi M.* Thermoelastic Mismatch in Nonhomogeneous Beams // J. Eng. Math. — 2008. — 61, No. 2—4. — P. 371—384.
2. *Noda N.* Thermal Stresses in Materials with Temperature-dependent Properties // Appl. Mech. Rev. — 1991. — **44**. — P. 383—397.
3. *Otao Y., Tanigawa O., Ishimaru O.* Optimization of Material Composition of Functionality Graded Plate for Thermal Stress Relaxation Using a Genetic Algorithm // J. Therm. Stresses. — 2000. — **23**. — P. 257—271.
4. *Tanigawa Y., Akai T., Kawamura R.* Transient Heat Conduction and Thermal Stress Problems of a Nonhomogeneous Plate With Temperature-dependent Material Properties // Ibid. — 1996. — **19**, No. 1. — P. 77—102.
5. *Tanigawa Y., Otao Y.* Transient Thermoelastic Analysis of Functionally Graded Plate with Temperature-dependent Material Properties Taking into Account the Thermal Radiation // Nihon Kikai Gakkai Nenji Taikai Koen Ronbunshu. — 2002. — **2**. — P. 133—134.
6. *Yangian Xu, Daihui Tu.* Analysis of Steady Thermal Stress in a ZrO2/FGM/Ti-6Al-4V Composite ECBF Plate with Temperature-dependent Material Properties by NFEM // 2009-WASE Int. Conf. on Informa. Eng. — Vol. **2 —2.** — P. 433—436.
7. *Сергеев В.А., Ходаков А.М.* Тепловая модель биполярной транзисторной структуры с неоднородностью в области контакта кристалла с теплоотводом // Электронная техника. Сер. 2. Полупроводниковые приборы. — 2010. — № 1. — С. 12—18.

8. *Немировский Ю.В., Янковский А.П.* Решение стационарной задачи теплопроводности слоистых анизотропных неоднородных пластин методом начальных функций // Мат. методы та физ.-мех. поля. — 2008. — **51**, №2. — С. 222—238.
9. *Турій О.* Нелінійна контактно-крайова задача термомеханіки для опромінюваної двошарової пластини, з'єднаної проміжковим шаром // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2008. — Вип. 8. — С. 118—132.
10. *Белик В.Д., Урюков Б.А., Фролов Г.А., Ткаченко Г.В.* Численно-аналитический метод решения нелинейного нестационарного уравнения теплопроводности // Инжинерно-физический журнал. — 2008. — **81**, № 6. — С. 1058—1062.
11. *Берлов О.В., Веселовський В.В.* Розв'язок нелінійних задач теплопровідності для складених елементів конструкцій // Металургійна теплотехніка: Зб. наук. праць Національної металургійної академії України. — 2008. — С. 20—30.
12. *Барвінський А.Ф., Гавриш В.І.* Нелінійна задача теплопровідності для неоднорідного шару з внутрішніми джерелами тепла // Проблемы машиностроения. — 2009. — **12**, № 1. — С. 47—53.
13. *Гавриш В.І., Федасюк Д.В.* Метод розрахунку температурних полів для термочутливої кусково-однорідної смуги із чужорідним включенням // Промышленная теплотехника. — 2010. — **32**, № 5. — С. 18—25.
14. *Гаврыш В.И.* Моделирование температурных режимов в термочувствительных микроэлектронных устройствах со сквозными инородными включениями // Электрон. моделирование. — 2012. — **34**, № 4.— С. 99—107.
15. *Gavrysh V.I.* Thermal State Modelling in Thermosensitive Elements of Microelectronic Devices with Reach-through Foreign Inclusions // Semiconductor Physics, Quantum Electronics & Optoelectronics. — 2012. — **15**, No 3. — P. 247—251.
16. *Gavrysh V.I.* Modelling the Temperature Conditions in the Three-dimensional Piecewise Homogeneous Elements of Microelectronic Devices // Ibid. — 2011. — **14**, No 4. — P. 478—482.
17. *Гавриш В.* Дослідження температурних режимів у термочутливій пластині з чужорідним наскрізним включенням // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2013. — Вип. 18. — С. 43—50.
18. *Коляно Ю.М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. — Киев: Наук. думка, 1992. — 280 с.
19. *Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. — М. : Наука, 1984. — 368 с.
20. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М. : Наука, 1977. — 720 с.
21. *Ломакин В.А.* Теория упругости неоднородных тел. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1976. — 376 с.
22. *Берман Р.* Теплопроводность твердых тел. — М. : Мир, 1979 . — 288 с.

Поступила 13.02.14;
после доработки 17.03.14

ГАВРЫШ Василий Иванович, д-р техн. наук, доцент, доцент Национального университета «Львовская политехника». В 1982 г. окончил Львовский госуниверситет им. И. Франко. Область научных исследований — моделирование процессов теплопроводности в телах кусочно-однородной структуры и разработка методов решения линейных и нелинейных граничных задач теплопроводности.