УДК 621.37:621.391

**В.В. Палагин,** д-р техн. наук,
**А.В. Гончаров,** канд. техн. наук, **В.М. Уманец**
Черкасский государственный технологический университет
(Украина, 18006, Черкассы, бул. Шевченко, 460,
тел. (0472) 730261, e-mail: palahin@yahoo.com)

# Полиномиальные алгоритмы совместного различения сигналов и оценивания их параметров на фоне асимметричных негауссовых помех

Использован полиномиальный подход к решению задачи совместного различения радиосигналов и оценивания их параметров на основе метода максимизации усеченного стохастического полинома и моментного критерия качества для решения многоальтернативных задач проверки статистических гипотез.

Використано поліноміальний підхід до розв'язку задачі сумісного розрізнення радіосигналів і оцінювання їх параметрів на основі методу максимізації зрізаного полінома і моментного критерію якості для розв'язування багатоальтернативних задач перевірки статистичних гіпотез.

*К л ю ч е в ы е  с л о в а*: *стохастические полиномы, моментные критерии качества, различение сигналов, негауссовы помехи.*

Существует два самостоятельных направления в теории статистической обработки сигналов. К одному из них относятся задачи проверки статистических гипотез, решение которых вытекает из определенного дискретного множества. Второе направление включает задачи оценивания параметров сигналов, которые, как правило, являются непрерывными величинами. В то же время, существует большое число задач, при решении которых необходимо совместить эти два направления теории статистической обработки сигналов, что приводит к построению двухфункциональных правил выбора решений при совместном различении сигналов и оценивании их параметров, имеющих случайный характер [1, 2].

Для построения таких двухфункциональных правил широко используют байесовский метод, метод максимального правдоподобия [1, 2] и другие методы, не ограничивающие класс рассматриваемых случайных величин. Однако на практике широкое применение получили гауссовы модели случайных сигналов, не позволяющие отображать реальные процессы с необходимой адекватностью [3, 4]. Действие различных дестабилизирующих факторов на сигналы, комплекс помех при многолучевом распространении сигналов, прохождение их через неоднородные среды, флуктуации параметров каналов связи порождают сложную сигнально-помеховую ситуацию, которая описывается негауссовыми случайными процессами. Это обстоятельство существенно усложняет применение традиционных гауссовых моделей при разработке алгоритмов обработки информации в системах различения сигналов и оценивания их параметров с обеспечением требуемой точности при заданных ограничениях на их сложность.

Результаты исследований последних лет свидетельствуют о том, что при решении задач обработки негауссовых процессов перспективным является подход, в котором для описания статистических свойств случайных величин используются моменты и кумулянты (семиварианты), что позволяет с приемлемым приближением характеризовать статистические свойства негауссовых процессов [3, 4]. В частности, кумулянты и кумулянтные коэффициенты, в отличие от моментов, имеют самостоятельный статистический смысл и дают возможность описывать степень негауссовых распределений случайных величин. Такой подход позволяет повысить точность обработки негауссовых сигналов по сравнению с традиционным корреляционным подходом при заданных ограничениях на их сложность и уменьшить сложность их обработки.

Для повышения эффективности полиномиальных алгоритмов совместного различения сигналов и оценивания их параметров на фоне асимметричных негауссовых помех будем использовать двухфункциональные правила выбора решений на основе моментно-кумулянтного описания случайных величин, моментный критерий качества для многоальтернативной проверки статистических гипотез и метод максимизации усеченного стохастического полинома.

**Постановка задачи.** Пусть на интервале наблюдения $T$ приемной системы рассматривается доступный для регистрации случайный процесс $x(t)$, который может находиться в одном из $r$ состояний $s_0, s_1, ..., s_r$, соответствующих заданному типу сигнала. Будем полагать, что если $x(t)$ находится в состоянии $s_i$, то реализуется гипотеза $H_i$ с определенной вероятностью $p_i$, $i = \overline{0, r}$. При этом гипотезы $H_i$ случайны и составляют полную группу, где $\sum_{i=0}^{r} p_i = 1$. Пусть из случайного процесса выполняется выборка объемом $n$ значений $\mathbf{x}=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Тогда решение о реализации гипотезы $H_i$ принимается на основании полученной выборки случайных величин с плотностью вероятности распределения $P_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\vartheta}_i)$, где $\boldsymbol{\vartheta}_i = \{\vartheta_{1i}, \vartheta_{2i}, ..., \vartheta_{ki}\}$ — вектор параметров, принимающий значения из множества $\Theta$. Набор $P_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\vartheta}_i)$ дает полное вероятностное описание выборочного вектора $\mathbf{x}$ и, следовательно, процесса $x(t)$ на интервале наблюдения $T$ для гипотезы $H_i$.

При случайном векторе параметров $\boldsymbol{\vartheta}_i$ вводятся его вероятностное описание в виде плотности вероятности $P_i(\boldsymbol{\vartheta})$ и условная плотность вероятности вектора $\mathbf{x}$ при гипотезе $H_i$ и фиксированном значении случайного параметра $\boldsymbol{\vartheta}_i$, которую обозначим $P_i(\mathbf{x} | \boldsymbol{\vartheta}_i)$. Необходимо заметить, что размерность и физический смысл отдельных компонент вектора $\boldsymbol{\vartheta}$ при различных гипотезах $H_i$ в общем случае могут быть различными. Таким образом, набор априорных данных

$$p_i, P_i(\boldsymbol{\vartheta}),\ \boldsymbol{\vartheta}_i \in \Theta_i,\ P_i(\mathbf{x} | \boldsymbol{\vartheta}_i),\ i=\overline{0,r} \tag{1}$$

будет определять общую вероятностную модель процесса $x(t)$ на интервале наблюдения $T$ [5]. Если параметры (1) известны наблюдателю, то значит, имеется полная априорная информация, в противном случае необходимо использовать адаптацию системы к определению этих параметров.

Используя (1), запишем в общем случае математическую модель задачи совместного различения $(r+1)$-го сигнала и оценивания его параметров на фоне помех. Предположим, что при реализации гипотезы $H_i$ случайный процесс $x(t)$ имеет вид

$$x(t) = S_i(t, \boldsymbol{\vartheta}_i) + \eta_i(t),\ i=\overline{0,r}, \tag{2}$$

где $S_i(t, \boldsymbol{\vartheta}_i)$ — принимаемый полезный сигнал со случайными параметрами $\boldsymbol{\vartheta}_i$, соответствующими $i$-му состоянию системы; $\eta_i(t)$ — аддитивная помеха, характерная для $i$-го состояния системы.

На основе приведенных моделей случайных процессов (1) и (2) необходимо синтезировать алгоритмы совместного различения $r+1$ сигналов и оценивания их параметров. Например, если $r=1$, то построение таких алгоритмов сводится к обнаружению сигнала $S_i(t, \boldsymbol{\vartheta}_1)$, т.е. проверки гипотезы $H_i$ против альтернативы $H_0$, и оценке его информативных параметров $\boldsymbol{\vartheta}_1 = \{\vartheta_1, \vartheta_2, ..., \vartheta_k\}$.

Предложенные модели могут быть применены к различному классу сигналов и помех. Однако для получения конкретных результатов предлагается рассмотреть смесь радиосигнала и асимметричной негауссовой помехи. В качестве полезного сигнала выбран радиосигнал в силу его широкого использования во многих приложениях.

**Синтез структурной схемы системы совместного различения сигналов и оценивания их параметров.** Двухфункциональные правила выбора решений и совместные алгоритмы различения-оценивания, рассмотренные в [1], основаны на вероятностном подходе к описанию случайных величин, что вызывает трудности практической реализации обработки негауссовых процессов. Предлагается подход, основанный на моментно-кумулянтном описании случайных величин, использовании полиномиальных решающих правил, оптимальных по моментным критериям качества, а также метод максимизации усеченного стохастического полинома (ММУСП) [6]. Это позволяет, с одной стороны, упростить совместные алгоритмы различения сигналов и оценивания их параметров для негауссовых моделей помех, а с другой стороны, — увеличить их эффективность в виде уменьшения вероятностей ошибок решающих правил (РП) и уменьшения дисперсий оценок посредством учета структуры негауссовых помех, описываемых кумулянтами третьего и более высоких порядков.

Двухфункциональное правило $\Delta[\mathbf{x}]$ можно рассматривать как функционал от функций различения сигналов $\Delta_{\text{р}}[\mathbf{x}]$ и функций оценивания их параметров $\Delta_{\text{о}}[\mathbf{x}]$: $\Delta[\mathbf{x}] = F\{\Delta_{\text{р}}[\mathbf{x}], \Delta_{\text{о}}[\mathbf{x}]\}$, реализация которого представлена на рис. 1. В систему поступают выборочные значения $\mathbf{x}$ объемом $n$, на основании которых необходимо принять решение о реализации гипотезы $H_i$ и выполнить совместное оценивание параметров сигнала при использовании ММУСП.

Пусть принимаемые сигналы содержат аддитивную смесь полезного сигнала $s_i(t)$ и негауссовой помехи $\eta(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, ..., \gamma_\mu)$, описываемой конечной последовательностью кумулянтов $\gamma_i$, $i = \overline{1, \mu}$. Для удобства будем полагать, что негауссова помеха имеет нулевое математическое ожидание ($\gamma_1 = 0$), дисперсию $\gamma_2 = \chi_2$ и описывается кумулянтом третьего порядка, не равным нулю.

Полученные в блоке *2* оценки параметров $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_i$, $i = \overline{0, r}$, являются псевдооценками на множестве $\Theta$. Их выбор происходит в блоке *4* на основе решения о реализации гипотезы $H_i$ в пользу принятия сигнала $s_i(t)$ в блоке *3* при выборе максимального значения РП, представленных в виде стохастических полиномов $\Lambda_i(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_i, \lambda_i)$, оптимальных по моментному критерию качества асимптотической нормальности.

Следует заметить, что на практике нет необходимости рассматривать весь широкий спектр негауссовых случайных величин, классификация которых представлена в [3]. Часто можно ограничиться случайными величинами, представленными в классе асимметричных, эксцессных и асимметрично-эксцессных случайных величин, которые описываются кумулянтными коэффициентами третьего и четвертого порядков.

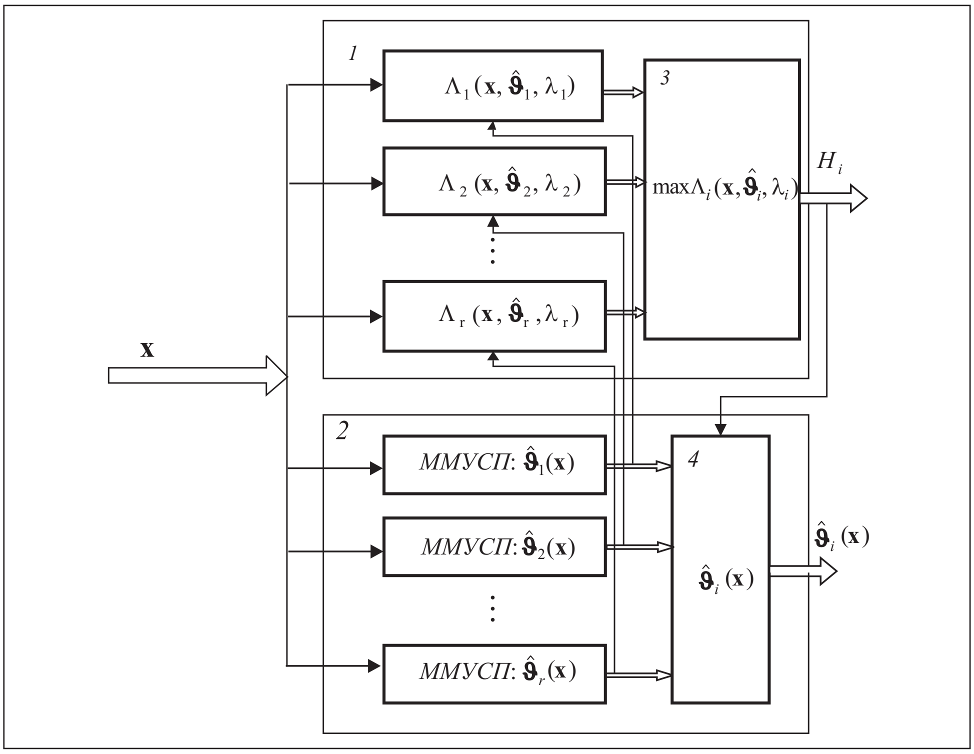


*Рис. 1.* Структурная схема системы совместного различения сигналов и оценивания их параметров: *1* — блок, реализующий функции различения сигналов $\Delta_{\text{р}}[\mathbf{x}]$; *2* — блок, реализующий функции оценивания параметров $\Delta_{\text{о}}[\mathbf{x}]$; *3* — выбор максимального значения РП; *4* — блок оценивания параметров $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_i$, $i = \overline{0, r}$

**Построение алгоритмов совместного оценивания параметров методом максимизации усеченного стохастического полинома.** Рассмотрим совместную оценку параметров радиосигналов и асимметричной помехи в блоке *2* (см. рис. 1), которые можно представить в виде вектора $\boldsymbol{\vartheta} = (a_{0(r)}, \chi_2, \gamma_3)$, $r = \overline{1, d}$. Для нахождения оценок амплитуды радиосигналов используется метод максимизации полинома (метод Кунченко) [3], а для параметров помехи — ММУСП [6].

Поскольку исследуется аддитивная смесь радиосигнала и помехи, согласно предложенным методам для осуществления расчета необходимо знать моменты исследуемой случайной величины, которые в общем случае находят из выражения $m_{iv(r)}(\boldsymbol{\vartheta}) = E(S_{v(r)} + \eta)^i$, где $i = \overline{1, 2s}$, а $\eta^i = \alpha_i$ — начальные моменты асимметричной помехи первого типа первого вида, вычисляемые по известной характеристической функции, так как она является полным описанием случайной величины [3].

На основе центрированных коррелянтов $K_{(i,\ j)v(r)}(\vartheta)$ составляется матрица $F_{s(r)}(\vartheta)$, представляющая собой тело размером $s\times s$ обобщенного стохастического полинома при его описании с помощью степенных функций. Центрированные коррелянты находят из выражения

$$K_{(i,\ j)v(r)}(\vartheta)=m_{(i+j)v(r)}(\vartheta)-m_{iv(r)}(\vartheta)\,m_{jv(r)}(\vartheta),$$

где $i, j=\overline{1,s}$. Объем тела обобщенного стохастического полинома размером $s$ определяется как определитель матрицы $F_{s(r)}(\vartheta)$.

Согласно методам максимизации полинома и ММУСП оценки амплитуды $a_{0(r)}$ полезных сигналов и усеченные оценки кумулянта второго порядка $\chi_2$ и коэффициента асимметрии $\gamma_3$ находят из совместного решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{s}\sum\limits_{v=1}^{n} h_{i(s)1v(r)}(\vartheta)[x^{i}_{v(r)}-m_{iv(r)}(\vartheta)]\Big|_{\substack{a_{0(r)}=\hat a_{0(r)}\\ \chi_2=\hat\chi_2\\ \gamma_3=\hat\gamma_3}}=0, \\ \sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq(c,e,\dots,l)}}^{s}\sum\limits_{v=1}^{n} h_{i(s)[2]v(r)}(\vartheta)[x^{i}_{v(r)}-m_{iv(r)}(\vartheta)]\Big|_{\substack{\chi_2=\hat\chi_2\\ a_{0(r)}=\hat a_{0(r)}\\ \gamma_3=\hat\gamma_3}}=0, \\ \sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq(c,e,\dots,l)}}^{s}\sum\limits_{v=1}^{n} h_{i(s)3v(r)}(\vartheta)[x^{i}_{v(r)}-m_{iv(r)}(\vartheta)]\Big|_{\substack{\gamma_3=\hat\gamma_3\\ \chi_2=\hat\chi_2\\ a_{0(r)}=\hat a_{0(r)}}}=0. \end{cases} \qquad (3)$$

Здесь $x_{v(r)}$ — независимые неодинаково распределенные выборочные значения случайной величины $\xi_{(r)}$; $v=\overline{1,n}$ — отсчеты (моменты времени наблюдения); $n$ — объем выборки; $h_{i(s)1v(r)}(\vartheta)$ — оптимальные коэффициенты, обеспечивающие минимальные дисперсии оценок амплитуды радиосигналов, вычисляемых в общем виде из системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{j=1}^{s} h_{j(s)1v(r)}(\vartheta)K_{(i,\ j)v(r)}(\vartheta)=\frac{\partial}{\partial a_{0(r)}}m_{iv(r)}(\vartheta),\ \ i=\overline{1,s},$$

где $h_{i(s)2v(r)}(\vartheta)$ и $h_{i(s)3v(r)}(\vartheta)$ — коэффициенты, обеспечивающие минимум дисперсий оценок $\chi_2$, $\gamma_3$ и вычисляемые из систем усеченных уравнений (СУАР):

$$\sum_{j=1}^{s} h_{j(s)[2]v(r)}(\vartheta)\,K_{(i,\ j)v(r)}(\vartheta)=\frac{\partial}{\partial\chi_2}m_{iv(r)}(\vartheta),\ \ i=\overline{1,s};\ \ i, j\neq(c,e,\dots,l),$$


ISSN 0204–3572. Electronic Modeling. 2014. V. 36. № 4

$$\sum_{j=1}^{s} h_{j(s)[3]v(r)}(\boldsymbol{\vartheta}) K_{(i,\ j)v(r)}(\boldsymbol{\vartheta}) = \frac{\partial}{\partial \gamma_3} m_{iv(r)}(\boldsymbol{\vartheta}),\ i = \overline{1, s};\quad i, j \neq (c, e, ..., l).$$

Для нахождения оценок параметров помехи нет необходимости знать все оптимальные коэффициенты, поэтому при оценке параметра $\chi_2$ следует принимать во внимание только первые два оптимальных коэффициента, а при оценке параметра $\gamma_3$ — первые три. Все другие оптимальные коэффициенты приравниваются к нулю, что является достаточным для получения необходимой минимальной информации о параметрах помехи. Подставив выражения полученных оптимальных коэффициентов, начальных моментов и выражение исследуемого сигнала в систему (3), получим систему уравнений для нахождения общих оценок указанных параметров.

Поскольку, начиная с четвертой степени стохастического полинома, аналитически найти общие оценки амплитуды радиосигналов, кумулянта второго порядка $\chi_2$ и коэффициента асимметрии $\gamma_3$ асимметричной помехи первого типа первого вида достаточно сложно, целесообразно воспользоваться численными методами. Для исследования статистических свойств найденных оценок параметра $a_{0(r)}$ при различных степенях полинома $s$ необходимо рассчитать асимптотические дисперсии оценок, используя матрицу количества полученной информации

$$J_{sn(r)}(\boldsymbol{\vartheta}) = \begin{pmatrix} J_{sn(r)}^{(1,\,1)}(\boldsymbol{\vartheta}) & J_{sn(r)}^{(1,\,2)}(\boldsymbol{\vartheta}) & J_{sn(r)}^{(1,\,3)}(\boldsymbol{\vartheta}) \\ J_{sn(r)}^{(2,\,1)}(\boldsymbol{\vartheta}) & J_{sn(r)}^{(2,\,2)}(\boldsymbol{\vartheta}) & J_{sn(r)}^{(2,\,3)}(\boldsymbol{\vartheta}) \\ J_{sn(r)}^{(3,\,1)}(\boldsymbol{\vartheta}) & J_{sn(r)}^{(3,\,2)}(\boldsymbol{\vartheta}) & J_{sn(r)}^{(3,\,3)}(\boldsymbol{\vartheta}) \end{pmatrix},$$

элементы которой представляют собой выражения количества полученной информации об оцениваемых параметрах:

$$J_{sn(r)}^{(m,\,k)}(\boldsymbol{\vartheta}) = \sum_{v=1}^{n} \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} h_{i(s)mv(r)}(\boldsymbol{\vartheta}) h_{j(s)kv(r)}(\boldsymbol{\vartheta}) K_{(i,\ j)v(r)}(\boldsymbol{\vartheta}),\ \ m, k = \overline{1, 3}.$$

Тогда дисперсия оценок амплитуды радиосигналов $a_{0(r)}$ равна соответствующему диагональному элементу вариационной матрицы оценок, которая асимптотически (при $n \to \infty$) равна обратной матрице количества полученной информации, рассчитанной с помощью следующего выражения:

$$\sigma^2_{(a_{0(r)})s} = \frac{J_{sn(r)}^{(2,\,2)}(\boldsymbol{\vartheta}) J_{sn(r)}^{(3,\,3)}(\boldsymbol{\vartheta}) - J_{sn(r)}^{(2,\,3)}(\boldsymbol{\vartheta}) J_{sn(r)}^{(3,\,2)}(\boldsymbol{\vartheta})}{\det \left\| J_{sn(r)}(\boldsymbol{\vartheta}) \right\|},$$

где $\det \left\| J_{sn(r)}(\boldsymbol{\vartheta}) \right\|$ — определитель матрицы количества полученной информации. При этом $\sigma^2_{(a_{0(r)})\,(s+1)\min} \leq \sigma^2_{(a_{0(r)})\,(s)\min}$ или $J^{-1}_{(s)n(r)}(\boldsymbol{\vartheta}) \leq J^{-1}_{(s+1)n(r)}(\boldsymbol{\vartheta})$.

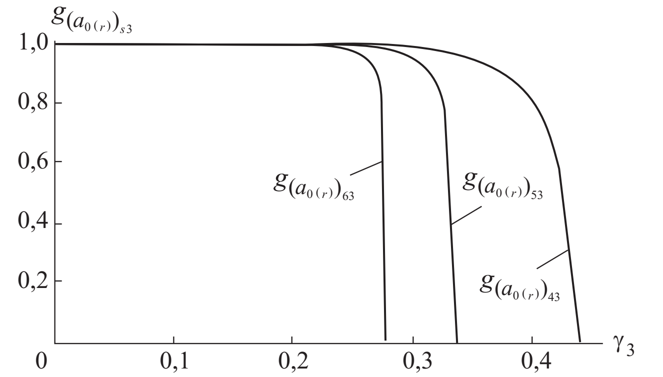


*Рис. 2.* Зависимость коэффициентов уменьшения дисперсий $g_{(a_{0(r)})43}, g_{(a_{0(r)})53}, g_{(a_{0(r)})63}$ от коэффициента асимметрии $\gamma_3$

Эффективность предложенных методов проверяется с помощью коэффициентов уменьшения дисперсий полученных оценок $g_{(a_{0(r)})sk} = =\sigma^2_{(a_{0(r)})s} / \sigma^2_{(a_{0(r)})k}$, где $\sigma^2_{(a_{0(r)})s}$ и $\sigma^2_{(a_{0(r)})k}$ — дисперсии оценок амплитуды полезных сигналов при усеченной оценке параметров помехи, рассчитанные при различных степенях полинома. Коэффициент уменьшения дисперсий для третьего и четвертого степеней полинома имеет вид

$$g_{(a_{0(r)})43} = \frac{\sigma^2_{(a_{0(r)})4}}{\sigma^2_{(a_{0(r)})3}} = 1 - \frac{6\gamma_3^2(3\gamma_3^2(10-3\gamma_3^2))^2}{576-18\gamma_3^2(208-240\gamma_3^2-120\gamma_3^4-90\gamma_3^6-27\gamma_3^8)}.$$

Аналитические выражения коэффициентов уменьшения дисперсий для третьего и пятого, третьего и шестого степеней полинома не приводятся в силу их громоздкости.

На рис. 2 представлен график зависимости коэффициентов уменьшения дисперсий  от коэффициента асимметрии, отображающий эффективность метода максимизации полинома и ММУСП. Из рис. 2 видно, что с возрастанием степени стохастического полинома по мере приближения коэффициента асимметрии к границе области допустимых значений эффективность полиномиальных методов, основанных на негауссовых моделях помех, увеличивается.

**Построение полиномиальных алгоритмов различения сигналов, оптимальных по моментному критерию качества асимптотической нормальности.** Сформулируем задачу различения сигналов на фоне помех, которая решается в блоке *1* (см. рис. 1) при использовании моментного критерия качества асимптотической нормальности. Пусть на интервале времени $(0,T)$ наблюдаются случайные сигналы $\xi_i(t)$, $i=\overline{1,N}$, по которым принимаются решения о реализации соответствующей гипотезы $H_i$, т.е. о приеме соответствующего полезного сигнала $S_i(t)$, подлежащего различению, либо решение о реализации гипотезы $H_0$ об отсутствии полезного сигнала. Принимаемые сигналы $\xi_i(t)$ представляют собой аддитивную смесь $\xi_i(t)=S_i(t)+\eta_i(t)$, где $\eta_i(t)$ — негауссова помеха, характеризуемая нулевым математическим ожиданием, дисперсией $\chi_2$ и последовательностью моментов и кумулянтов.

Каждому принимаемому сигналу соответствует определенное моментно-кумулянтное описание, представленное в виде конечной последовательности $m_i\lfloor\{\alpha_{i1},\alpha_{i2},...,\alpha_{i\mu}\},\{0,\chi_{i2},\gamma_{i3},\gamma_{i4},...,\gamma_{i\mu}\}\rfloor$, где $\alpha_{i1},\alpha_{i2},...,\alpha_{i\mu}$ — начальные моменты, описывающие признаки сигнала $s_i(t)$; $\gamma_{i2},\gamma_{i3},\gamma_{i4},...,\gamma_{i\mu}$ — кумулянтные коэффициенты, описывающие признаки негауссовой помехи $\eta_i(t)$.

Рассмотрим в общем случае $N+1$ гипотез, относительно которых необходимо принять решение в пользу одной. Тогда, заменив непрерывное время наблюдения $t$ дискретными отсчетами $v$ объемом $n$, выполнеными из наблюдаемых сигналов $\xi_i(t)$, с учетом стационарных негауссовых помех можем записать

$$H_i:\xi_{iv}=S_{iv}(\alpha_k)+\eta_i(\gamma_k),\quad i=\overline{1,N},\quad k=\overline{1,\mu},\quad v=\overline{1,n},$$

$$H_0:\xi_{0v}=\eta_0(\gamma_k),$$

где $S_{iv}(\alpha_k)$ — $i$-й сигнал с известными (оценочными) параметрами $\alpha_k$; $\eta_i(\gamma_k)$ — негауссова случайная величина с известными (оценочными) параметрами в виде кумулянтов $\gamma_k$.

Согласно классическому вероятностному подходу [2, 7] оптимальный байесовский алгоритм различения сигналов находится из условия минимума среднего риска. Тогда оптимальный алгоритм различения сигналов представим в виде

$$p_iP(\mathbf{x}\,|\,H_i)=\max_{j=\overline{0,N}}\{p_jP(\mathbf{x}\,|\,H_j)\},\ i=\overline{0,N},\tag{4}$$

или

$$\ln P(\mathbf{x}\,|\,H_i)+\ln p_i=\max_{j=\overline{0,N}}\{\ln P_j(\mathbf{x}\,|\,H_j)+\ln p_j\},\ i=\overline{0,N},$$

где $p_i=P(H_i)$ — вероятность появления гипотез $H_i$.

Известно, что минимальной достаточной статистикой для поставленной задачи является $N$ скалярных функций векторной выборки $\mathbf{x}$ отношения правдоподобия: $\Lambda_i(\mathbf{x})=P(\mathbf{x}\,|\,H_i)/P(\mathbf{x}\,|\,H_0)$. На основании критерия максимума апостериорной вероятности решение о передаче сигнала $s_i(t)$ (реализация гипотезы $H_i$) принимается тогда, когда

$$\ln\Lambda_i(\mathbf{x})+\ln p_i = \max_{j=\overline{0,\ N}}\{\ln\Lambda_j(\mathbf{x})+\ln p_j\},\ \ \Lambda_j(\mathbf{x})p_j / p_0 \geq 1,$$

а решение о том, что сигналы отсутствуют (реализация гипотезы $H_0$), — в случае, если $\Lambda_j(\mathbf{x})p_j / p_0 < 1,\ j=\overline{1, N}$.

Решение подобных задач применимо при нормальном законе распределения $P(\mathbf{x}\,|\,H_i)$ случайных величин. В других случаях бывает затруднительно найти собственно плотности распределения и, соответственно, получить решения. Тогда можно воспользоваться приемом [8, 9], представляющим собой разложение отношения правдоподобия проверки статистических гипотез $H_m$ и $H_r$ в стохастический полином конечной степени $s$, который при простых матрицах потерь и равновероятном появлении гипотез примет вид

$$\Lambda(X)_{snL}^{(mr)} = \sum_{p=1}^{L}\ \sum_{i=1}^{s}\ \sum_{v=1}^{n} k_{iv}^{(mr)} x_{vp}^{i} + k_0^{(mr)} \underset{H_r}{\overset{H_m}{\gtrless}} 0,\quad r,m=\overline{0, N-1},\ \ r\neq m, \qquad (5)$$

где неизвестные коэффициенты $k_{iv}^{(mr)}, k_0^{(mr)}$ находятся по заданному критерию качества; $L$ — число наблюдаемых реализаций исследуемого процесса.

В качестве базового критерия проверки статистических гипотез воспользуемся моментным критерием асимптотической нормальности, использованным для обнаружения сигналов на фоне негауссовых помех. Адаптируя его для многоальтернативных задач проверки статистических гипотез, запишем [8]

$$Yu(E,G)^{(mr)} = \frac{[(G_m^{(mr)})^{0,5}+(G_r^{(mr)})^{0,5}]^2}{[E_m^{(mr)}-E_r^{(mr)}]^2},\quad r,m=\overline{0, N},\quad r\neq m. \qquad (6)$$

Критерий (6) выражает асимптотические ($n\to\infty$) вероятности ошибок функций $\Lambda^{(mr)}(\mathbf{x})$ проверки гипотез $H_m$ и $H_r$, где математические ожидания и дисперсии РП при гипотезах $H_m$ и $H_r$ соответственно имеют вид

$$E_m^{(mr)} = L\sum_{i=1}^{s}\sum_{v=1}^{n} k_{iv}^{(mr)} m_{iv}^{(m)}\ ,\ \ E_r^{(mr)} = L\sum_{i=1}^{s}\sum_{v=1}^{n} k_{iv}^{(mr)} m_{iv}^{(r)},$$

$$G_m^{(mr)} = L\sum_{i=s}^{s}\ \sum_{j=1}^{s}\ \sum_{v=1}^{n} k_{iv}^{(mr)} k_{jv}^{(mr)} F_{(i,\,j)v}^{(m)}\ ,$$

$$G_r^{(mr)} = L\sum_{i=s}^{s}\ \sum_{j=1}^{s}\ \sum_{v=1}^{n} k_{iv}^{(mr)} k_{jv}^{(mr)} F_{(i,\,j)v}^{(r)}.$$

Здесь $F_{(i,j)}^{(m)} = m_{(i+j)}^{(m)} + m_i^{(m)} m_j^{(m)}$ и $F_{(i,j)}^{(r)} = m_{(i+j)}^{(r)} + m_i^{(r)} m_j^{(r)}$ — центральные коррелянты наблюдаемой случайной величины ξ $(i, j)$-го порядка при гипотезах $H_m$ и $H_r$; $m_i^{(m)}$ и $m_i^{(r)}$ — начальные моменты $i$-го порядка случайной величины ξ при гипотезах $H_m$ и $H_r$ .

Используя критерий качества (6) запишем оптимальный коэффициент $k_0^{(mr)}$, минимизирующий вероятности ошибок РП, в виде

$$k_0^{(mr)} = -\frac{E_m^{(mr)}(G_r^{(mr)})^{0,5} + T_r^{(mr)}(G_m^{(mr)})^{0,5}}{(G_m^{(mr)})^{0,5} + (G_r^{(mr)})^{0,5}}. \tag{7}$$

В этом случае неизвестные коэффициенты $k_{iv}^{(mr)}$ РП (5), минимизирующие функционал (6), находим из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{s} k_{jv}^{(mr)} \left[ (1+c^{(mr)})\, F_{(i,j)v}^{(m)} + \left( 1 + \frac{1}{c^{(mr)}} \right) F_{(i,j)v}^{(m)} \right] = m_{iv}^{(m)} - m_{iv}^{(r)},\ i = \overline{1, s}, \tag{8}$$

где $c^{(mr)} = [G_m^{(mr)} / G_r^{(mr)}]^{0,5}$.

Примем функционал (6) за критерий качества выбора РП вида (5) и будем считать наилучшим правило, которое при $k_0^{(mr)}$ вида (7) и $k_{iv}^{(mr)}$, найденных из (8), позволяет минимизировать правую часть (6). Данный критерий назовем адаптированным асимптотически нормальным моментным критерием качества для проверки многоальтернативных статистических гипотез. При таком полиномиальном подходе к оптимальному выбору РП различения сигналов на фоне помех математическая структура выбора гипотезы $H_m$ будет иметь вид

$$H_m\colon \max_{m=\overline{1,\, N-1}} \left\{ \sum_{p=1}^{L} \sum_{i=1}^{s} \sum_{v=1}^{n} k_{iv}^{(m0)} x_{vp}^{i} + k_0^{(m0)} \right\} > 0,$$

$$H_0\colon \max_{m=\overline{1,\, N-1}} \left\{ \sum_{p=1}^{L} \sum_{i=1}^{s} \sum_{v=1}^{n} k_{iv}^{(m0)} x_{vp}^{i} + k_0^{(m0)} \right\} < 0,$$

$$\sum_{p=1}^{L} \sum_{i=1}^{s} \sum_{v=1}^{n} k_{iv}^{(m0)} x_{vp}^{i} + k_0^{(m0)} > \sum_{p=1}^{L} \sum_{i=1}^{s} \sum_{v=1}^{n} k_{iv}^{(r0)} x_{vp}^{i} + k_0^{(r0)},\ \ r, m = \overline{1, N-1},\ r \neq m.$$

При рассмотрении общего случая проверки $N+1$ гипотез для качественной оценки полученных РП различения сигналов на фоне помех вводится величина, характеризующая общие асимптотические вероятности ошибок различения гипотезы $H_m$:

$$Yu(E,G)^{(m)}=\sum_{r=0}^{N}\frac{[(G_m^{(mr)})^2+(G_r^{(mr)})^2]^2}{[E_m^{(mr)}-E_r^{(mr)}]^2},\quad m=\overline{1,N},\quad m\neq r. \tag{9}$$

Приведем пример синтеза полиномиальных алгоритмов различения сигналов, оптимальных по предложенному критерию качества.

Пусть на входе системы наблюдается случайный сигнал вида $\xi_i(t)=$ $=S_i(t)+\eta(t)$. Обработке подлежат выборочные значения $\mathbf{x}=(x_1, x_2, ..., x_n)$ объема *n* из последовательности независимых и неодинаково распределенных случайных величин. По результатам обработки необходимо вынести решение о реализации одной из гипотез $H_i$, $i=\overline{0,N}$. Заменив непрерывное время наблюдения *t* дискретными отсчетами *v* объемом *n*, для наблюдаемого сигнала $\xi_i(t)$ в предположении стационарности негауссовых помех можем записать

$$H_i:\xi_{iv}=S_{iv}(\alpha_k)+\eta(\gamma_k),\quad H_0:\xi_{0v}=\eta(\gamma_k),\quad i=\overline{1,N},\quad v=\overline{1,n},$$

где $S_{iv}$ — значение *i*-го радиосигнала с известными (оценочными) параметрами в виде моментно-кумулянтного описания $\alpha_k$ в *v*-й момент времени; $\eta(\gamma_k)$ — негауссова случайная величина с известными (оценочными) параметрами в виде моментно-кумулянтного описания $\gamma_k$.

Рассмотрим частный случай проверки трех статистических гипотез:

$H_0$ — принята помеха: $\xi_{0v}=\eta(\gamma_k)$;

$H_1$ — принят сигнал $S_{1v}$: $\xi_{1v}=S_{1v}(\alpha_k)+\eta(\gamma_k)$;

$H_2$ — принят сигнал $S_{2v}$: $\xi_{2v}=S_{2v}(\alpha_k)+\eta(\gamma_k)$.

Здесь $S_{1v}$ и $S_{2v}$ — информативные радиосигналы, принимающие общий вид $S_{iv}=a_i e_{iv}$, где $a_i$ — амплитуда радиосигнала; $e_{iv}=r_{iv}\cos(\omega_{0i}v\Delta+\varphi_{0i})$; $r_{iv}$ — огибающая радиосигнала; $\omega_{0i}$, $\varphi_{0i}$ — частота и фаза, $i=1,2$; $\Delta$ — шаг дискретизации. Тогда обобщенное РП (9) для различения трех статистических гипотез согласно поставленной задаче можно представить в виде следующих РП:

$\Lambda_{sn}^{(10)}(\mathbf{x})$ — проверка гипотезы $H_1$ против гипотезы $H_0$;

$\Lambda_{sn}^{(20)}(\mathbf{x})$ — проверка гипотезы $H_2$ против гипотезы $H_0$;

$\Lambda_{sn}^{(21)}(\mathbf{x})$ — проверка гипотезы $H_2$ против гипотезы $H_1$.

Использовав РП общего вида (5), синтезируем линейные РП при степени полинома $s=1$:

$$\Lambda^{(m0)}(X)_{1nL}=\frac{1}{L\chi_2^{0,5}}\sum_{p=1}^{L}\sum_{v=1}^{n}e_{mv}x_{vp}-\frac{q_m^{0,5}}{2}\sum_{v=1}^{n}(e_{mv})^2\underset{H_0}{\overset{H_m}{\gtrless}}0,$$

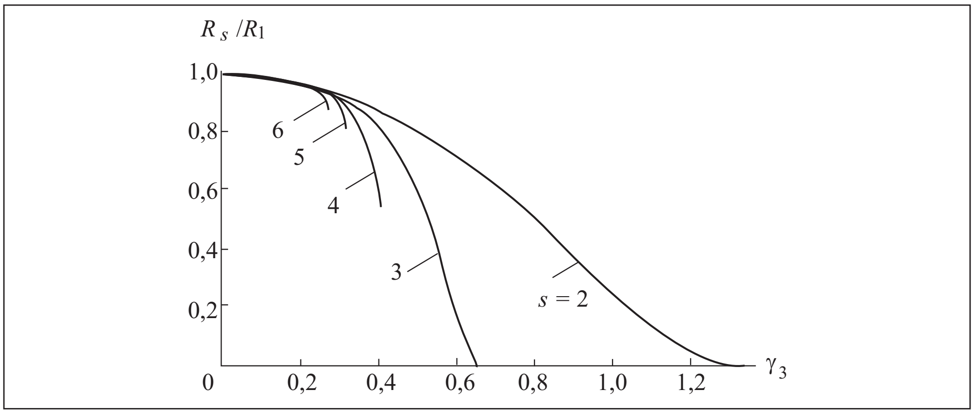


*Рис. 3.* Графики зависимости отношения вероятностей ошибок РП от коэффициента асимметрии $\gamma_3$ при $q_1 = 0{,}1$, $q_2 = 1{,}0$ и $n = 100$

$$\Lambda^{(mr)}(X)_{1nL} = \frac{1}{L\chi_2^{0,5}} \sum_{p=1}^{L} \sum_{v=1}^{n} e_{mv} q_m^{0,5} - e_{rv} q_r^{0,5}) x_{vp} -$$

$$- \frac{q_m \sum\limits_{v=1}^{n} (e_{mv})^2 - q_r \sum\limits_{v=1}^{n} (e_{rv})^2}{2} \underset{H_r}{\overset{H_m}{\substack{> \\ <}}} 0,$$

где $q_m$ — отношение сигнал-шум, $m, r = \overline{0, N-1}$, $m \neq r$. Следует заметить, что линейные РП различения сигналов аналогичны выражениям, полученным из отношения правдоподобия для гауссовых случайных величин.

На основании аналогичных рассуждений синтезированы нелинейные РП при степени полинома $s \geq 2$. Характерной чертой новых РП является тот факт, что выборочные значения $x_v^i$ подвергаются нелинейной обработке в степени $i$ и учитывается структура случайных сигналов не только в виде их дисперсий $\chi_2$, но и кумулянтных коэффициентов третьего и высших порядков. Учет таких параметров позволяет описывать случайные сигналы, распределение которых отличается от нормального.

Было исследовано влияние асимметричной негауссовой помехи первого типа первого вида с коэффициентом асимметрии $\gamma_3$ на эффективность нелинейных РП различения сигналов. Эффективность оценивалась по суммарной асимптотической вероятности $R_s$ ошибок РП различения сигналов (9) для различных полиномиальных преобразований в виде степени $s$ (рис. 3). Отношение $R_s / R_1$ характеризует вероятности ошибок нелинейных РП при $\mathrm{s} = 2 \div 6$ к вероятностям ошибок линейных РП при $s = 1$ для различных значений отношения мощности сигнала и помехи $q_r = a_r^2 / \chi_2$, $r = 1, 2$.

Из рис. 3 видно, что с учетом параметра $\gamma_3$ вероятность ошибок нелинейных РП уменьшается до значений $R_s / R_1 < 1$. Максимальное уменьшение получено при достижении коэффициентом $\gamma_3$ области допустимых значений [3, 4]. При увеличении степени полинома $s$ область допустимых значений параметра $\gamma_3$ уменьшается, что свидетельствует об увеличении эффективности обработки.

## Выводы

Применение предложенных методов обработки сигналов с использованием двухфункциональных правил совместного различения сигналов позволяет увеличить эффективность различения сигналов в виде уменьшения вероятностей ошибок РП, а также уменьшить дисперсии оценочных значений параметров по сравнению с известными результатами.

Использование ММУСП для оценивания параметров помехи дает возможность упростить алгоритмы совместного оценивания и уменьшить вычислительные ресурсы для их синтеза по сравнению с методом максимизации полинома.

A polynomial approach to solution of the problem of joint discrimination of radio signals and estimation of their parameters, as based on the method of maximization of truncated stochastic polynomial and a moment criterion of quality was used to solve the multialternative problems of testing of statistical hypotheses.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Трифонов А.П., Шинаков Ю.С.* Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. — М.: Радио и связь, 1986. —264 с.
2. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. — Изд. 3-е, перераб. и доп. — М.: Радио и связь, 1989. — 696 с.
3. *Kunchenko Y.P.* Polynomial Parameter Estimations of Close to Gaussian Random variables.— Germany, Aachen: Shaker Verlag, 2002. — 396 p.
4. *Малахов А.Н.* Кумулянтный анализ негауссовских процессов и их преобразований.— М.: Сов. радио, 1979. — 376 с.
5. *Палагін В.В.* Поліноміальний підхід до побудови методів і структур сумісних алгоритмів розрізнення сигналів і оцінювання їх параметрів // Інформаційні технології та комп'ютерна техніка. Вісн. Вінницького політехнічного ін-ту. — 2011. — № 2. — С. 106—114.
6. *Гончаров А.В., Уманець В.М., Бондаренко А.В.* Оцінка амплітуди радіосигналу спільно з усіченим оцінюванням параметрів адитивної асиметричної завади // Вісн. Черкаського державного технологічного ун-ту. — 2013. — № 4. — С. 83—88.
7. *Безрук В.М., Певцов Г.М.* Теоретические основы проектирования систем распознавания сигналов для автоматизированного радиоконтроля. — Харьков: Коллегиум, 2007. — 430 с.

8. *Палагин В.В.* Адаптация моментного критерия качества для многоальтернативной задачи проверки гипотез при использовании полиномиальных решающих правил // Электрон. моделирование. — 2010. — **32**, № 4. — С. 17—33.
9. *Палагін В.В., Жила О.М.* Розпізнавання радіосигналів на тлі асиметричних негауссівських завад за моментним критерієм якості // Міжвідомчий науково-технічний зб. «Електромашинобудування та електрообладнання». Вип. 73. — Київ: Техніка, 2009. — С. 125—130.

Поступила 28.03.14;
после доработки 28.04.14

*ПАЛАГИН Владимир Васильевич, д-р техн. наук, доцент, доцент кафедры радиотехники, декан факультета электронных технологий Черкасского государственного технологического университета. В 1992 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — методы математического и компьютерного моделирования в задачах обработки сигналов и негауссовых процессов.*

*ГОНЧАРОВ Артем Владимирович, канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры радиотехники Черкасского государственного технологического университета, который окончил в 2002 г. Область научных исследований — статистическая обработка сигналов при негауссовых помехах с применением усеченных стохастических полиномов.*

*УМАНЕЦ Владимир Михайлович, аспирант кафедры радиотехники Черкасского государственного технологического университета, который окончил в 2011 г. Область научных исследований — статистическая обработка сигналов при негауссовых помехах с применением усеченных стохастических полиномов.*