УДК 519.6

В.В. Домбровский, Д.С. Смаковский, канд. техн. наук,
А.Н. Смаковская
Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический ин-т»
(Украина, 03056, ул. Политехническая, 6, к. 414 а,
тел. 0919005451, e-mail: smakovskiy@ukr.net)

Моделирование процессов теплопередачи с зонами значительных градиентов решения с помощью вложенных адаптивных сеток

Рассмотрен способ адаптивного построения вложенных разностных сеток, сгущающихся в зонах быстрого изменения искомой функции для решения двумерного нестационарного уравнения теплопроводности. Предложен алгоритм поиска зон со значительными градиентами искомой функции.

Розглянуто спосіб адаптивної побудови вкладених різницевих сіток, які згущаються в зонах швидкої зміни шуканої функції для розв’язання двовимірного нестаціонарного рівняння теплопровідності. Запропоновано алгоритм пошуку зон зі значними градієнтами шуканої функції.

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения в частных производных, метод конечных разностей, разностная сетка, вложенная сетка.*

Дифференциальные уравнения в частных производных (ДУЧП) широко применяются при моделировании различных природных явлений. В основе численных методов решения таких уравнений лежит принцип замены непрерывной области определения неизвестной функции дискретным множеством точек (сеткой). Для минимизации погрешности численного метода в местах значительных изменений функции сетку сгущают. Использование в расчетах адаптивных сеток объясняется желанием обеспечить необходимую точность, минимизировав число узлов расчетной сетки, и тем самым повысить ресурсоемкость вычислений.

Как правило, точность численного решения в зонах, где градиент искомой функции достигает больших величин, в значительной мере влияет на точность решения по всей области. Поэтому, сгущая сетку в таких зонах, можно повысить точность численного решения. В то же время, с целью экономии машинных ресурсов желательно иметь разреженную сетку в областях плавного изменения решения. Этим объясняется необходимость использования неравномерных сеток.

Актуальность проблемы. Существует три основных класса сеток, которые широко используются при решении задач в многомерных областях: структурные, неструктурные, гибридные [1]. Для решения двумерного нестационарного уравнения теплопроводности с помощью методов конечных разностей особый интерес представляют структурные сетки и гибридные, состоящие из грубой (глобальной) структурной сетки и вложенных (региональных) блоков — структурных сеток.

Существующие методы построения неравномерных сеток до начала вычислений, основанные на определении возможных зон высоких градиентов, не эффективны при решении нестационарных задач в случаях, когда эти зоны могут со временем менять свое положение. Более эффективным является использование адаптивного алгоритма [2], с помощью которого в процессе решения задачи анализируется поведение функции, контролируется погрешность, строится переменная по времени и неравномерная разностная сетка.

Указанный алгоритм обеспечивает сгущение узлов сетки в зонах резкого изменения искомой функции и увеличение шага сетки там, где функция изменяется плавно. Построение разностной сетки осуществляется на основании оценки локальной погрешности при сравнении решений, полученных для разных значений временного и пространственных шагов сетки. При этом сгущения узлов автоматически перемещаются одновременно со сменой положения в пространстве зоны больших градиентов.

Недостатком этого алгоритма является лишнее сгущение узлов в зонах, которые этого не требуют, но имеют такую же координату x или y, как и зона со значительным градиентом (рис. 1, *а*). Данный недостаток устранен в методах, основанных на вложенных сетках. При этом появляется задача согласования решения на границах вложенных расчетных областей.

В зависимости от способа взаимодействия региональной и глобальной областей модели вложенных сеток можно условно разделить на два типа:

1) с обратной связью (данные передаются как из глобальной области в региональные в виде граничных условий, так и из региональных областей в глобальную для уточнения решения) [3];

2) без обратной связи (данные передаются только из глобальной области в региональные) [4, 5].

В работе [6] описан метод применения вложенных сеток при моделировании процесса фильтрации. В зоне с большими градиентами используются более подробные, вложенные одна в другую, сетки. Главной проблемой расчета при использовании системы вложенных сеток является передача значений физических величин из одной области в другую. Ос-

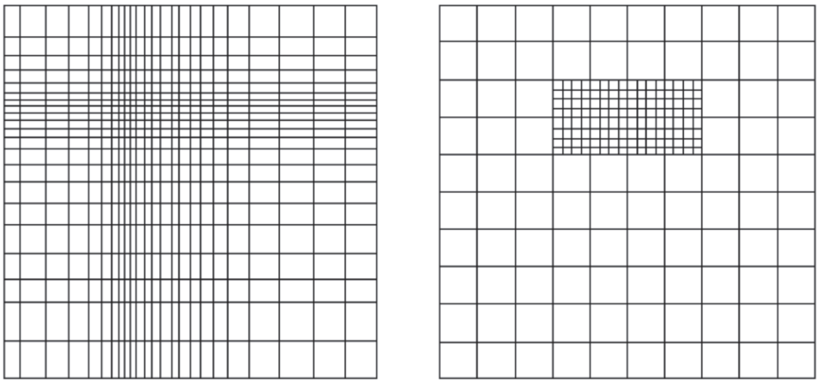


Рис. 1. Неравномерная (*а*) и вложенная (*б*) сетки

новной недостаток указанных методов — отсутствие контроля погрешности в процессе расчета.

Рассмотрим алгоритм, предложенный в работе [2], для оценки локальной погрешности решения в случае двумерного нестационарного уравнения теплопроводности. Пусть известно значение функции $U(x, y, t)$ на некотором временном шаге k на неравномерной сетке с шагами $h_{x,i} = x_i - x_{i-1}$ по переменной x и $h_{y,j} = y_j - y_{j-1}$ по переменной y, а также шагом τ по переменной t. Для перехода на следующий временной слой необходимо найти приближенные решения при различных значениях временного и пространственных шагов: $u_{h_x, h_y, \tau}$, $u_{\frac{h_x}{2}, \frac{h_y}{2}, \frac{\tau}{2}}$, $u_{\frac{h_x}{2}, h_y, \tau}$ и $u_{h_x, \frac{h_y}{2}, \tau}$. После этого можно оценить локальную погрешность e_{ij} для каждого узла:

$$e_{h_x, h_y, \tau} = U_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+1} = t(B_1\tau^2 + B_2 h_x^2 + B_3 h_y^2) = \frac{4}{3}\left| u_{\frac{h_x}{2}, \frac{h_y}{2}, \frac{\tau}{2}} - u_{h_x, h_y, \tau} \right| = e_{ij}.$$

Коэффициенты B_1, B_2, B_3 содержат информацию о старших производных неизвестной функции и позволяют оценить их вклад в значение локальной погрешности, что, в свою очередь, позволяет рассчитать коэффициенты изменения шагов по направлениям и построить новую сетку. Следовательно, представляется рациональным сгруппировать узлы с достаточно большими значениями локальной погрешности в прямоугольные области и построить более плотные отдельные сетки в этих областях (рис. 1, *б*).

Постановка задачи. Пусть дано двумерное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial U(x,y,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 U(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U(x,y,t)}{\partial y^2}+RU(x,y,t)+F(x,y,t),$$

$$0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le t\le 1,$$

где $U(x,y,t)$ — температура пластины в точке (x,y) в момент времени t; $R(x,y)=-20$; $F(x,y)$ — некоторые коэффициенты, определяющие теплообмен с внешней средой,

$$F(x,y)=\begin{cases}2,\ 0{,}7<x<0{,}9,\ 0{,}2<y<0{,}4,\\ 2,\ 0{,}3<x<0{,}4,\ 0{,}7<y<0{,}8,\\ \qquad 0.\end{cases}$$

Краевые условия соответствуют отсутствию теплообмена на границах области в любой момент времени:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=1}=\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=0}=\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=1}=0.$$

Начальное условие $U(x,y,0)=0$ соответствует начальной температуре по всей области на начальном этапе.

Рассмотрим область определения G в виде прямоугольника с границей $\Gamma:\overline{G}=\{a\le x\le b, c\le y\le d\}$, где $a=0, b=1, c=0, d=1$. Отрезки $[a,b]$ и $[c,d]$ разбиваются точками соответственно $x_0=a, x_1, x_2, ..., x_{Nx}=b$ и $y_0=c, y_1, y_2, ...$ $..., y_{Ny}=d$. Через точки проводим прямые, параллельные соответствующим осям. В результате пересечения этих прямых получаем узлы (i,j) с координатами (x_i, y_j), которые образуют сетку $\overline{\omega}=\{(x_i,y_j)\in\overline{G}\}$. Пусть на ней задано значение некоторой сеточной функции $u_{ij}^k\approx U(x_i,y_j,\tau_k)$, являющееся результатом решения ДУЧП на временном шаге k. Необходимо на $k+1$ шаге построить вложенные сетки, эффективно охватывающие узлы функции u_{ij}^k, в которых погрешность вычисления неудовлетворительна.

Метод решения. Задачу моделирования процессов теплопередачи с помощью вложенных адаптивных сеток можно разделить на следующие подзадачи: оценка точности вычислений, поиск и выделение зон высокого градиента, построение вложенных сеток и решение ДУЧП.

Для оценки точности применим метод, предложенный в [2], к значениям функции u_{ij}^k. В результате получим коэффициенты изменения временного шага α_{ij} и значения локальных погрешностей e_{ij}. Следующий шаг заключается в определении координат прямоугольных областей, в которых следует построить вложенные сетки на основании матрицы коэффициентов α_{ij}. Для этого предлагается алгоритм, представленный на рис. 2.

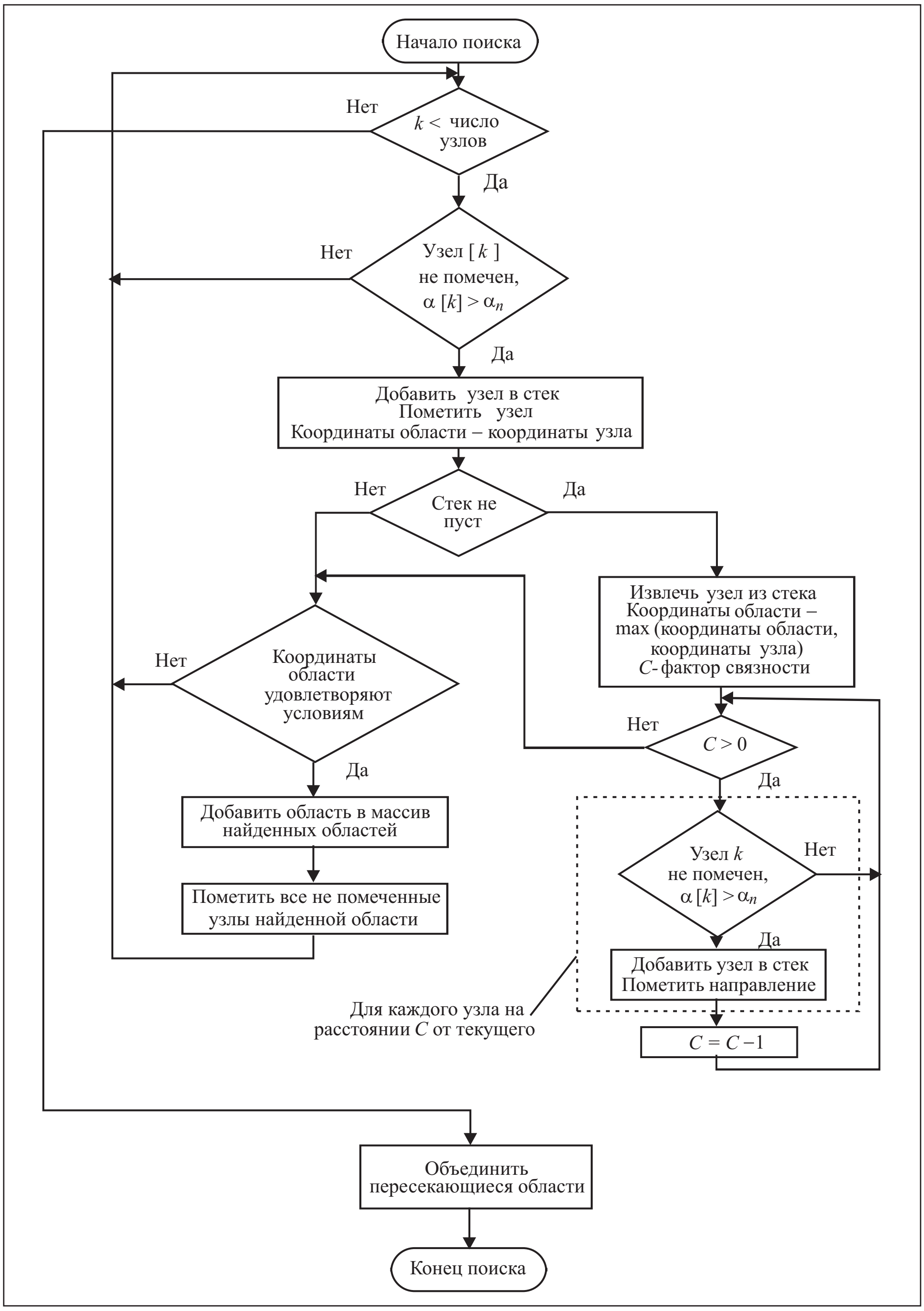
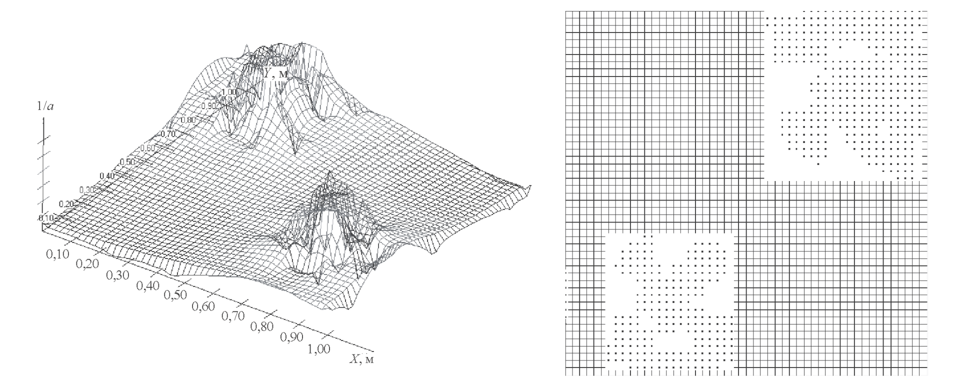


Рис. 2. Алгоритм поиска высокоградиентных зон



а *б*

Рис. 3. График значений $1/\alpha_{ij}$ (*а*) и области, найденные с помощью алгоритма (*б*)

В соответствии с данным алгоритмом выполняется циклический обход узлов сетки. Если узел не был отмечен как пройденный и значение α_{ij} для выбранного узла меньше предварительно выбранного порогового значения α_n, добавляем координаты узла в стек. Пока стек не пуст, извлекаем из него узлы. Координаты найденной области расширяются до координат выбранного узла, который отмечается как пройденный.

Проверяем каждый узел, удовлетворяющий критерию связности с текущим. Если узел не был отмечен как пройденный и значение α_{ij} для него меньше величины α_n, добавляем координаты узла в стек. Если стек пуст, добавляем координаты найденной области в список найденных областей. По окончании прохода всех узлов сетки объединим пересекающиеся области из списка найденных. В результате получим список из m областей, ограниченных индексами узлов $i_{m,\min}$, $j_{m,\min}$, $i_{m,\max}$, $j_{m,\max}$, в которых необходимо построить вложенные сетки.

На рис. 3 представлен график значений $1/\alpha_{ij}$ и изображены найденные области высокоградиентных зон, где точками обозначены узлы, в которых $\alpha_{ij} > \alpha_n$. Используя коэффициенты α_{ij}, расчитанные для главной сетки при оценке точности, вычисляем коэффициенты α_m, β_m, γ_m, для m-й области по формулам $\alpha_m = \min_{ij} \alpha_{ij}$, $\beta_m = \min_{ij} \beta_{ij}$, $\gamma_m = \min_{ij} \gamma_{ij}$, где $i \in [i_{m,\min}, i_{m,\max}]$, $j \in [j_{m,\min}, i_{m,\max}]$. Коэффициенты изменения пространственных шагов сетки β_{ij} и γ_{ij} для m-й области вычисляем по формулам, приведенным в [2], используя ранее полученное значение α_m.

Коэффициенты изменения шагов для главной сетки находим таким же способом, игнорируя значения в узлах, принадлежащих найденным областям, т.е. $\alpha = \min_{ij} \alpha_{ij}$, $\beta = \min_{ij} \beta_{ij}$, $\gamma = \min_{ij} \gamma_{ij}$, где $i \notin [i_{m,\min}, i_{m,\max}]$, $j \notin [j_{m,\min}, i_{m,\max}]$.

Эффективность адаптивного метода

$e_{доп}$	h_x	h_y	T	Время вычисления, с	
				На фиксированной сетке	На вложенных сетках
0,001	0,0042	0,0059	0,00069	1,3	0,5
0,0001	0,0019	0,0028	0,000042	25,6	3,8
0,00001	0,0008	0,0011	0,000009	407	40

Новую сетку перестраиваем с шагами $h_{x,\ нов} = \beta h_x$, $h_{y,\ нов} = \gamma h_y$, временной шаг выбираем $\tau_{\ нов} = \alpha\tau$. На каждой из m областей строим вложенную сетку с пространственными шагами $h_{m,x,\ нов} = \beta_m h_x$, $h_{m,y,\ нов} = \gamma_m h_y$. Во избежание интерполирования значений при синхронизации решений вложенных и главной сеток шаг по времени τ_m выбираем ближайшим к величине $\alpha_m\tau$ и кратным шагу главной сетки. Значения в узлах вложенных и новой главной сеток рассчитывают на основании исходной главной сетки методом адаптивной интерполяции с использованием кривых Фергюссона [7].

После вычисления одного слоя главной сетки и параллельного вычисления $\tau_{\ нов} / \tau_m$ слоев m-й вложенной сетки необходимо синхронизировать вложенные сетки с главной. Значения на границах вложенных сеток заполняются значениями, полученными в результате интерполяции решения, найденного на главной сетке, а значения в узлах главной сетки в пределах границ вложенных, интерполируются на основании значений соответствующей вложенной сеточной функции.

Результаты численного эксперимента. Эффективность адаптивного метода исследована посредством сравнения результатов расчетов, проведенных с фиксированной и вложенной сетками. Точным было принято решение, полученное на шагах $h_x = 0{,}0033$, $h_y = 0{,}0033$, $\tau = 0{,}00001$. Вычисления с помощью адаптивного алгоритма проведены для минимальных шагов фиксированной сетки, выбранных из соответствующих шагов вложенных сеток текущего эксперимента с целью обеспечить идентичную локальную погрешность решения.

В таблице приведены результаты вычислений на адаптивной вложенной сетке и сетке с фиксированным шагом. Как видно из таблицы, при использовании адаптивного метода скорость работы возрастает с уменьшением допустимой погрешности $e_{доп}$.

Выводы

Предложенный способ построения вложенной адаптивной сетки позволяет значительно сократить машинное время, необходимое для решения задач, имеющих значительные градиенты в некоторых зонах вычислительной области, при контроле локальной погрешности. Решение задачи для главной и вложенных сеток можно выполнять параллельно, что позволит еще более сократить время решения при использовании многоядерных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лисейкин В.Д.* Обзор методов построения структурных адаптивных сеток // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1996. — **36**, № 1. — С. 3—41.
2. *Лук'яненко С.О.* Адаптивні обчислювальні методи моделювання об'єктів з розподіленими параметрами. — Київ: ІВЦ Видавництво «Політехніка», 2004. — 236 с.
3. *Spall M.A., Holland W.R.* A nested primitive equation model for oceanic applications // J. of Physical Oceanography. —1991. — № 21. — P. 205—220.
4. *Martin P.J.* Description of the Navy Coastal Ocean Model Version 1.0 / Naval Research Laboratory Technical Report; NRIVFR/7322-00-9962. —2000. — 45 p.
5. *Zavatarelli M., Pinardi N.* The Adriatic Sea modelling system: a nested approach // Annales Geophysicae. — 2003. — № 21. — P. 345—364.
6. *Белоцерковская М.С., Опарин А.М.* Использование вложенных сеток для моделирования процесса фильтрации // Матем. моделирование. — 2004. — **16**, № 12. — С. 3—10.
7. *Смаковский Д.С.* Адаптивная интерполяция на основе кривых Фергюссона для построения сеточных функций // Электрон. моделирование. — 2010. — **32**, № 5. — С. 11—18.

V.V. Dombrovskyi, D.S. Smakovskyi, A.N. Smakovska

MODELING OF HEAT TRANSFER PROCESSES WITH
THE AREAS OF SIGNIFICANT GRADIENTS OF SOLUTION WITH
THE HELP OF NESTED ADAPTIVE GRIDS

This paper is devoted to the method of constructing the adaptive nested grid in the areas of rapid change of the unknown function for solving two-dimensional unsteady heat equation. Partial differential equations are widely used in modeling of various natural phenomena. The effectiveness of solving a particular problem largely depends on the number of grid points and their location. The purpose of the paper is to develop the method of constructing the grid which dynamically adapts to the zones of significant gradients. The construction of nested grids is based on the local error estimate obtained from the difference of solutions with various spatial and temporal grid steps. A search algorithm of zones with significant gradients of the unknown function is proposed. The applied software tool can be used for computer modeling of problems described by the heat equation. The proposed method of constructing the adaptive nested grid permits reducing the use of machine resources required for solving the problem.

K e y w o r d s: partial differential equations, finite difference method, finite difference grid, nested grid.

REFERENCES

1. *Liseykin V.D.* Survey of adaptive structural grid generation technology // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1996. — Vol. 36, № 1. — P. 3—41 (in Russian).

2. *Lukyanenko S.O.* Adaptive Computational Methods for Modeling Objects with Distributed Parameters. – Kyiv: Politechnica, 2004. — 236 p. (in Ukrainian).
3. *Spall M.A., Holland W.R.* A nested primitive equation model for oceanic applications // J. Physical Oceanography. — 1996. — № 21. — P. 205—220.
4. *Martin P.J.* Description of the Navy Coastal Ocean Model Version 1.0 // Naval Research Laboratory Technical Report. — 2000. — 45 p. — NRIVFR/7322-00-9962.
5. *Zavatarelli M., Pinardi N.* The Adriatic Sea modeling system: a nested approach // Annales Geophysicae. — 2003. — № 21. — P. 345—364.
6. *Belotserkovskaya M.S., Oparin A.M.* Nested grids using for filtration process modelling // Mathematical Models. — 2004. — Vol. 16, № 12. — P. 3—10 (in Russian).
7. *Smakovskyi D.S.* Adaptive interpolation based on Ferguson curves for constructing the grid functions // Electronic Modeling. — 2010. — Vol. 32, № 5. — P. 11—18 (in Russian).

Поступила 09.04.14;
после доработки 23.05.14

ДОМБРОВСКИЙ Владимир Владимирович, магистрант Национального технического университета Украины «Киевский политехнический ин-т». Область научных исследований — численные методы.

СМАКОВСКИЙ Денис Сергеевич, канд. техн. наук, доцент кафедры автоматизации проектирования энергетических процессов и систем Национального технического университета Украины «Киевский политехнический ин-т», который окончил в 2006 г. Область научных исследований — численные методы, параллельные вычисления, системы объектно-реляционного отображения.

СМАКОВСКАЯ Анна Николаевна, ассистент кафедры начертательной геометрии, инженерной и компьютерной графики Национального технического университета Украины «Киевский политехнический ин-т». В 2010 г. окончила Издательско-полиграфический ин-т Национального технического университета Украины «Киевский политехнический ин-т». Область научных исследований — прикладная геометрия и компьютерная графика.