

---

УДК 519.85

**В.Б. Крыжановский**, канд. физ.-мат. наук  
Житомирский государственный технологический университет  
(Украина, 10005, Житомир, ул. Черняховского, 103,  
тел./факс: +38 (0412) 241422, e-mail: officerector@ztu.edu.ua)

### **Оптимизация размещения дискретных источников физического поля, описываемого смешанной краевой задачей**

Предложен метод решения минимаксной задачи размещения источников физического поля, которое описывается смешанной краевой задачей с использованием уравнения Пуассона. Функция цели — максимальное значение физического поля на конечном множестве точек области. Множество допустимых значений параметров размещения источников определяется условиями взаимного непересечения и невыхода источников за пределы области. Предложен способ вычисления частных производных решения краевой задачи по параметрам размещения.

Запропоновано метод розв'язання мінімаксної задачі розміщення джерел фізичного поля, яке описується змішаною крайовою задачею для рівняння Пуассона. Функція цілі — максимальне значення фізичного поля на скінченній множині точок області. Множина припустимих значень параметрів розміщення джерел визначається умовами взаємного неперетину та невиходу джерел за межі області. Запропоновано спосіб обчислення частинних похідних розв'язку крайової задачі за параметрами розміщення.

*К л ю ч е в ы е с л о в а: оптимизация систем с распределенными параметрами, математическое программирование, метод конечных элементов.*

**Состояние проблемы.** Многие технические системы содержат дискретные источники теплоты, например однокристалльные системы (system on a chip, SoC) [1], радиационные печи без конвекционной секции (radiant furnace) [2] и другие [3]. Их функционирование в значительной степени зависит от положения источников теплоты, которые в них содержатся.

В современных устройствах используются миллионы транзисторов, работающих на гигагерцовых частотах [1]. При этом выделяется значительное количество энергии, что приводит к повышению температуры однокристалльных систем. Эти термические эффекты оказывают нежелательное воздействие на функционирование однокристалльных систем. Например, большие градиенты температуры приводят к возникновению зна-

© В.Б. Крыжановский, 2014

чительных термонапряжений, что может вызвать ошибки функционирования или даже разрушение микросхемы.

Поэтому на этапе проектирования таких однокристалльных систем возникает задача размещения тепловыделяющих элементов таким образом, чтобы минимизировать негативное влияние значительных перепадов температуры. Поскольку в настоящее время проектирование осуществляется с помощью соответствующего программного обеспечения (CAD/CAE системы), оценка альтернативных проектных решений и выбор из них оптимального, по определенному критерию, является перспективным направлением совершенствования и развития CAD/CAE систем.

В работе [2] рассмотрен пример радиационной печи, в которой для обрабатываемой детали следует получить равномерное распределение температуры. Тепловыделяющие элементы находятся на стенках рабочей зоны печи. Технологически они размещены в виде матрицы. Посредством изменения их тепловыделения формируется желаемое температурное поле. С точки зрения оптимизации такую задачу можно классифицировать как размещение источников различной интенсивности на заданные посадочные места. На этапе подготовки производства определение размещения источников в матрице осуществляется проверкой проектных решений с помощью CAD/CAE систем.

Для того чтобы рассчитать температурное поле в заданной области, следует решить краевую задачу теплопроводности. Одним из методов решения таких краевых задач в CAD/CAE системах является метод конечных элементов. С одной стороны, данные задачи касаются оптимизации систем с распределенными параметрами, с другой, — в них необходимо учесть геометрические ограничения на взаимное расположение источников. Методы, алгоритмы, особенности и классификация задач данного класса подробно рассмотрены в работах [3—5 и др.].

Было установлено [6], что одним из перспективных направлений разработки указанных методов является использование минимаксных методов математического программирования. Поскольку критерий качества размещения источников зависит от решения краевой задачи, возникает необходимость исследования зависимости решения краевой задачи от параметров размещения источников. Для одного класса краевых задач дифференцируемость их решения по параметрам размещения доказана в работах [7, 8]. Однако краевые задачи в большинстве случаев можно решать только численными методами, в частности методом конечных элементов. Поэтому дальнейшие исследования были направлены на поиск алгоритмов численного дифференцирования решений краевых задач по параметрам размещения [9].

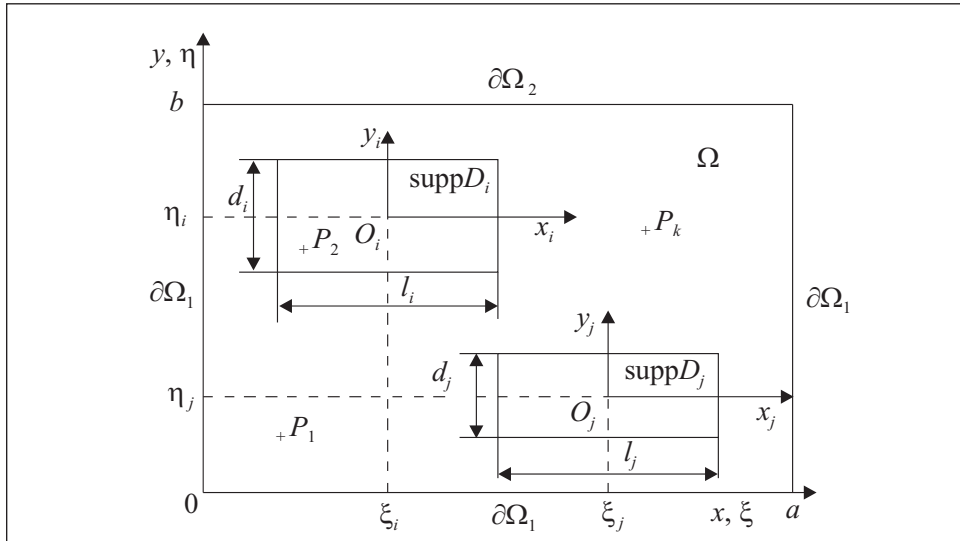


Рис. 1. Носители источников прямоугольной формы, расположенные в области  $\Omega$

Рассмотрим минимаксную задачу оптимального размещения источников в случае, когда распределение температуры описывается смешанной краевой задачей для эллиптического уравнения.

**Математическая постановка задачи.** Пусть  $A(x, y)$  — финитная функция в пространстве  $R^2$ . Ее носителем является произвольный объект  $\varphi$  [10], который назовем носителем источника  $D$  физического поля и обозначим  $\text{supp} D$ . Функция  $A(x, y)$  в этом случае называется интенсивностью источника  $D$ .

Рассмотрим в двумерном евклидовом пространстве область  $\Omega$ , содержащую носители источников физического поля  $\text{supp} D_i, i=1, \dots, m$ . Свяжем с каждым носителем источника собственную локальную систему координат  $Q_i x_i y_i, i=1, \dots, m$ , а с областью  $\Omega$  — глобальную систему координат  $Oxy$ . Возможность поворота локальных систем координат относительно глобальной не допускается. В результате положение каждого носителя в глобальной системе координат определяется положением точки отсчета  $O_i$  собственной системы координат.

Обозначим координаты  $O_i$  через  $z_i = (\xi_i, \eta_i), i=1, \dots, m$ , в глобальной системе координат. Следовательно, положение всех носителей в глобальной системе координат задано вектором  $Z = (z_1, z_2, \dots, z_m)$ . На рис. 1 представлены носители источников физического поля, расположенные в области  $\Omega$ , в случае, когда они являются прямоугольниками. В качестве  $O_i, i=1, 2$ , выбраны пересечения диагоналей прямоугольников. Оси собствен-

ных систем координат для удобства выбраны параллельными осям глобальной системы координат.

Физическое поле, индуцируемое источниками в рассматриваемой расчетной области с учетом влияния окружающей среды, описывается следующей краевой задачей для уравнения эллиптического типа:

$$k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = -f(x, y, Z), \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega_1} = \varphi, k \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_2} = -q, \quad (2)$$

$$f(x, y, Z) = \begin{cases} A_i(x, y, z_i), & \text{if } (x, y) \in \text{supp} D_i \\ 0, & \text{if } (x, y) \notin \bigcup_{i=1}^m \text{supp} D_i \end{cases}, \quad (3)$$

где  $\partial\Omega_1, \partial\Omega_2$  — участки границы области  $\Omega$ ;  $n$  — нормаль к  $\partial\Omega_2$ ;  $\varphi$  и  $q$  — функции, заданные на  $\partial\Omega_1$  и  $\partial\Omega_2$ ;  $k$  — коэффициент, отражающий свойства материала расчетной области  $\Omega$ .

Функция цели, зависящая от размещения носителей источников физического поля, имеет вид

$$F(Z) = \max_j u(x_j, y_j, Z), \quad j \in \{1, 2, \dots, p\}, \quad (4)$$

где  $P_j(x_j, y_j), j=1, 2, \dots, p$  — фиксированные точки области  $\Omega$ . Координаты фиксированных точек области  $\Omega$ , по которым берется максимум значений физического поля, определяются решаемой практической задачей. Если рассматривать значения поля в узлах некоторой регулярной сетки в  $\Omega$ , то можно получить в некотором приближении максимальное значение поля в области  $\Omega$ .

При постановке оптимизационной задачи необходимо разместить источники физического поля в области так, чтобы заданная функция максимума достигла минимального значения, когда носители источников не пересекаются между собой и не выходят за границы области:

условие непересечения носителей источников —

$$\text{supp} D_i \cap \text{supp} D_j = \emptyset, \quad i < j = 1, 2, \dots, m, \quad (5)$$

условие невыхода источников за границы области —

$$\bigcup_{i=1}^m \text{supp} D_i \subset \Omega. \quad (6)$$

Условия (5), (6) определяют допустимое множество  $G$  значений  $Z$ .

Полученная задача оптимизации имеет вид  $F(Z) \rightarrow \min, Z \in G$ , и классифицируется как непрерывная минимаксная задача [11]. Использование соответствующих методов для отыскания стационарных точек функции  $F(Z)$  на множестве  $G$  требует вычисления частных производных функции  $u(x, y, Z)$  по параметрам размещения источников.

**Вычисление частных производных по параметрам размещения источников.** Частные производные функции  $u(x, y, Z)$  вычисляем как описано в [9]. Согласно методу конечных элементов приближенное решение краевой задачи получаем в виде разложения по базисным функциям:

$$\hat{u} = \psi + \sum_{e=1}^M a_e N_e, \quad (7)$$

где  $\psi$  и базисные функции  $N_e, e=1, 2, \dots, M$ , выбираются так, чтобы выполнялось равенство  $u = \hat{u}$  на  $\partial\Omega_1$ , т.е.  $\psi = \varphi$  и  $N_e = 0, e=1, 2, \dots, M$ , на  $\partial\Omega_2$ .

Для определения коэффициентов разложения  $a_e, e=1, 2, \dots, M$ , используем уравнение метода взвешенных невязок

$$k \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} \right] W_l dx dy + \int_{\Omega} W_l f(x, y, Z) dx dy + \\ + \int_{\partial\Omega_2} \left( k \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} + q \right) \bar{W}_l d\Gamma = 0, \quad l=1, 2, \dots, M,$$

где  $W_l, \bar{W}_l$  — весовые функции. На основании формулы Грина получаем

$$-k \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial W_l}{\partial x} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial W_l}{\partial y} \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \right] dx dy + \int_{\Omega} W_l f(x, y, Z) dx dy + \\ + \int_{\partial\Omega_1 + \partial\Omega_2} k \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} W_l d\Gamma + \int_{\partial\Omega_2} \left( k \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} + q \right) \bar{W}_l d\Gamma = 0. \quad (8)$$

Выбираем весовые функции на границе области:  $W_l = 0$  на  $\partial\Omega_1$  и  $\bar{W}_l = -W_l$  на  $\partial\Omega_2$ . Это приводит к тому, что интегралы, содержащие производную по нормали к границе, взаимно уничтожаются и соотношение (8) принимает вид:

$$k \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial W_l}{\partial x} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial W_l}{\partial y} \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \right] dx dy - \int_{\Omega} W_l f(x, y, Z) dx dy + \int_{\partial\Omega_2} W_l q d\Gamma = 0. \quad (9)$$

Подставив в уравнение (9) разложение  $u$  по базисным функциям (7) и положив в качестве базисных функций  $W_l = N_l, \forall l$ , получим систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов разложения

$$Ka = b, \quad (10)$$

где элементы симметричной матрицы  $K$  и правой части  $b$  определяются из уравнений

$$K_{ij} = k \int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy, \quad 1 \leq i, j \leq M,$$

$$b_i = \int_{\Omega} N_i f(x, y, Z) dx dy - \int_{\partial\Omega_2} N_i q d\Gamma - k \int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx dy,$$

$$1 \leq i \leq M. \quad (11)$$

В (11) правая часть системы (10) для определения коэффициентов разложения (7) зависит от параметров размещения  $Z$ . Решая систему уравнений (10), получаем коэффициенты разложения как функции от параметров размещения. Поскольку целью является получение частных производных по параметрам размещения источников, следует  $b$  продифференцировать по параметрам источников и решить систему уравнений (10), подставив полученные частные производные по тому или иному параметру в качестве правой части (10). В результате получим приближение частной производной в виде разложения

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi_k} = \sum_{e=1}^M \frac{\partial a(Z)}{\partial \xi_k} N_e.$$

Теперь рассмотрим способ дифференцирования функции  $f(x, y, Z)$  по параметрам размещения источников. Для этого представим ее в виде разложения в двойной тригонометрический ряд:

$$f(x, y, Z) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} d_{jk} \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b}, \quad (12)$$

где

$$d_{jk} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y, Z) \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} dx dy;$$

$a$  и  $b$  — размеры прямоугольника, в котором находится область  $\Omega$ . Для получения частных производных функции  $f(x, y, Z)$  следует продиффе-

ренцировать разложение (12) по требуемому параметру, результат подставить в (11) и решить полученную систему линейных уравнений (10).

**Геометрические ограничения на размещения.** В случае прямоугольной области  $\Omega$  и прямоугольных носителей источников  $\text{supp } D_i$  ограничения (6) можно представить в виде

$$\xi_i \geq \frac{l_i}{2}, \quad \eta_i \geq \frac{d_i}{2}, \quad \xi_i \leq a - \frac{l_i}{2}, \quad \eta_i \leq b - \frac{d_i}{2}, \quad i=1,2,\dots,m,$$

где  $a, b$  и  $l_i, d_i$  — размеры области  $W$  и носителей  $\text{supp } D_i$ . Очевидно, что носители  $\text{supp } D_i$  и  $\text{supp } D_j$  не пересекаются, если выполняется хотя бы одно из следующих неравенств:

$$\begin{aligned} \xi_i - \xi_j - (l_i + l_j)/2 \geq 0, \quad \xi_j - \xi_i - (l_i + l_j)/2 \geq 0, \\ \eta_i - \eta_j - (d_i + d_j)/2 \geq 0, \quad \eta_j - \eta_i - (d_i + d_j)/2 \geq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Следовательно, множество допустимых решений  $G$  может быть покрыто конечным числом выпуклых подмножеств  $G_k, k = 1, \dots, 4^{\frac{m(m-1)}{2}}$ :

$$G = \bigcup_{k=1}^{4^{\frac{m(m-1)}{2}}} G_k.$$

Здесь  $G_k$  определяется системой линейных неравенств

$$\begin{aligned} \xi_i - \frac{l_i}{2} \geq 0, \quad i=1,\dots,m, \\ \eta_i - \frac{d_i}{2} \geq 0, \quad i=1,\dots,m, \\ -\xi_j + a - \frac{l_j}{2} \geq 0, \quad i=1,\dots,m, \\ -\eta_j + b - \frac{d_j}{2} \geq 0, \quad i=1,\dots,m, \\ E_{ij}(\xi_i, \xi_j, \eta_i, \eta_j) \geq 0, \quad i < j = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $E_{ij}(\xi_i, \xi_j, \eta_i, \eta_j) \geq 0$  — одно из неравенств (13). Перепишем (14) в матричной форме:  $V_k Z + D_k \geq 0$ .

**Решение оптимизационной задачи.** Итак, необходимо вычислить значение  $Z^*$  такое, что  $Z^* = \arg \min \{F(Z) : Z \in G\}$ . Поскольку данная задача является многоэкстремальной [3], поиск глобального оптимума — чрезвычай-

чайно сложная задача. Поэтому предлагаем алгоритм поиска стационарной точки.

**А л г о р и т м.**

1. Формируем начальное размещение  $Z^0$ , соответствующее допустимому размещению носителей  $\text{supp } D_i, i=1,2,\dots,m$ , в области  $\Omega$ . Для этого удобно использовать штрафные функции [12].

2. Определяем выпуклое множество  $G_{i^*}$ , которое содержит  $Z^0$ .

3. Находим стационарную точку  $Z^{i^*}$  функции  $F(Z)$  на множестве  $G_{i^*}$ .

4. Если  $Z^{i^*}$  является стационарной точкой по отношению ко всем подмножествам  $G_i, i=1,\dots,\alpha$ , которые содержат  $Z^{i^*}$ , то останавливаемся. Решение получено. Иначе, если  $G_k$  допускает улучшение  $F(Z)$ , то переходим к шагу 3.

Опишем теперь алгоритм поиска стационарной точки функции (4) на выпуклом множестве  $G_{i^*}$ . Запишем функцию (4) в виде  $F(Z) = \max_j u_j(Z)$ , где  $u_j(Z) = u(x_j, y_j, Z), j \in \{1, 2, \dots, p\}, Z \in G_{i^*}$ . Для решения данной минимаксной задачи используем следующий итеративный метод [11].

Пусть  $Q_{i^*}(Z) = \{g \in G_{i^*} : \|g - Z\| \leq 1\}$ , где  $\|\cdot\|$  — норма в  $R^{2m}$ . Введем следующие функции:

$$\psi(Z) = \min_{g \in Q_{i^*}(Z)} \max_{j \in R(Z)} \langle \nabla u_j(Z), g - Z \rangle,$$

$$\psi_\varepsilon(Z) = \min_{g \in Q_{i^*}(Z)} \max_{j \in R_\varepsilon(Z)} \langle \nabla u_j(Z), g - Z \rangle,$$

где  $R(Z) = \{j \in \{1, 2, \dots, p\} : u_j(Z) = F(Z)\}$ ;  $R_\varepsilon(Z) = \{j \in \{1, 2, \dots, p\} : F(Z) - u_j(Z) \leq \varepsilon\}$ ;  $\langle \cdot; \cdot \rangle$  — скалярное произведение.

Пусть  $\varepsilon_0 > 0, \rho_0 > 0$  и  $Z^0 \in G_{i^*}$ . Предположим, что на  $l$ -й итерации  $Z^l \in G_{i^*}$ . Если  $\psi(Z^l) = 0$ , то  $Z^l$  — стационарная точка функции  $F(Z)$  на множестве  $G_{i^*}$ . Процесс решения закончен.

Если  $\psi(Z^l) < 0$ , то рассмотрим последовательность чисел  $\varepsilon_\nu = \varepsilon_0 / 2^\nu, \nu = 0, 1, 2, \dots$ , и найдем  $\nu = \hat{\nu}$  такое, что  $\psi_{\varepsilon_{\hat{\nu}}}(Z^l) \leq \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \varepsilon_{\hat{\nu}}$ .

Пусть  $\varepsilon_{\hat{\nu}} = \hat{\varepsilon}$ . Предположим, что  $g_{i^*} \in Q_{i^*}$ , так что

$$\psi_{\hat{\varepsilon}}(Z^l) = \max_{j \in R_{\hat{\varepsilon}}(Z^l)} \langle \nabla u_j(Z^l), g_{i^*} - Z^l \rangle.$$

Для того чтобы найти точку  $g_{i^*} \in Q_{i^*}$ , необходимо решить следующую задачу линейного программирования:

$$y \rightarrow \min, \langle \nabla u_j(Z^l), g - Z^l \rangle \leq y, j \in R_{\hat{\varepsilon}}(Z^l), V_{i^*} Z + D_{i^*} \geq 0, \|g - Z^l\| \leq 1.$$



Теперь рассмотрим отрезок  $S = S_{i^*}(\lambda) = Z^l + \lambda(g_{i^*} - Z^l)$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Очевидно, что  $S_{i^*}(\lambda) \in Q_{i^*}$ . Далее, найдем точку  $\lambda_{i^*} \in [0, 1]$  такую, что  $F(S_{i^*}(\lambda_{i^*})) = \min_{\lambda \in [0, 1]} F_2(S_{i^*}(\lambda))$ . При этом можно воспользоваться одним из итеративных методов одномерной оптимизации для нелинейных функций. Продолжая этот процесс, получаем последовательность

$$\{Z^0, Z^1, \dots, Z^l, \dots\} \text{ и } F(Z^0) > F(Z^1) > \dots > F(Z^l) > \dots$$

Известно [11], что если данная последовательность конечна, то последний ее элемент есть стационарной точкой функции  $F(Z)$  на множестве  $G_{i^*}$ . Если эта последовательность бесконечная, то любая граничная точка является стационарной точкой функции  $F(Z)$  на множестве  $G_{i^*}$ .

**Вычислительный эксперимент.** Геометрические и теплофизические свойства, число и начальное размещение источников для задачи (1)—(3) такие же, как в работах [13, 14], в которых физическое поле является распределением температуры в расчетной области. Одной из минимизируемых функций есть функция максимума температуры в узлах регулярной сетки.

Расчетные данные для задачи (1)—(3) следующие:  $k = 0,25$  Вт/(м · град);  $\varphi = 0$ ,  $q = 0$ ,  $a = 5$  см,  $b = 5$  см; рассеиваемая источником мощность 0,06 Вт. Координаты фиксированных точек области  $\Omega$ , образующих регулярную сетку, приведены в табл. 1, а координаты носителей источников при начальном и полученном оптимальном размещении — в табл. 2.

Начальное размещение носителей источников  $\text{supp } D_i$ ,  $i = 1, \dots, 9$ , в области  $\Omega$  и распределение физического поля приведены на рис. 2, а, а результаты размещения носителей с помощью предложенного алгоритма и соответствующее распределение физического поля — на рис. 2, б.

Таблица 1

Номер точки	x, см	y, см	Номер точки	x, см	y, см
1	0,5	0,5	9	0,5	3,25
2	1,75	0,5	10	1,75	3,25
3	3,25	0,5	11	3,25	3,25
4	4,5	0,5	12	4,5	3,25
5	0,5	1,75	13	0,5	4,5
6	1,75	1,75	14	1,75	4,5
7	3,25	1,75	15	3,25	4,5
8	4,5	1,75	16	4,5	4,5

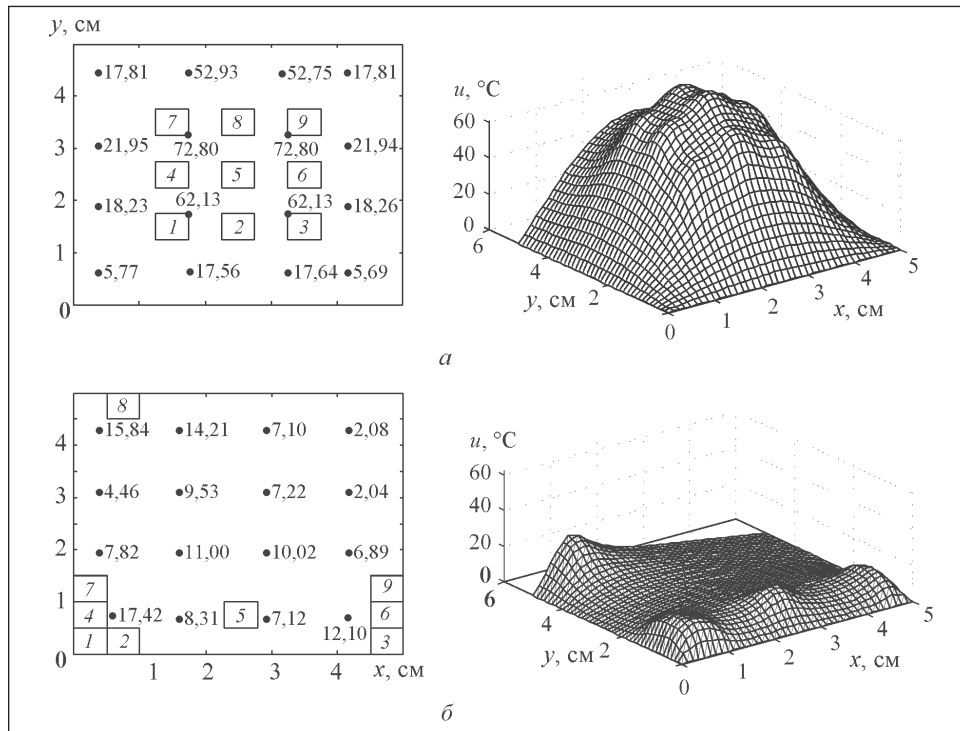


Рис. 2. Начальное (а) и оптимальное (б) размещения носителей источников (значения поля указаны возле соответствующих точек 1—9) и соответствующие физические поля в области  $\Omega$

Таблица 2

supp $D_i$	Координаты носителей источников при размещении			
	начальном		оптимальном	
	$\xi_i$	$\eta_i$	$\xi_i$	$\eta_i$
1	1,5	1,5	0,25	0,25
2	2,5	1,5	0,75	0,25
3	3,5	1,5	4,75	0,25
4	1,5	2,5	0,25	0,75
5	2,5	2,5	2,53	0,75
6	3,5	2,5	4,75	0,75
7	1,5	3,5	0,25	1,25
8	2,5	3,5	0,75	4,75
9	3,5	3,5	4,75	1,25

Как видим, разработанный подход позволяет численно получать частные производные решения краевой задачи по параметрам размещения носителей источников.

## Выводы

Применяемый для смешанных краевых задач метод последовательно однократного размещения носителей источников [3, 4] не гарантирует стационарности получаемых точек. Рассмотренная в работах [5, 6, 12] краевая задача была очень упрощенной, что связано с необходимостью получить ее решение в виде тригонометрического ряда и, как следствие, с возможностью получить частные производные по параметрам размещения. Предлагаемый подход позволяет рассматривать достаточно широкий класс краевых задач, возникающих на практике, используя для этого метод решения задач оптимального размещения дискретных источников физического поля, описываемого смешанной краевой задачей для дифференциального уравнения в частных производных.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chen C.C.-P., et al.* Temperature-Aware Placement for SOCs // Proc. of the IEEE. — 2006. — Vol. 94, № 8. — P. 1502—1517.
2. *Chopade R.P., Mishra S.C., Mahanta P., Maruyama S.* Effects of locations of a 3-D design object in a 3-D radiant furnace for prescribed uniform thermal conditions // Applied Thermal Engineering. — 2011. — Vol. 31, Issue 16. — P. 3262—3274.
3. *Стоян Ю.Г., Пуятин В.П.* Оптимизация технических систем с источниками физических полей. — Киев: Наук. думка, 1988. — 192 с.
4. *Стоян Ю.Г., Пуятин В.П., Чуб И.А.* Оптимизация температурного поля перфорированной пластины с дискретными тепловыми источниками // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1985. — № 11. — С. 64—67.
5. *Яремчук С.И., Бурда Р.В., Матущенко С.С.* Алгоритм решения дискретной минимаксной задачи размещения источников физического поля // Кібернетика і системний аналіз. — 2009. — № 5. — С. 153—163.
6. *Чувашева С.И.* Численные методы решения одного класса оптимизационных задач размещения источников физических полей: Дисс. канд. физ.-мат. наук. — Харьков, 1984. — 107 с.
7. *Стоян Ю.Г., Яремчук С.И., Крыжановский В.Б.* Дифференцируемость поля дискретных источников по параметрам их размещения // Доп. НАН України. — 1995. — № 10. — С. 38—40.
8. *Yaremchuk S., Kryzhanivsky V.* Problem of optimal placement of discrete physical field sources // Applied Numerical Mathematics. — 2004. — Vol. 50, № 1. — С. 121—131.
9. *Крижанівський В.Б.* Чисельне диференціювання розв'язку крайової задачі за параметрами розміщення джерел фізичного поля // Математичні машини і системи. — 2011. — № 3. — С. 73—79.
10. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. — Киев : Наук. думка, 1986. — 268 с.
11. *Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н.* Введение в минимакс. — М. : Наука, 1972. — 368 с.

12. Жовновський Д.О. Метод штрафних функцій оптимізації розміщення дискретних джерел фізичного поля // Вісн. Житомирського інженерно-технологічного інституту. — 1998. — № 8. — С. 293—298.
13. Felczak M., Więcek B. Application of genetic algorithms for electronic devices placement in structures with heat conduction through the substrate // *Microelectronics Reliability*.— 2011. — Vol. 51, Issue 2. — P. 453—459.
14. Felczak M., Więcek B., G. De Mey G. Optimal placement of electronic devices in forced convective cooling conditions // *Ibid.* — 2009. — Vol. 49, Issue 12. — P. 1537—1545.

V. Kryzhanivskyy

#### OPTIMIZATION OF PLACEMENT OF DISCRETE SOURCES OF PHYSICAL FIELD DESCRIBED BY MIXED BOUNDARY PROBLEM

The paper deals with minimax placement problem of discrete physical field sources. The field distribution is described by Poisson's equation with mixed boundary conditions. The objective function is a maximum of field on a finite point set. In the practice these points form a regular grid on a given domain. The set of admissible values of source placement parameters is defined by mutual non-overlapping and belonging of sources to the given domain. The domain and sources are supposed to be rectangles. One of the methods for solving minimax problems, which provides a local optimum and requires computation of partial derivatives with respect to source placement parameters, is used as the solution method. Since the boundary value problem is solved by the method of finite elements, the algorithm to obtain these derivatives is proposed. As a practical example we solved the placement problem for electronic devices with thermal criterion.

*Keywords:* optimization of distributed parameter systems, mathematical programming, finite element method.

#### REFERENCES

1. Chen C.C.-P., et al. Temperature-aware placement for SOCs // *Proc. of the IEEE*. — 2006. — Vol. 94, № 8. — P. 1502—1517.
2. Chopade R.P., Mishra S.C., Mahanta P., Maruyama S. Effects of locations of a 3-D design object in a 3-D radiant furnace for prescribed uniform thermal conditions // *Applied Thermal Engineering*. — 2011. — Vol. 31, Issue 16. — P. 3262—3274.
3. Stoyan Yu., Putiatin V. Optimization of Technical Systems with Physical Field Sources. — Kyiv: Nauk. Dumka, 1988. — 192 p. (in Russian).
4. Stoyan Yu., Putiatin V., Chub I. Optimization of temperature field of perforated plate with discrete heat sources // *Proc. Acad. Sc. of Ukraine. Section A*. — 1985. — № 11. — P. 64—67 (in Russian).
5. Yaremchuk S., Burda R., Matuschenko S. An algorithm to solve a discrete minimax problem of placement of physical field sources // *Cybernetics and System Analysis*. — 2009. — № 5. — P. 153—163 (in Russian).
6. Chuvashova S. Numerical methods of solving of one class of optimization problems of physical field source placement: A Thesis for the Degree of Doctor of Philosophy. — Kharkov, 1984. — 107 p. (in Russian).
7. Stoyan Yu., Yaremchuk S., Kryzhanivskyy V. Differentiability of discrete source field with respect to placement parameters // *Proc. Acad. Sc. of Ukraine*. — 1995. — № 10. — P. 38—40 (in Russian).

8. Yaremchuk S., Kryzhanivskyy V. Problem of optimal placement of discrete physical field sources // Applied Numerical Mathematics. — 2004. — Vol. 50, № 1. — P. 121—131.
9. Kryzhanivskyy V. Numerical differentiation of boundary problem solution with respect to placement parameters of physical field sources // Mathematical Machines and Systems. — 2011. — № 3. — P. 73—79 (in Ukrainian).
10. Stoyan Yu., Yakovlev S. Mathematical models and optimization methods of geometrical design. — Kyiv: Naukova Dumka, 1986. — 268 p. (in Russian).
11. Demianov V., Malozemov V. Fundamentals of Minimax. — Moscow: Nauka, 1972. — 368 p. (in Russian).
12. Zhovnovskyy D. Penalty functions method to solve the optimization problems of discrete physical field sources placement // Proc. Zhytomyr Technological Institute. — 1998. — № 8. — P. 293—298 (in Ukrainian).
13. Felczak M., Więcek B. Application of genetic algorithms for electronic devices placement in structures with heat conduction through the substrate // Microelectronics Reliability. — 2011. — Vol. 51, Issue 2. — P. 453—459.
14. Felczak M., Więcek B., De Mey G. Optimal placement of electronic devices in forced convective cooling conditions // Ibid. — 2009. — Vol. 49, Issue 12. — P. 1537—1545.

Поступила 03.01.14;  
после доработки 10.04.14

*КРЫЖАНОВСКИЙ Вячеслав Борисович, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры программного обеспечения систем Житомирского государственного технологического университета. В 1991 г. окончил Житомирский филиал Киевского политехнического ин-та. Область научных исследований — математическое программирование, геометрическое проектирование, оптимизация технических систем с источниками физических полей.*

