УДК 681.3:519.711.3:517.958:621.313:669

В.Ф. Евдокимов, чл.-кор. НАН Украины,
Е.И. Петрушенко, канд. техн. наук,
Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины
(Украина, 03164, Киев, ул. Генерала Наумова, 15,
тел. 4241063, e-mail:dep_7@voliacable.com),
В.А. Кучаев
ООО «МК Беличанка»
(Украина, Киев, ул. Булаховского, 2, e-mail: vitalku07@yandex.ru)

Интегральная модель трехмерного распределения вихревых токов в непрерывно литой заготовке круглого сечения при электромагнитном перемешивании в вертикальной МНЛЗ. II

Получена скалярная система интегральных уравнений, описывающая в цилиндрической системе координат трехмерное распределение вихревых токов в системе непрерывно литая заготовка круглого сечения — кристаллизатор при электромагнитном перемешивании в вертикальной МНЛЗ, с учетом влияния вихревых токов в кристаллизаторе. Исходной является векторная система интегральных уравнений.

Отримано скалярну систему інтегральних рівнянь, яка описує в циліндричній системі координат тривимірний розподіл вихрових струмів в системі безперервно лита заготовка круглого перерізу — кристалізатор при електромагнітному перемішуванні в вертикальній МБЛЗ, з врахуванням впливу вихрових струмів в кристалізаторі. Вихідною є векторна система інтегральних рівнянь.

К л ю ч е в ы е с л о в а: интегральная модель, трехмерное распределение, вихревые токи, непрерывно литая заготовка, круглое сечение, электромагнитное перемешивание, вертикальная МНЛЗ.

В первой части статьи [1] получена скалярная система интегральных уравнений (СкСИУ), описывающая в цилиндрической системе координат трехмерное распределение вихревых токов в уединенной непрерывно литой заготовке (НЛЗ) круглого сечения при электромагнитном перемешивании в вертикальной МНЛЗ. Теперь получим СкСИУ, описывающую в цилиндрической системе координат трехмерное распределение вихревых токов в системе НЛЗ круглого сечения — кристаллизатор кольцевого сечения (тор прямоугольного сечения) при электромагнитном перемешивании в вертикальной МНЛЗ, с учетом влияния вихревых токов в кристализаторе.

Заготовка в форме тора прямоугольного сечения и близко расположенный к ней изолированный кристаллизатор в форме тора прямоугольного сечения находятся в магнитном поле индуктора, в обмотке которого протекает изменяющийся во времени ток. В основе модели трехмерного распределения вихревых токов в системе непрерывно литая заготовка — кристаллизатор лежит векторная система интегральных уравнений (ВСИУ), полученная в результате обобщения ВСИУ для уединенной заготовки [1, 2] на систему двух близко расположенных изолированных проводников, какими являются заготовка и кристаллизатор МНЛЗ. Исходная ВСИУ преобразована к СкСИУ в цилиндрической системе координат.

Пусть НЛЗ находится в кристаллизаторе [2, см. рисунок]. Распределение вихревых токов в заготовке зависит от их распределения в кристаллизаторе, и наоборот. Полагая, что НЛЗ и кристаллизатор взаимно изолированы, для описания распределения вихревых токов в объеме каждого проводника следует воспользоваться системой уравнений Максвелла, приведенной в [2, 3].

Обозначим вектор плотности токов в обмотке индуктора через $\overline{\delta}_0$, а объем, занимаемый обмотками — через V_0 [1]. В заготовке, которая представляет собой массивное проводящее тело (тор прямоугольного сечения) объема V_c, индуктируются вихревые токи плотностью $\overline{\delta}_c$, а в кристаллизаторе, который представляет собой массивное проводящее тело (тор прямоугольного сечения) объема V_k, — индуктируются вихревые токи плотностью $\overline{\delta}_k$.

Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в объеме заготовки V_{c} [2] сводятся к уравнениям

$$\Delta \overline{A}_c = -\mu_0 \overline{\delta}_c, \tag{1}$$

$$\Delta \varphi_c = 0, \tag{2}$$

а в объеме кристаллизатора V_k — к уравнениям

$$\Delta \overline{A}_k = -\mu_0 \overline{\delta}_k, \tag{3}$$

$$\Delta \varphi_k = 0. \tag{4}$$

В пространстве, окружающем объемы V_c и V_k, уравнения Максвелла сводятся к уравнению

$$\Delta \overline{A}_0 = -\mu_0 \overline{\delta}_0, \tag{5}$$

В однородной магнитной среде решение уравнений (1), (3), (5) имеет вид

$$\overline{A}(Q,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_{V_0} \frac{\overline{\delta}_0(M,t)}{r_{QM}} d\upsilon_M + \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_{V_{\text{c}}} \frac{\overline{\delta}_{\text{c}}(M,t)}{r_{QM}} d\upsilon_M + \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_{V_k} \frac{\overline{\delta}_k(M,t)}{r_{QM}} d\upsilon_M, \tag{6}$$

где r_{QM} — расстояние между точками $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ и $M(x_M, y_M, z_M)$.

Входящие в (6) вихревые токи плотностью $\bar{\delta}_c$ в объеме V_c и плотностью $\bar{\delta}_k$ в объеме V_k неизвестны. Для их определения необходимо воспользоваться соотношением (4) из работы [2]:

$$\bar{E}_c(Q,t) = -\frac{\partial \bar{A}_c(Q,t)}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi_c(Q,t), \quad Q \in V_c, \tag{7}$$

$$\bar{E}_k(Q,t) = -\frac{\partial \bar{A}_k(Q,t)}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi_k(Q,t), \quad Q \in V_k. \tag{8}$$

Подставляя в (7) и (8) выражение (6), получаем следующую ВСИУ:

$$\bar{E}_c(Q,t) + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_c}\gamma_c(M)\frac{\partial \bar{E}_c(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_k}\gamma_k(M)\frac{\partial \bar{E}_k(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M =$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_0}\frac{\partial \bar{\delta}_0(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M - \operatorname{grad}\varphi_c, \quad Q \in V_c, \tag{9}$$

$$\bar{E}_k(Q,t) + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_k}\gamma_k(M)\frac{\partial \bar{E}_k(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_c}\gamma_c(M)\frac{\partial \bar{E}_c(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M =$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_0}\frac{\partial \bar{\delta}_0(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M - \operatorname{grad}\varphi_k(Q,t), \quad Q \in V_k. \tag{10}$$

Определим скалярные потенциалы $\varphi_c(Q,t)$, $Q \in V_c$ и $\varphi_k(Q,t)$, $Q \in V_k$ решив задачи Неймана для уравнений (2) и (4) при граничных условиях:

$$\left.\frac{\partial \varphi_c(Q,t)}{\partial n}\right|_{Sc} = -\left.\frac{\partial A_{cn}(Q,t)}{\partial t}\right|_{Sc}, \quad \left.\frac{\partial \varphi_k(Q,t)}{\partial n}\right|_{S_k} = -\left.\frac{\partial A_{kn}(Q,t)}{\partial t}\right|_{S_k},$$

где A_{cn} — проекция вектора $\bar{A}_c$ на нормаль $\bar{n}_Q$ к поверхности заготовки S_c в точке Q; A_{kn} — проекция вектора $\bar{A}_k$ на нормаль $\bar{n}_Q$ к поверхности кристаллизатора S_k в точке Q; положительное направление $\bar{n}_Q$ принято исходя из объемов заготовки и кристаллизатора в окружающее пространство. Решение этих задач будем искать с помощью потенциала простого слоя плотностью τ_c на поверхности S_c:

$$\varphi_c(Q,t) = \frac{1}{4\pi}\int_{S_c}\frac{\tau_c(M,t)}{r_{QM}}ds_M, \quad Q \in V_c, \tag{11}$$

и плотностью τ_k на поверхности S_k:

$$\varphi_k(Q,t)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_k}\frac{\tau_k(M,t)}{r_{QM}}ds_M,\quad Q\in V_k. \tag{12}$$

При этом для определения τ_c и τ_k на поверхностях S_c и S_k необходимо решить следующие интегральные уравнения Фредгольма второго рода:

$$\tau_c(Q,t)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_c}\tau_c(M,t)\frac{\cos(\bar{n}_Q\bar{r}_{QM})}{r_{QM}^2}ds_M=-2\frac{\partial A_{cn}(Q,t)}{\partial t},\quad Q\in S_c, \tag{13}$$

$$\tau_k(Q,t)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_k}\tau_k(M,t)\frac{\cos(\bar{n}_Q\bar{r}_{QM})}{r_{QM}^2}ds_M=-2\frac{\partial A_{kn}(Q,t)}{\partial t},\quad Q\in S_k. \tag{14}$$

Подставив (11) в уравнение (9), получим

$$\bar{E}_c(Q,t)+\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{V_c}\gamma_c(M)\frac{\partial\bar{E}_c(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{V_k}\gamma_k(M)\frac{\partial\bar{E}_k(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_c}\tau_c(M,t)\operatorname{grad}_Q\frac{1}{r_{QM}}ds_M=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{V_0}\frac{\partial\bar{\delta}_0(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M,\quad Q\in V_c. \tag{15}$$

Подставив в (15) выражение

$$\operatorname{grad}_Q\frac{1}{r_{QM}}=\frac{x_M-x_Q}{r_{QM}^3}\bar{e}_X+\frac{y_M-y_Q}{r_{QM}^3}\bar{e}_Y+\frac{z_M-z_Q}{r_{QM}^3}\bar{e}_Z=\frac{\bar{r}_{QM}}{r_{QM}^3} \tag{16}$$

и, кроме того, заменив вектор $\bar{E}_c(Q,t)$ вектором $\bar{\delta}_c(Q,t)$, получим следующее интегральное уравнение (ИУ):

$$\frac{\bar{\delta}_c(Q,t)}{\lambda\gamma_c(Q)}+\int\limits_{V_c}\frac{\partial\bar{\delta}_c(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+\int\limits_{V_k}\frac{\partial\bar{\delta}_k(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+$$

$$+\frac{1}{\mu_0}\int\limits_{S_c}\tau_c(M,t)\frac{\bar{r}_{QM}}{r_{QM}^3}ds_M=-\int\limits_{V_0}\frac{\partial\bar{\delta}_0(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M,\quad Q\in V_c. \tag{17}$$

Теперь подставим в (13) выражение (6) и получим

$$\bar{\tau}_c(Q,t)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_c}\tau_c(M,t)\frac{\cos(\bar{n}_Q\bar{r}_{QM})}{r_{QM}^2}ds_M+2\lambda\int\limits_{V_c}\frac{\partial\delta_{cnQ}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+$$

$$+2\lambda\int\limits_{V_k}\frac{\partial\delta_{knQ}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M=-2\lambda\int\limits_{V_0}\frac{\partial\delta_{0nQ}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M,\quad Q\in S_c. \qquad (18)$$

Подставив потенциал φ_k (12) в (10), получим

$$\overline{E}_k(Q,t)+\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{V_k}\gamma_k(M)\frac{\partial\overline{E}_k(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M+\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{V_c}\gamma_c(M)\frac{\partial\overline{E}_c(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_k}\tau_k(M,t)\,\mathrm{grad}_Q\frac{1}{r_{QM}}\,ds_M=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{V_0}\frac{\partial\bar{\delta}_0(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M,\quad Q\in V_c. \qquad (19)$$

Подставив (16) в (19) и заменив в нем вектор $\overline{E}_k(Q,t)$ вектором $\bar{\delta}_k(Q,t)$, получим следующее ВИУ:

$$\frac{\bar{\delta}_k(Q,t)}{\lambda\gamma_k(Q)}+\int\limits_{V_k}\frac{\partial\bar{\delta}_k(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M+\int\limits_{V_c}\frac{\partial\bar{\delta}_c(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M+$$

$$+\frac{1}{\mu_0}\int\limits_{S_k}\tau_k(M,t)\frac{\bar{r}_{QM}}{r_{QM}^3}\,ds_M=-\int\limits_{V_0}\frac{\partial\bar{\delta}_0(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M,\quad Q\in V_k. \qquad (20)$$

Теперь подставим в ИУ (14) выражение (6) и получим

$$\tau_k(Q,t)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_k}\tau_k(M,t)\frac{\cos(\bar{n}_Q\bar{r}_{QM})}{r_{QM}^2}\,ds_M+2\lambda\int\limits_{V_c}\frac{\partial\delta_{cnQ}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M+$$

$$+2\lambda\int\limits_{V_k}\frac{\partial\delta_{knQ}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M=-2\lambda\int\limits_{V_0}\frac{\partial\delta_{0nQ}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M,\quad Q\in S_k. \qquad (21)$$

Таким образом, с помощью ВСИУ (17),(18),(20),(21) при заданных начальных условиях $\bar{\delta}_c(Q,O)$, $Q\in V_c$, $\bar{\delta}_k(Q,O)$, $Q\in V_k$, $\bar{\delta}_0(Q,O)$, $Q\in V_0$, решена задача расчета вихревых токов в системе НЛЗ — кристаллизатор в нестационарных режимах.

Для преобразования ВСИУ (17),(20) к СкСИУ потребуются выражения ортов $\bar{e}_\rho(M)$, $\bar{e}_\psi(M)$ через орты $\bar{e}_\rho(Q)$, $\bar{e}_\psi(Q)$ [4, рис. 3]:

$$\bar{e}_\rho(M)=\bar{e}_\rho(Q)\cos(\psi_M-\psi_Q)+\bar{e}_\psi(Q)\sin(\psi_M-\psi_Q),$$

$$\bar{e}_\psi(M)=-\bar{e}_\rho(Q)\sin(\psi_M-\psi_Q)+\bar{e}_\psi(Q)\cos(\psi_M-\psi_Q).$$

Нетрудно показать, что вектор $\bar{r}_{QM}$ можно выразить через орты $\bar{e}_\rho(Q)$, $\bar{e}_\psi(Q)$, $\bar{e}_z$:

$$\bar{r}_{QM}=\bar{e}_\rho(Q)r_{QM}^{\rho_Q}+\bar{e}_\psi(Q)\,r_{QM}^{\psi_Q}+\bar{e}_z(Q)\,r_{QM}^{z_Q},\; r_{QM}^{\rho_Q}=\rho_M\cos(\psi_M-\psi_Q)-\rho_Q,$$

$$r_{QM}^{\psi_Q}=\rho_M\sin(\psi_M-\psi_Q),\; r_{QM}^{z_Q}=(z_M-z_Q),$$

$$\bar{r}_{QM}^2=(r_{QM}^{\rho_Q})^2+(r_{QM}^{\psi_Q})^2+(r_{QM}^{z_Q})^2=$$

$$=\rho_M^2+\rho_Q^2-2\rho_M\rho_Q\cos(\psi_M-\psi_Q)+(z_M-z_Q)^2,$$

$$r_{QM}=\sqrt{\rho_M^2+\rho_Q^2-2\rho_M\rho_Q\cos(\psi_M-\psi_Q)+(z_M-z_Q)^2}.$$

Преобразование ВИУ (17) для распределения вихревых токов в НЛЗ круглого сечения в СкСИУ в цилиндрической системе координат. Запишем векторы $\bar{\delta}_c(Q_c,t)$, $\bar{\delta}_c(M_c,t)$, $\bar{\delta}_0(M_0,t)$, $\bar{\delta}_k(M_k,t)$, входящие в уравнение (17), в цилиндрической системе координат:

$$\bar{\delta}_c(Q_c,t)=\delta_{c\rho Q_c}(Q_c,t)\,\bar{e}_\rho(Q_c)+\delta_{c\psi Q_c}(Q_c,t)\,\bar{e}_\psi(Q_c)+\delta_{cZ}(Q_c,t)\,\bar{e}_Z,$$

$$\bar{\delta}_c(M_c,t)=\delta_{c\rho M_c}(M_c,t)\,\bar{e}_\rho(M_c)+\delta_{c\psi M_c}(M_c,t)\,\bar{e}_\psi(M_c)+\delta_{cZ}(M_c,t)\,\bar{e}_z,$$

$$\bar{\delta}_0(M_0,t)=\delta_{0\rho M_0}(M_0,t)\,\bar{e}_\rho(M_0)+\delta_{0\psi M_0}(M_0,t)\,\bar{e}_\psi(M_0)+\delta_{0ZM_0}(M_0,t)\,\bar{e}_z,$$

$$\bar{\delta}_k(M_k,t)=\delta_{k\rho M_k}(M_k,t)\,\bar{e}_\rho(M_k)+\delta_{k\psi M_k}(M_k,t)\,\bar{e}_\psi(M_k)+\delta_{kZ}(M_k,t)\,\bar{e}_Z. \qquad (22)$$

Для выражения векторов (22) через орты $\bar{e}_\rho(Q)$, $\bar{e}_\psi(Q)$, $\bar{e}_z$ используем выражения ортов $\bar{e}_\rho(M_c)$, $\bar{e}_\psi(M_c)$ через орты $\bar{e}_\rho(Q_c)$, $\bar{e}_\psi(Q_c)$:

$$\bar{e}_\rho(M_c)=\bar{e}_\rho(Q_c)\cos(\psi_{M_c}-\psi_{Q_c})+\bar{e}_\psi(Q_c)\sin(\psi_{M_c}-\psi_{Q_c}), \qquad (23)$$

$$\bar{e}_\psi(M_c)=-\bar{e}_\rho(Q_c)\sin(\psi_{M_c}-\psi_{Q_c})+\bar{e}_\psi(Q_c)\cos(\psi_{M_c}-\psi_{Q_c}). \qquad (24)$$

Подставим выражения (23) и (24) во второе выражение (22):

$$\bar{\delta}_c(M_c,t)=\delta_{c\rho M_c}(M_c,t)\,\bar{e}_\rho(M_c)+\delta_{c\psi M_c}(M_c,t)\,\bar{e}_\psi(M_c)+$$

$$+\delta_{cZ}(M_c,t)\,\bar{e}_z=\delta_{c\rho M_c}(M_c,t)[\bar{e}_\rho(Q_c)\cos(\psi_{M_c}-\psi_{Q_c})+$$

$$+\bar{e}_\psi(Q_c)\sin(\psi_{M_c}-\psi_{Q_c})]+\delta_{c\psi M_c}(M_c,t)[-\bar{e}_\rho(Q_c)\sin(\psi_{M_c}-\psi_{Q_c})+$$

$$+\bar{e}_\psi(Q_c)\cos(\psi_{M_c}-\psi_{Q_c})]+\delta_{cZ}(M_c,t)\,\bar{e}_z=\delta_{c\rho Q_c}(M_c,t)\,\bar{e}_\rho(Q_c)+$$

$$+\delta_{c\psi Q_c}(M_c,t)\,\bar{e}_\psi(Q_c,t)+\delta_{cZ}(M_c,t)\,\bar{e}_Z, \qquad (25)$$

где

$$\delta_{c\rho Q_c}(M_c,t)=\delta_{c\rho M_c}(M_c,t)\cos(\psi_{M_c}-\psi_{Q_c})-\delta_{c\psi M_c}(M,t)\sin(\psi_{M_c}-\psi_{Q_c}),$$

$$\delta_{c\psi Q_c}(M_c,t)=\delta_{c\rho M_c}(M_c,t)\sin(\psi_{M_c}-\psi_{Q_c})+\delta_{c\psi M_c}(M_c,t)\cos(\psi_{M_c}-\psi_{Q_c}). \tag{26}$$

Аналогично преобразуем выражение для $\bar{\delta}_0(M_0,t)$:

$$\bar{\delta}_0(M_0,t)=\delta_{0\rho M_0}(M_0,t)\,\bar{e}_\rho(M_0)+$$
$$+\delta_{0\psi M_0}(M_0,t)\,\bar{e}_\psi(M_0)+\delta_{0ZM_0}(M_0,t)\,\bar{e}_z. \tag{27}$$

Подставим в (27) орты $\bar{e}_\rho(M_0)$, $\bar{e}_\psi(M_0)$, выраженные через орты $\bar{e}_\rho(Q_c)$, $\bar{e}_\psi(Q_c)$, используя выражения (23), (24):

$$\bar{\delta}_0(M_0,t)=\delta_{0\rho M_0}(M_0,t)\,\bar{e}_\rho(M_0)+\delta_{0\psi M_0}(M_0,t)\,\bar{e}_\psi(M_0)+$$
$$+\delta_{0ZM_0}(M_0,t)\,\bar{e}_z=\delta_{0\rho M_0}(M_0,t)\,[\bar{e}_\rho(Q_c)\cos(\psi_{M_0}-\psi_{Q_c})+$$
$$+\bar{e}_\psi(Q_c)\sin(\psi_{M_0}-\psi_{Q_c})]+\delta_{0\psi M_0}(M_0,t)\,[-\bar{e}_\rho(Q_c)\sin(\psi_{M_0}-\psi_{Q_c})+$$
$$+\bar{e}_c(Q_c)\cos(\psi_{M_0}-\psi_{Q_c})]+\delta_{0ZM_0}(M_0,t)\,\bar{e}_Z=\delta_{0\rho Q_c}(M_0,t)\,\bar{e}_\rho(Q_c)+$$
$$+\delta_{0\psi Q_c}(M_0,t)\,\bar{e}_\psi(Q_c)+\delta_{0ZM_0}(M_0,t)\,\bar{e}_Z, \tag{28}$$

где

$$\delta_{0\rho Q_c}(M_0,t)=\delta_{0\rho M_0}(M_0,t)\cos(\psi_{M_0}-\psi_{Q_c})-\delta_{0\psi M_0}(M_0,t)\sin(\psi_{M_0}-\psi_{Q_c}),$$

$$\delta_{0\psi Q_c}(M_0,t)=\delta_{0\rho M_0}(M_0,t)\sin(\psi_{M_0}-\psi_{Q_c})+\delta_{0\psi M_0}(M_0,t)\cos(\psi_{M_0}-\psi_{Q_c}). \tag{29}$$

Аналогично преобразуем выражение для вектора $\bar{\delta}_k(M_k,t)$:

$$\bar{\delta}_k(M_k,t)=\delta_{k\rho M_k}(M_k,t)\,\bar{e}_\rho(M_k)+\delta_{k\psi M_k}(M_k,t)\,\bar{e}_\psi(M_k)+$$
$$+\delta_{kZ}(M_k,t)\,\bar{e}_Z=\delta_{k\rho M_k}(M_k,t)\,[\bar{e}_\rho(Q_c)\cos(\psi_{M_k}-\psi_{Q_c})+$$
$$+\bar{e}_\psi(Q_c)\sin(\psi_{M_k}-\psi_{Q_c})]+\delta_{k\psi M_k}(M_k,t)\,[-\bar{e}_\rho(Q_c)\sin(\psi_{M_k}-\psi_{Q_c})+$$
$$+\bar{e}_\psi(Q_c)\cos(\psi_{M_k}-\psi_{Q_c})]+\delta_{kZ}(M_k,t)\,\bar{e}_Z=\delta_{k\rho Q_c}(M_k,t)\,\bar{e}_\rho(Q_c)+$$
$$+\delta_{k\rho Q_c}(M_k,t)\,\bar{e}_\psi(Q_c)+\delta_{kZ}(M_k,t)\,\bar{e}_Z, \tag{30}$$

где

$$\delta_{k\rho Q_c}(M_k,t)=\delta_{k\rho M_k}(M_k,t)\cos(\psi_{M_k}-\psi_{Q_c})-\delta_{k\psi M_k}(M_k,t)\sin(\psi_{M_k}-\psi_{Q_c}),$$

$$\delta_{k\psi Q_c}(M_k,t)=\delta_{k\rho M_k}(M_k,t)\sin(\psi_{M_k}-\psi_{Q_c})+\delta_{k\psi M_k}(M_k,t)\cos(\psi_{M_k}-\psi_{Q_c}). \tag{31}$$

Подставим в ВИУ (17) выражения (25), (28), (30):

$$\frac{\delta_{c\rho Q_c}(Q_c,t)\,\bar{e}_\rho(Q_c)+\delta_{c\psi Q_c}(Q_c,t)\,\bar{e}_\psi(Q_c)+\delta_{cZQ_c}(Q_c,t)\,\bar{e}_Z(Q_c)}{\lambda\gamma_c(Q_c)}+$$

$$+\int\limits_{V_c}\frac{\partial\,[\delta_{c\rho Q_c}(M_c,t)\,\bar{e}_\rho(Q_c)+\delta_{c\psi Q_c}(M_c,t)\,\bar{e}_\psi(Q_c)+\delta_{cZQ_c}(M_c,t)\,\bar{e}_Z(M_c)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_cM_c}}\,dv_M+$$

$$+\int\limits_{V_k}\frac{\partial\,[\delta_{k\rho Q_c}(M_k,t)\,\bar{e}_\rho(Q_c)+\delta_{k\psi Q_c}(M_k,t)\,\bar{e}_\psi(Q_c)+\delta_{kZQ_c}(M_k,t)\,\bar{e}_Z(M_k)}{\partial t}\times$$

$$\times\frac{1}{r_{Q_cM_k}}\,dv_M+\frac{1}{\mu_0}\int\limits_{S_c}\tau(M,t)\,\frac{\bar{e}_\rho(Q_c)\,r^{\rho Q_c}_{Q_cM}+\bar{e}_\psi(Q_c)\,r^{\psi Q_c}_{Q_cM}+\bar{e}_Z\,r^{ZQ_c}_{Q_cM}}{r^3_{QM}}\,ds_M=$$

$$=-\int\limits_{V_0}\frac{\partial\,[\delta_{0\rho Q_c}(M_0,t)\,\bar{e}_\rho(Q_c)+\delta_{0\psi Q_c}(M_0,t)\,\bar{e}_\psi(Q_c)+\delta_{0ZQ_c}(M_0,t)\,\bar{e}_Z(M_0)}{\partial t}\times$$

$$\times\frac{1}{r_{Q_cM_0}}\,dv_M. \tag{32}$$

Приравнивая выражения при одноименных ортах справа и слева в (32), получаем три СкИУ. Первое из них получаем, приравнивая выражения при ортах $\bar{e}_\rho(Q_c)$:

$$\frac{\delta_{c\rho Q_c}(Q_c,t)}{\lambda\gamma_c(Q_c)}+\int\limits_{V_c}\frac{\partial\delta_{c\rho Q_c}(M_c,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_cM_c}}\,d\upsilon_M+\int\limits_{V_k}\frac{\partial\delta_{k\rho Q_c}(M_k,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_kM_k}}\,dv_M+$$

$$+\frac{1}{\mu_0}\int\limits_{S_c}\tau(M,t)\,\frac{r^{\rho Q_c}_{Q_cM}}{r^3_{Q_cM}}\,ds_M=-\int\limits_{V_0}\frac{\partial\delta_{0\rho Q_c}(M_0,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_cM_0}}\,d\upsilon_M. \tag{33}$$

Подставляя в (33) вместо $\delta_{c\rho Q_c}(Q_c,t)$, $\delta_{k\rho Q_c}(M_k,t)$, $\delta_{0\rho Q_c}(M_0,t)$ их выражения (22), (29), (31), получаем

$$\frac{\delta_{c\rho Q_c}(Q_c,t)}{\lambda\gamma_c(Q_c)}+\int\limits_{V_c}\frac{\partial\,[\delta_{c\rho M_c}(M_c,t)\cos(\psi_{M_c}-\psi_{Q_c})]}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_cM_c}}\,d\upsilon_M-$$

$$-\int\limits_{V_c}\frac{\partial\,[\delta_{c\psi M_c}(M_c,t)\sin(\psi_{M_c}-\psi_{Q_c})]}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_cM_c}}\,d\upsilon_M+$$

$$+\int\limits_{V_k}\frac{\partial\,[\delta_{k\rho M_k}(M_k,t)\cos(\psi_{M_k}-\psi_{Q_c})]}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_kM_k}}\,d\upsilon_M-$$

$$-\int\limits_{V_k}\frac{\partial\,[\delta_{k\psi M_k}(M_k,t)\sin(\psi_{M_k}-\psi_{Q_c})]}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_cM_k}}\,d\upsilon_M+\frac{1}{\mu_0}\int\limits_{S_c}\tau_c(M,t)\frac{r^{\rho Q_c}_{Q_cM}}{r^3_{Q_cM}}\,ds_M=$$

$$=-\int\limits_{V_0}\frac{\partial[\delta_{0\rho M_0}(M_0,t)\cos(\psi_{M_0}-\psi_{Q_c})-\delta_{0\psi M_0}(M_0,t)\sin(\psi_{M_0}-\psi_{Q_c})}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_cM}}\,dv_M,$$

$$Q_c\in V_c. \tag{34}$$

Приравнивая выражения справа и слева от $\bar{e}_\psi(Q_c)$, получаем второе СкИУ:

$$\frac{\delta_{c\psi Q_c}(Q_c,t)}{\lambda\gamma_c(Q_c)}+\int\limits_{V_c}\frac{\partial\delta_{c\psi Q_c}(M_c,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_cM_c}}\,d\upsilon_M+\int\limits_{V_k}\frac{\partial\delta_{k\psi Q_c}(M_k,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_cM_k}}\,dv_M+$$

$$+\frac{1}{\mu_0}\int\limits_{S_c}\tau(M,t)\frac{r^{\psi Q_c}_{Q_cM}}{r^3_{Q_cM}}\,ds_M=-\int\limits_{V_0}\frac{\partial\delta_{0\psi Q_c}(M_0,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_cM_0}}\,d\upsilon_M,\quad Q_c\in V_c. \tag{35}$$

Подставив в (35) вместо $\delta_{c\psi Q_c}(Q_c,t)$, $\delta_{k\psi Q_c}(M_k,t)$, $\delta_{0\psi Q_c}(M_0,t)$ их выражения (26), (29), (31), получим

$$\frac{\delta_{c\psi Q_c}(Q_c,t)}{\overline{\lambda\gamma}_c(Q_c)}+$$

$$+\int\limits_{V_c}\frac{\partial[\delta_{c\rho M_c}(M_c,t)\sin(\psi_{M_c}-\psi_{Q_c})+\delta_{c\psi M_c}(M_c,t)\cos(\psi_{M_c}-\psi_{Q_c})]}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_cM_c}}\,d\upsilon_M+$$

$$+\int\limits_{V_k}\frac{\partial[\delta_{k\rho M_k}(M_k,t)\sin(\psi_{M_k}-\psi_{Q_c})+\delta_{k\psi M_k}(M_k,t)\cos(\psi_{M_k}-\psi_{Q_c})]}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_cM_k}}\,d\upsilon_M+$$

$$+\frac{1}{\mu_0}\int\limits_{S_c}\tau(M,t)\frac{r^{\psi Q_c}_{Q_cM}}{r^3_{Q_cM}}\,ds_M=$$

$$=-\int\limits_{V_0}\frac{\partial[\delta_{0\rho M_0}(M_0,t)\sin(\psi_{M_0}-\psi_{Q_c})+\delta_{0\psi M_0}(M_0,t)\cos(\psi_{M_0}-\psi_{Q_c})}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_cM_0}}\,dv_M,$$

$$Q_c\in V_c. \tag{36}$$

Приравнивая выражения справа и слева от $\bar{e}_Z$, получаем третье СкИУ:

$$\frac{\delta_{cZQ}(Q_c,t)}{\lambda\gamma_c(Q_c)}+\int_{V_c}\frac{\partial\delta_{cZ}(M_c,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_cM_c}}d\upsilon_M+\int_{V_k}\frac{\partial\delta_{kZ}(M_k,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_cM_k}}dv_M+$$

$$+\frac{1}{\mu_0}\int_{S_c}\tau(M,t)\frac{r_{Q_cM}^{ZQ_c}}{r_{Q_cM}^3}ds_M=-\int_{V_0}\frac{\partial\delta_{0Z}(M_0,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_cM_0}}d\upsilon_M,\ Q_c\in V_c. \qquad (37)$$

Преобразование СкИУ (18) в СкСИУ для распределения вихревых токов в НЛЗ круглого сечения, помещенной в кристаллизатор, в цилиндрической системе координат. Запишем СкИУ (18) в виде СкСИУ на канонических подобластях S_{ci}, $i=1,\dots,4$, поверхности слитка:

$$\tau_c(Q_{ci},t)+\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{4}\int_{S_j}\tau_c(M_{cj},t)\frac{\cos(\bar{n}_{Q_{ci}}\bar{r}_{Q_{ci}M_{cj}})}{r_{Q_{ci}M_{cj}}^2}ds_M+$$

$$+2\lambda\int_{V_c}\frac{\partial\delta_{cnQ_{ci}}(M_c,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_{ci}M_c}}d\upsilon_M+2\lambda\int_{V_k}\frac{\partial\delta_{knQ_{ci}}(M_k,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_{ci}M_k}}d\upsilon_M=$$

$$=-2\lambda\int_{V_0}\frac{\partial\delta_{0nQ_{ci}}(M_0,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_{ci}M_0}}d\upsilon_M,Q_{ci}\in S_{ci},\quad i=1,\dots,4. \qquad (38)$$

Ядра СкСИУ (38) будем вычислять по формулам, приведенным в таблицах в работе [4]. Упростим формулы для вычисления интегралов, входящих в уравнение (38):

$$\int_{V_c}\frac{\partial\delta_{cnQ_{ci}}(M_c,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_{ci}M_c}}d\upsilon_M,\ \ Q_{ci}\in S_{ci},\ \ i=1,\dots,4, \qquad (39)$$

$$\int_{V_k}\frac{\partial\delta_{knQ_{ci}}(M_c,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_{ci}M_k}}d\upsilon_M,\ Q_{ci}\in S_{ci},\ \ i=1,\dots,4, \qquad (40)$$

$$\int_{V_0}\frac{\partial\delta_{0nQ_{ci}}(M_0,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_{ci}M_0}}d\upsilon_M,\ Q_{ci}\in S_{ci},\ i=1,\dots,4. \qquad (41)$$

Для упрощения вычисления интеграла (39) запишем его в развернутом виде:

$$\int_{V_c}\frac{\partial\delta_{cnQ_{ci}}(M_c,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_{ci}M_c}}d\upsilon_M=\int_{V_c}\frac{\partial(\bar{n}_{Q_{ci}},\bar{\delta}_c(M_c,t))}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_{ci}M_c}}d\upsilon_M=$$

$$=\int_{V_c}\frac{\partial(\bar{n}_{Q_{ci}},\bar{e}_{\rho}(Q_{ci})\delta_{c\rho Q_{ci}}(M_c,t))}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_{ci}M_c}}d\upsilon_M+$$

$$+\int_{V_c}\frac{\partial(\bar{n}_{Q_{ci}},\bar{e}_{\psi}(Q_{ci})\delta_{c\psi Q_{ci}}(M_c,t))}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_{ci}M_c}}d\upsilon_M+$$

$$+\int_{V_c}\frac{\partial(\bar{n}_{Q_{ci}},\bar{e}_Z(Q_{ci})\bar{\delta}_{cZ_{Q_{ci}}}(M_c,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_{ci}M_c}}d\upsilon_M,\ Q_{ci}\in S_{ci},\ i=1,\dots,4. \qquad (42)$$

Пусть $i=1$. Тогда $\bar{n}_{Q_{c1}}=-\bar{e}_Z$. Подставив $\bar{n}_{Q_{c1}}$ в выражение (42), получим

$$\int_{V_c}\frac{\partial\delta_{cnQ_{c1}}(M_c,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_{c1}M_c}}d\upsilon_M=\int_{V_c}\frac{\partial(\bar{n}_{Q_{c1}},\bar{\delta}_c(M_c,t))}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_{c1}M_c}}d\upsilon_M=$$

$$=\int_{V_c}\frac{\partial(\bar{n}_{Q_{c1}},\bar{e}_{\rho}(Q_{c1})\delta_{c\rho_{Q_{c1}}}(M_c,t))}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_{c1}M_c}}d\upsilon_M+$$

$$+\int_{V_c}\frac{\partial(\bar{n}_{Q_{c1}},\bar{e}_{\psi}(Q_{c1})\delta_{c\psi Q_{c1}}(M_c,t))}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_{c1}M_c}}d\upsilon_M+$$

$$+\int_{V_c}\frac{\partial(\bar{n}_{Q_{c1}},\bar{e}_Z(Q_{c1})\delta_{cZ_{Q_{c1}}}(M_c,t))}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_{c1}M_c}}d\upsilon_M=-\int_{V_c}\frac{\partial\delta_{Q_{c1}}(M_c,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_{c1}M_c}}d\upsilon_M.$$

Пусть $i=2$. Тогда $\bar{n}_{Q_{c2}}=-\bar{e}_{\rho}(Q_{c2})$. Подставив $\bar{n}_{Q_{c2}}$ в (42), получим

$$\int_{V_c}\frac{\partial\delta_{cnQ_{c2}}(M_c,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_{c2}M_c}}d\upsilon_M=\int_{V_c}\frac{\partial(\bar{n}_{Q_{c2}},\bar{\delta}_c(M_c,t))}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_{c2}M_c}}d\upsilon_M=$$

$$=\int_{V_c}\frac{\partial(\bar{n}_{Q_{c2}},\bar{e}_{\rho}(Q_{c2})\delta_{c\rho_{Q_{c2}}}(M_c,t))}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_{c2}M_c}}d\upsilon_M+$$

$$+\int_{V_c}\frac{\partial(\bar{n}_{Q_{c2}},\bar{e}_{\psi}(Q_{c2})\delta_{c\psi Q_{c2}}(M_c,t))}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_{c2}M_c}}d\upsilon_M+$$

$$+\int_{V_c} \frac{\partial (\bar{n}_{Q_{c2}}, \bar{e}_Z(Q_{c2})\delta_{cZ_{Q_{c2}}}(M_c, t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{c2}M_c}} d\upsilon_M =$$

$$= -\int_{V_c} \frac{\partial \delta_{e\rho Q_{c2}}(M_c, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{c2}M_c}} d\upsilon_M =$$

$$= -\int_{V_c} \frac{\partial [\delta_{c\rho M_c}(M_c, t)\cos(\psi_{M_c} - \psi_{Q_{c2}}) - \delta_{c\psi M_c}(M_c, t)\sin(\psi_{M_c} - \psi_{Q_{c2}})]}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{c2}M_c}} dv_M .$$

Если $i = 3$, то $\bar{n}_{Q_{c3}} = \bar{e}_Z$. Подставив $\bar{n}_{Q_{c3}}$ в (42), получим

$$\int_{V_c} \frac{\partial \delta_{cnQ_{c3}}(M_c, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{c3}M_c}} d\upsilon_M = \int_{V_c} \frac{\partial (\bar{n}_{Q_{c3}}, \bar{\delta}_c(M_c, t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{c3}M_c}} d\upsilon_M =$$

$$= \int_{V_c} \frac{\partial (\bar{n}_{Q_{c3}}, \bar{e}_\rho(Q_{c3})\delta_{c\rho_{Q_{c3}}}(M_c, t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{c3}M_c}} d\upsilon_M +$$

$$+\int_{V_c} \frac{\partial (\bar{n}_{Q_{c3}}, \bar{e}_\psi(Q_{c3})\delta_{c\psi Q_{c3}}(M_c, t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{c3}M_c}} d\upsilon_M +$$

$$+\int_{V_c} \frac{\partial (\bar{n}_{Q_{c3}}, \bar{e}_Z(Q_{c3})\delta_{cZ_{Q_{c3}}}(M_c, t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{c3}M_c}} d\upsilon_M = -\int_{V_c} \frac{\partial \delta_{cZQ_{c3}}(M_c, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{c3}M_c}} d\upsilon_M .$$

Пусть $i = 4$, тогда $\bar{n}_{Q_{c4}} = \bar{e}_\rho(Q_{c4})$. Подставив $\bar{n}_{Q_{c4}}$ в (42), получим

$$\int_{V_c} \frac{\partial \delta_{cnQ_{c4}}(M_c, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{c4}M_c}} d\upsilon_M = \int_{V_c} \frac{\partial (\bar{n}_{Q_{c4}}, \bar{\delta}_c(M_c, t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{c4}M_c}} d\upsilon_M =$$

$$= \int_{V_c} \frac{\partial (\bar{n}_{Q_{c4}}, \bar{e}_\rho(Q_{c4})\delta_{c\rho_{Q_{c4}}}(M_c, t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{c4}M_c}} d\upsilon_M +$$

$$+\int_{V_c} \frac{\partial (\bar{n}_{Q_{c4}}, \bar{e}_\psi(Q_{c4})\delta_{c\psi Q_{c4}}(M_c, t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{c4}M_c}} d\upsilon_M +$$

$$+\int_{V_c} \frac{\partial (\bar{n}_{Q_{c4}}, \bar{e}_Z(Q_{c4})\delta_{cZ_{Q_{c4}}}(M_c, t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{c4}M_c}} d\upsilon_M =$$

$$= -\int_{V_c} \frac{\partial \delta_{e\rho Q_{c4}}(M_c, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{c4}M_c}} d\upsilon_M =$$

$$= -\int_{V_c} \frac{\partial [\delta_{c\rho M_c}(M_c, t)\cos(\psi_{M_c} - \psi_{Q_{c4}}) - \delta_{c\psi M_c}(M_c, t)\sin(\psi_{M_c} - \psi_{Q_{c4}})]}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{c4}M_c}} dv_M .$$

Упрощенные формулы для вычисления интеграла (41) выводятся аналогично. При $i = 1$ получаем

$$\int_{V_0} \frac{\partial \delta_{0nQ_{c1}}(M_0, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{c1}M_0}} d\upsilon_M = -\int_{V_0} \frac{\partial \delta_{0Z_{Q_{c1}}}(M_0, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{c1}M_0}} d\upsilon_M ;$$

при $i = 2$

$$\int_{V_0} \frac{\partial \delta_{0nQ_{c2}}(M_0, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{c2}M_0}} d\upsilon_M = -\int_{V_0} \frac{\partial \delta_{0\rho_{Q_{c2}}}(M_0, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{c2}M_0}} d\upsilon_M =$$

$$= -\int_{V_0} \frac{\partial [\delta_{0\rho M_0}(M_0, t)\cos(\psi_{M_0} - \psi_{Q_{c2}}) - \delta_{0\psi M_0}(M_0, t)\sin(\psi_{M_0} - \psi_{Q_{c2}})]}{\partial t} \times$$

$$\times \frac{1}{r_{Q_{c2}M_0}} dv_M ;$$

при $i = 3$

$$\int_{V_0} \frac{\partial \delta_{0nQ_{c3}}(M_0, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{c3}M_0}} d\upsilon_M = \int_{V_0} \frac{\partial \delta_{0Z_{Q_{c3}}}(M_0, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{c3}M_c}} d\upsilon_M ;$$

при $i = 4$

$$\int_{V_0} \frac{\partial \delta_{0nQ_{c4}}(M_0, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{c4}M_c}} d\upsilon_M = \int_{V_0} \frac{\partial \delta_{c\rho_{Q_{c4}}}(M_0, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{c4}M_c}} d\upsilon_M =$$

$$= \int_{V_c} \frac{\partial [\delta_{0\rho M_0}(M_0, t)\cos(\psi_{M_0} - \psi_{Q_{c4}}) - \delta_{0\psi M_c}(M_0, t)\sin(\psi_{M_0} - \psi_{Q_{c4}})]}{\partial t} \times$$

$$\times \frac{1}{r_{Q_{c4}M_0}} dv_M .$$

Для вычисления интеграла (40) аналогично получены следующие формулы: при $i = 1$

$$\int_{V_k} \frac{\partial \delta_{knQ_{c1}}(M_k, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{c1}M_k}} d\upsilon_M = -\int_{V_\mathrm{k}} \frac{\partial \delta_{Z_{Q_{c1}}}(M_k, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{c1}M_k}} d\upsilon_M ;$$

при $i = 2$

$$\int_{V_k} \frac{\partial \delta_{knQ_{c2}}(M_k, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{c2}M_k}} d\upsilon_M = -\int_{V_k} \frac{\partial \delta_{k\rho Q_{c2}}(M_k, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{c2}M_k}} d\upsilon_M =$$

$$= -\int_{V_k} \frac{\partial\, [\delta_{k\rho M_k}(M_k, t)\cos(\psi_{M_k} - \psi_{Q_{c2}}) - \delta_{k\psi M_k}(M_k, t)\sin(\psi_{M_k} - \psi_{Q_{c2}})]}{\partial t} \times$$

$$\times \frac{1}{r_{Q_{c2}M_k}} dv_M ;$$

при $i = 3$

$$\int_{V_k} \frac{\partial \delta_{knQ_{c3}}(M_k, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{c3}M_k}} d\upsilon_M = \int_{V_k} \frac{\partial \delta_{cZ_{Q_{c3}}}(M_k, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{c3}M_k}} d\upsilon_M ;$$

при $i = 4$

$$\int_{V_k} \frac{\partial \delta_{knQ_{c4}}(M_k, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{c4}M_k}} d\upsilon_M = \int_{V_k} \frac{\partial \delta_{k\rho Q_{c4}}(M_k, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{c4}M_k}} d\upsilon_M =$$

$$= \int_{V_\mathrm{k}} \frac{\partial\, [\delta_{k\rho M_k}(M_k, t)\cos(\psi_{M_k} - \psi_{Q_{c4}}) - \delta_{k\psi M_{kc}}(M_k, t)\sin(\psi_{M_k} - \psi_{Q_{c4}})]}{\partial t} \times$$

$$\times \frac{1}{r_{Q_{c4}M_k}} dv_M .$$

Преобразование СкИУ (20) в СкСИУ для распределения вихревых токов в кристаллизаторе кольцевого сечения, внутри которого находится НЛЗ круглого сечения, в цилиндрической системе координат. Векторы $\bar{\delta}_k(Q_k, t)$, $\bar{\delta}_k(M_k, t)$, $\bar{\delta}_0(M_0, t)$, $\bar{\delta}_c(M_k, t)$, входящие в уравнение (20), запишем в цилиндрической системе координат:

$$\bar{\delta}_k(Q_k, t) = \delta_{k\rho Q_k}(Q_k, t)\,\bar{e}_\rho(Q_k) + \delta_{k\psi Q_k}(Q_k, t)\,\bar{e}_\psi(Q_k) + \delta_{kZ}(Q_k, t)\,\bar{e}_Z(Q_k),$$

$$\bar{\delta}_k(M_k, t) = \delta_{k\rho M_k}(M_k, t)\,\bar{e}_\rho(M_k) + \delta_{k\psi M_k}(M_k, t)\,\bar{e}_\psi(M_k) + \delta_{kZ}(M_k, t)\,\bar{e}_z,$$

$$\bar{\delta}_0(M_0,t)=\delta_{0\rho M_0}(M_0,t)\,\bar{e}_\rho(M_0)+\delta_{0\psi M_0}(M_0,t)\,\bar{e}_\psi(M_0)+\delta_{0ZM_0}(M_0,t)\,\bar{e}_z,$$

$$\bar{\delta}_c(M_c,t)=\delta_{c\rho M_c}(M_c,t)\,\bar{e}_\rho(M_c)+\delta_{c\psi M_c}(M_c,t)\,\bar{e}_\psi(M_c)+\delta_{cZ}(M_k,t)\,\bar{e}_Z. \tag{43}$$

Для выражения векторов (43) через орты $\bar{e}_\rho(Q_k)$, $\bar{e}_\psi(Q_k)$, $\bar{e}_z$ будем использовать выражения ортов $\bar{e}_\rho(M_k)$, $\bar{e}_\psi(M_k)$ через орты $\bar{e}_\rho(Q_k)$, $\bar{e}_\psi(Q_k)$:

$$\bar{e}_\rho(M_k)=\bar{e}_\rho(Q_k)\cos(\psi_{M_k}-\psi_{Q_k})+\bar{e}_\psi(Q_k)\sin(\psi_{M_k}-\psi_{Q_k}), \tag{44}$$

$$\bar{e}_\psi(M_k)=-\bar{e}_\rho(Q_k)\sin(\psi_{M_k}-\psi_{Q_k})+\bar{e}_\psi(Q_k)\cos(\psi_{M_k}-\psi_{Q_k}). \tag{45}$$

Подставив выражения (44), (45) во второе выражение (43), запишем

$$\begin{aligned}\bar{\delta}_k(M_k,t)&=\delta_{k\rho M_k}(M_k,t)\,\bar{e}_\rho(M_k)+\delta_{k\psi M_k}(M_k,t)\,\bar{e}_\psi(M_k)+\delta_{kZ}(M_k,t)\,\bar{e}_z=\\&=\delta_{k\rho M_k}(M_k,t)\,[\bar{e}_\rho(Q_k)\cos(\psi_{M_k}-\psi_{Q_k})+\bar{e}_\psi(Q_k)\sin(\psi_{M_k}-\psi_{Q_k})]+\\&+\delta_{k\psi M_k}(M_k,t)\,[-\bar{e}_\rho(Q_k)\sin(\psi_{M_k}-\psi_{Q_k})+\bar{e}_\psi(Q_k)\cos(\psi_{M_k}-\psi_{Q_k})]+\\&+\delta_{kZ}(M_k,t)\,\bar{e}_z=\delta_{k\rho Q_k}(M_k,t)\,\bar{e}_\rho(Q_k)+\delta_{k\psi Q_k}(M_k,t)\,\bar{e}_\psi(Q_k)+\delta_{kZ}(M_k,t)\,\bar{e}_Z,\end{aligned} \tag{46}$$

где

$$\begin{aligned}\delta_{k\rho Q_k}(M_k,t)&=\delta_{k\rho M_k}(M_k,t)\cos(\psi_{M_k}-\psi_{Q_k})-\delta_{k\psi M_k}(M_k,t)\sin(\psi_{M_k}-\psi_{Q_k}),\\\delta_{k\psi Q_k}(M_k,t)&=\delta_{k\rho M_k}(M_k,t)\sin(\psi_{M_k}-\psi_{Q_k})+\delta_{k\psi M_k}(M_k,t)\cos(\psi_{M_k}-\psi_{Q_k}).\end{aligned} \tag{47}$$

Аналогично преобразуем выражение для $\bar{\delta}_0(M_0,t)$:

$$\bar{\delta}_0(M_0,t)=\delta_{0\rho M_0}(M_0,t)\,\bar{e}_\rho(M_0)+\delta_{0\psi M_0}(M_0,t)\,\bar{e}_\psi(M_0)+\delta_{0ZM_0}(M_0,t)\,\bar{e}_z. \tag{48}$$

Подставим в (48) орты $\bar{e}_\rho(M_0)$, $\bar{e}_\psi(M_0)$, выраженные через орты $\bar{e}_\rho(Q_k)$, $\bar{e}_\psi(Q_k)$, используя выражения (44), (45):

$$\begin{aligned}\bar{\delta}_0(M_0,t)&=\delta_{0\rho M_0}(M_0,t)\,\bar{e}_\rho(M_0)+\delta_{0\psi M_0}(M_0,t)\,\bar{e}_\psi(M_0)+\delta_{0ZM_0}(M_0,t)\,\bar{e}_z=\\&=\delta_{0\rho M_0}(M_0,t)\,[\bar{e}_\rho(Q_k)\cos(\psi_{M_0}-\psi_{Q_k})+\bar{e}_\psi(Q_k)\sin(\psi_{M_0}-\psi_{Q_k})]+\\&+\delta_{0\psi M_0}(M_0,t)\,[-\bar{e}_\rho(Q_k)\sin(\psi_{M_0}-\psi_{Q_k})+\bar{e}_\psi(Q_k)\cos(\psi_{M_0}-\psi_{Q_k})]+\\&+\delta_{0ZM_0}(M_0,t)\,\bar{e}_Z=\delta_{0\rho Q_k}(M_0,t)\,\bar{e}_\rho(Q_k)+\\&+\delta_{0\psi Q_k}(M_0,t)\,\bar{e}_\psi(Q_k)+\delta_{0ZQ_k}(M_0,t)\,\bar{e}_Z,\end{aligned} \tag{49}$$

где

$$\delta_{0\rho Q_k}(M_0,t)=\delta_{0\rho M_0}(M_0,t)\cos(\psi_{M_0}-\psi_{Q_k})-\delta_{0\psi M_0}(M_0,t)\sin(\psi_{M_0}-\psi_{Q_k}),$$

$$\delta_{0\psi Q_k}(M_0,t)=\delta_{0\rho M_0}(M_0,t)\sin(\psi_{M_0}-\psi_{Q_k})+\delta_{0\psi M_0}(M_0,t)\cos(\psi_{M_0}-\psi_{Q_k}). \tag{50}$$

Аналогично преобразуем выражение для вектора $\bar{\delta}_c(M_c,t)$:

$$\begin{aligned}\bar{\delta}_c(M_c,t)&=\delta_{c\rho M_c}(M_c,t)\,\bar{e}_\rho(M_c)+\delta_{c\psi M_c}(M_c,t)\,\bar{e}_\psi(M_c)+\delta_{cZ}(M_c,t)\,\bar{e}_Z=\\&=\delta_{c\rho M_c}(M_c,t)[\bar{e}_\rho(Q_k)\cos(\psi_{M_c}-\psi_{Q_k})+\bar{e}_\psi(Q_k)\sin(\psi_{M_c}-\psi_{Q_k})]+\\&+\delta_{c\psi M_c}(M_c,t)[-\bar{e}_\rho(Q_k)\sin(\psi_{M_c}-\psi_{Q_k})+\bar{e}_\psi(Q_k)\cos(\psi_{M_c}-\psi_{Q_k})]+\\&+\delta_{cZ}(M_c,t)\,\bar{e}_Z=\delta_{c\rho Q_k}(M_c,t)\,\bar{e}_\rho(Q_k)+\delta_{c\psi Q_k}(M_c,t)\,\bar{e}_\psi(Q_k)+\delta_{cZ}(M_c,t)\,\bar{e}_Z,\end{aligned} \tag{51}$$

где

$$\begin{aligned}\delta_{c\rho Q_k}(M_c,t)&=\delta_{c\rho M_c}(M_c,t)\cos(\psi_{M_c}-\psi_{Q_k})-\delta_{c\psi M_c}(M_c,t)\sin(\psi_{M_c}-\psi_{Q_k}),\\\delta_{c\psi Q_k}(M_c,t)&=\delta_{c\rho M_c}(M_c,t)\sin(\psi_{M_c}-\psi_{Q_k})+\delta_{c\psi M_c}(M_c,t)\cos(\psi_{M_c}-\psi_{Q_k}).\end{aligned} \tag{52}$$

Подставив в ВИУ (20) выражения (46), (49), (51), получим

$$\begin{aligned}&\frac{\delta_{k\rho Q_k}(Q_k,t)\,\bar{e}_\rho(Q_k)+\delta_{k\psi Q_k}(Q_k,t)\,\bar{e}_\psi(Q_k)+\delta_{kZQ_k}(Q_k,t)\,\bar{e}_Z(Q_k)}{\lambda\gamma_k(Q_k)}+\\&+\int_{V_k}\frac{\partial[\delta_{k\rho Q_k}(M_k,t)\bar{e}_\rho(Q_k)+\delta_{k\psi Q_k}(M_k,t)\bar{e}_\psi(Q_k)+\delta_{kZQ_k}(M_k,t)\bar{e}_Z(Q_k)]}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_kM_k}}dv_M+\\&+\int_{V_c}\frac{\partial[\delta_{c\rho Q_k}(M_c,t)\bar{e}_\rho(Q_k)+\delta_{c\psi Q_k}(M_c,t)\bar{e}_\psi(Q_k)+\delta_{cZQ_k}(M_c,t)\bar{e}_Z(Q_k)]}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_kM_c}}dv_M+\\&+\frac{1}{\mu_0}\int_{S_k}\tau_k(M,t)\frac{\bar{e}_\rho(Q_k)r^{\rho Q_k}_{Q_kM}+\bar{e}_\psi(Q_k)r^{\psi Q_k}_{Q_kM}+\bar{e}_Z r^{ZQ_k}_{Q_kM}}{r^3_{Q_kM}}ds_M=\\&=-\int_{V_0}\frac{\partial[\delta_{0\rho Q_k}(M_0,t)\bar{e}_\rho(Q_k)+\delta_{0\psi Q_k}(M_0,t)\bar{e}_\psi(Q_k)+\delta_{0ZQ_k}(M_0,t)\bar{e}_Z(Q_k)]}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_kM_0}}d\upsilon_M.\end{aligned} \tag{53}$$

Приравнивая выражения при одноименных ортах справа и слева в (53), получаем три СкИУ. После приравнивания выражений при ортах $\bar{e}_\rho(Q_k)$, первое из них имеет вид

$$\frac{\delta_{k\rho Q_k}(Q_k,t)}{\lambda\gamma_k(Q_k)}+\int_{V_k}\frac{\partial\delta_{k\rho Q_k}(M_k,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_kM_k}}d\upsilon_M+\int_{V_c}\frac{\partial\delta_{c\rho Q_k}(M_c,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_kM_c}}dv_M+$$

$$+\frac{1}{\mu_0}\int_{S_k}\tau_k(M,t)\frac{r^{\rho Q_k}_{Q_k M}}{r^3_{Q_k M}}ds_M=-\int_{V_0}\frac{\partial\delta_{0\rho Q_k}(M_0,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_k M_0}}d\upsilon_M. \tag{54}$$

Подставив в (54) вместо $\delta_{k\rho Q_k}(Q_k,t)$, $\delta_{c\rho Q_k}(M_c,t)$, $\delta_{0\rho Q_k}(M_0,t)$ их выражения (47), (50), (52), получим

$$\frac{\delta_{k\rho Q_k}(Q_k,t)}{\lambda\gamma_k(Q_k)}+\int_{V_k}\frac{\partial[\delta_{k\rho M_k}(M_k,t)\cos(\psi_{M_k}-\psi_{Q_k})]}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_k M_k}}d\upsilon_M-$$

$$-\int_{V_k}\frac{\partial[\delta_{k\psi M_k}(M_k,t)\sin(\psi_{M_k}-\psi_{Q_k})]}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_k Mk_c}}d\upsilon_M+$$

$$+\int_{V_c}\frac{\partial[\delta_{c\rho M_c}(M_c,t)\cos(\psi_{M_c}-\psi_{Q_k})]}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_k M_c}}d\upsilon_M-$$

$$-\int_{V_c}\frac{\partial[\delta_{c\psi M_c}(M_c,t)\sin(\psi_{M_c}-\psi_{Q_k})]}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_k M_c}}d\upsilon_M+\frac{1}{\mu_0}\int_{S_k}\tau_k(M,t)\frac{r^{\rho Q_k}_{Q_k M}}{r^3_{Q_k M}}ds_M=$$

$$=-\int_{V_0}\frac{\partial[\delta_{0\rho M_0}(M_0,t)\cos(\psi_{M_0}-\psi_{Q_k})-\delta_{0\psi M_0}(M_0,t)\cos(\psi_{M_0}-\psi_{Q_k})}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_k M}}dv_M,$$

$$Q_k\in V_k. \tag{55}$$

Приравнивая выражения справа и слева от $\bar{e}_\psi(Q_k)$ в (53), получаем второе уравнение СкИУ:

$$\frac{\delta_{k\psi Q_k}(Q_k,t)}{\lambda\gamma_k(Q_k)}+\int_{V_k}\frac{\partial\delta_{k\psi Q_k}(M_k,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_k M_k}}d\upsilon_M+\int_{V_c}\frac{\partial\delta_{c\psi Q_k}(M_c,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_k M_c}}dv_M+$$

$$+\frac{1}{\mu_0}\int_{S_k}\tau_k(M,t)\frac{r^{\psi Q_k}_{Q_k M}}{r^3_{Q_k M}}ds_M=-\int_{V_0}\frac{\partial\delta_{0\psi Q_k}(M_0,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_k M_0}}d\upsilon_M,\ Q_k\in V_k. \tag{56}$$

Подставим в (56) вместо $\delta_{k\psi Q_k}(M_k,t)$, $\delta_{c\psi Q_k}(M_c,t)$, $\delta_{0\psi Q_k}(M_0,t)$ их выражения (47), (50), (52). В результате получим

$$\frac{\delta_{k\psi Q_k}(Q_k,t)}{\lambda\gamma_k(Q_k)}+$$

$$+\int_{V_k}\frac{\partial[\delta_{k\rho M_k}(M_k,t)\sin(\psi_{M_k}-\psi_{Q_k})+\delta_{k\psi M_k}(M_k,t)\cos(\psi_{M_k}-\psi_{Q_k})]}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_k M_k}}d\upsilon_M+$$

$$+\int_{V_c} \frac{\partial[\delta_{c\rho M_c}(M_c, t)\sin(\psi_{M_c}-\psi_{Q_k})+\delta_{c\psi M_c}(M_c, t)\cos(\psi_{M_c}-\psi_{Q_k})]}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_k M_c}}\,d\upsilon_M +$$

$$+\frac{1}{\mu_0}\int_{S_k}\tau_k(M,t)\frac{r^{\psi Q_k}_{Q_k M}}{r^3_{Q_k M}}\,ds_M =$$

$$=-\int_{V_0}\frac{\partial[\delta_{0\rho M_0}(M_0,t)\sin(\psi_{M_0}-\psi_{Q_k})+\delta_{0\psi M_0}(M_0,t)\cos(\psi_{M_0}-\psi_{Q_k})}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_k M_0}}\,dv_M,$$

$$Q_k \in V_k. \qquad (57)$$

Приравняв выражения справа и слева от $\bar{e}_Z$ в (53), получим третье уравнение СкИУ:

$$\frac{\delta_{kZQ_k}(Q_k,t)}{\lambda\gamma_k(Q_k)}+\int_{V_k}\frac{\partial\delta_{kZQ_k}(M_k,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_k M_k}}\,d\upsilon_M+\int_{V_c}\frac{\partial\delta_{cZQ_k}(M_c,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_k M_c}}\,d\upsilon_M +$$

$$+\frac{1}{\mu_0}\int_{S_k}\tau_k(M,t)\frac{r^{ZQ_k}_{Q_k M}}{r^3_{Q_k M}}\,ds_M=-\int_{V_0}\frac{\partial\delta_{0ZQ_k}(M_0,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_k M_0}}\,d\upsilon_M,\ Q_k\in V_k. \qquad (58)$$

Преобразование СкИУ (21) в СкСИУ для распределения вихревых токов в кристаллизаторе кольцевого сечения, в который помещена НЛЗ круглого сечения, в цилиндрической системе координат. Запишем СкИУ (21) в виде СкСИУ на канонических подобластях S_{ki}, $i=1,\dots,4$, поверхности слитка:

$$\tau_k(Q_{ki},t)+\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{4}\int_{S_{kj}}\tau_k(M_{kj},t)\frac{\cos(\bar{n}_{Q_{ki}}\bar{r}_{Q_{ki}M_{kj}})}{r^2_{Q_{ki}M_{kj}}}\,ds_M +$$

$$+2\lambda\int_{V_k}\frac{\partial\delta_{knQ_{ki}}(M_k,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_{ki}M_k}}\,d\upsilon_M+2\lambda\int_{V_c}\frac{\partial\delta_{cnQ_{ki}}(M_k,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_{ki}M_c}}\,d\upsilon_M =$$

$$=-2\lambda\int_{V_0}\frac{\partial\delta_{0nQ_{ki}}(M_0,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_{ki}M_0}}\,d\upsilon_M,\quad Q_{ki}\in S_{ki},\quad i=1,\dots,4. \qquad (59)$$

Ядра СкСИУ (59) вычислим по формулам, приведенным в таблицах в работе [4]. Упрощенные формулы для вычисления интегралов, входящих в уравнение (59),

$$\int_{V_k} \frac{\partial \delta_{knQ_{ki}}(M_k, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{ki}M_k}} d\upsilon_M, \ \ Q_{ki} \in S_{ki}, \ \ i = 1, \ldots, 4, \tag{60}$$

$$\int_{V_c} \frac{\partial \delta_{cnQ_{ki}}(M_c, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{ki}M_c}} d\upsilon_M, \ \ Q_{ki} \in S_{ki}, \ \ i = 1, \ldots, 4, \tag{61}$$

$$\int_{V_0} \frac{\partial \delta_{0nQ_{ki}}(M_0, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{ki}M_0}} d\upsilon_M, \ \ Q_{ki} \in S_{ki}, \ \ i = 1, \ldots, 4, \tag{62}$$

выводятся аналогично формулам для вычисления интегралов (39)—(41). Запишем формулы для вычисления интеграла (60): при $i = 1$

$$\int_{V_k} \frac{\partial \delta_{knQ_{k1}}(M_k, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{k1}M_k}} d\upsilon_M = -\int_{V_k} \frac{\partial \delta_{kZ_{Q_{k1}}}(M_k, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{k1}M_k}} d\upsilon_M;$$

при $i = 2$

$$\int_{V_k} \frac{\partial \delta_{knQ_{k2}}(M_k, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{k2}M_k}} d\upsilon_M = -\int_{V_k} \frac{\partial \delta_{k\rho Q_{k2}}(M_k, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{k2}M_k}} d\upsilon_M =$$

$$= -\int_{V_k} \frac{\partial [\delta_{k\rho M_k}(M_k, t)\cos(\psi_{M_k} - \psi_{Q_{k2}}) - \delta_{k\psi M_k}(M_k, t)\sin(\psi_{M_k} - \psi_{Q_{k2}})]}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{k2}M_k}} dv_M;$$

при $i = 3$

$$\int_{V_k} \frac{\partial \delta_{knQ_{k3}}(M_k, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{k3}M_k}} d\upsilon_M = \int_{V_k} \frac{\partial \delta_{kZ_{Q_{k3}}}(M_k, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{k3}M_k}} d\upsilon_M;$$

при $i = 4$

$$\int_{V_k} \frac{\partial \delta_{knQ_{k4}}(M_k, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{k4}M_k}} d\upsilon_M = \int_{V_k} \frac{\partial \delta_{k\rho Q_{k4}}(M_k, t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{k4}M_k}} d\upsilon_M =$$

$$= \int_{V_k} \frac{\partial [\delta_{k\rho M_k}(M_k, t)\cos(\psi_{M_k} - \psi_{Q_{k4}}) - \delta_{k\psi M_k}(M_k, t)\sin(\psi_{M_k} - \psi_{Q_{k4}})]}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{k4}M_k}} dv_M.$$

Формулы для вычисления интеграла (61): при $i = 1$

$$\int_{V_c} \frac{\partial \delta_{cnQ_{k1}}(M_c,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{k1}M_c}} d\upsilon_M = -\int_{V_c} \frac{\partial \delta_{cZ_{Q_{k1}}}(M_c,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{k1}M_c}} d\upsilon_M;$$

при $i = 2$

$$\int_{V_c} \frac{\partial \delta_{cnQ_{k2}}(M_c,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{k2}M_c}} d\upsilon_M = -\int_{V_c} \frac{\partial \delta_{c\rho Q_{k2}}(M_c,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{k2}M_c}} d\upsilon_M =$$

$$= -\int_{V_c} \frac{\partial [\delta_{c\rho M_c}(M_c,t)\cos(\psi_{M_c} - \psi_{Q_{k2}}) - \delta_{c\psi M_c}(M_c,t)\sin(\psi_{M_c} - \psi_{Q_{k2}})]}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{k2}M_c}} dv_M;$$

при $i = 3$

$$\int_{V_c} \frac{\partial \delta_{cnQ_{k3}}(M_c,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{k3}M_c}} d\upsilon_M = \int_{V_c} \frac{\partial \delta_{cZ_{Q_{k3}}}(M_c,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{k3}M_c}} d\upsilon_M;$$

при $i = 4$

$$\int_{V_c} \frac{\partial \delta_{cnQ_{k4}}(M_c,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{k4}Mc}} d\upsilon_M = \int_{V_c} \frac{\partial \delta_{c\rho Q_{k4}}(M_c,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{k4}M_c}} d\upsilon_M =$$

$$= \int_{V_c} \frac{\partial [\delta_{c\rho M_c}(M_c,t)\cos(\psi_{M_c} - \psi_{Q_{k4}}) - \delta_{c\psi M_c}(M_c,t)\sin(\psi_{M_c} - \psi_{Q_{k4}})]}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{k4}M_c}} dv_M.$$

Формулы для вычисления интеграла (62): при $i = 1$

$$\int_{V_0} \frac{\partial \delta_{0nQ_{k1}}(M_0,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{k1}M_0}} d\upsilon_M = -\int_{V_0} \frac{\partial \delta_{0Z_{Q_{k1}}}(M_0,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{k1}M_0}} d\upsilon_M;$$

при $i = 2$

$$\int_{V_0} \frac{\partial \delta_{0nQ_{k2}}(M_0,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{k2}M_0}} d\upsilon_M = -\int_{V_0} \frac{\partial \delta_{0\rho Q_{k2}}(M_0,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{k2}M_0}} d\upsilon_M =$$

$$= -\int_{V_0} \frac{\partial [\delta_{0\rho M_0}(M_0,t)\cos(\psi_{M_0} - \psi_{Q_{k2}}) - \delta_{0\psi M_0}(M_0,t)\sin(\psi_{M_0} - \psi_{Q_{k2}})]}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{k2}M_0}} dv_M;$$

при $i = 3$

$$\int_{V_0} \frac{\partial \delta_{0nQ_{k3}}(M_0,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{k3}M_0}} d\upsilon_M = \int_{V_0} \frac{\partial \delta_{0Z_{Q_{k3}}}(M_0,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{k3}M_0}} d\upsilon_M;$$

при $i = 4$

$$\int\limits_{V_0} \frac{\partial \delta_{0nQ_{k4}}(M_0,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{k4}M_0}} d\upsilon_M = \int\limits_{V_0} \frac{\partial \delta_{k\rho Q_{k4}}(M_0,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{k4}M_0}} d\upsilon_M =$$

$$= \int\limits_{V_c} \frac{\partial[\delta_{0\rho M_0}(M_0,t)\cos(\psi_{M_0} - \psi_{Q_{k4}}) - \delta_{0\psi M_k}(M_0,t)\sin(\psi_{M_0} - \psi_{Q_{k4}})]}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_{k4}M_0}} dv_M .00$$

Выводы

Получена СкСИУ (34), (36)—(38), (55), (57)—(59), описывающая в цилиндрической системе координат трехмерное распределение вихревых токов в системе НЛЗ круглого сечения—кристаллизатор кольцевого сечения при электромагнитном перемешивании в вертикальной МНЛЗ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Евдокимов В.Ф., Петрушенко Е.И.* Интегральная модель трехмерного распределения вихревых токов в непрерывно литой заготовке круглого сечения при электромагнитном перемешивании в вертикальной МНЛЗ. I //Электрон. моделирование. — 2014. — **36**, № 5. — С. 67—79.
2. *Евдокимов В.Ф., Петрушенко Е.И.* Интегральная модель трехмерного распределения вихревых токов в непрерывно литой заготовке квадратного сечения при электромагнитном перемешивании в вертикальной МНЛЗ. I //Там же. — 2013. — **35**, № 6. — С. 49—62.
3. *Евдокимов В.Ф., Петрушенко Е.И.* Интегральная модель трехмерного распределения вихревых токов в непрерывно литой заготовке квадратного сечения при электромагнитном перемешивании в вертикальной МНЛЗ.II //Там же. — 2014. — **36**, № 1. — С. 81—95.
4. *Евдокимов В.Ф., Кучаев А.А, Петрушенко Е.И., Кучаев В.А.* Модель трехмерного магнитного поля статора цилиндрического электромагнитного перемешивателя с учетом распределения токов намагниченности по поверхности магнитопровода. I // Там же. — 2012. — **34**, № 1. — С. 81—92.

V.F. Yevdokimov, E.I. Petrushenko

INTEGRAL MODEL OF THREE-DIMENSIONAL
DISTRIBUTION OF EDDY FLOWS IN CONTINUOUS CASTING
OF ROUND CROSS-SECTION UNDER ELECTROMAGNETIC
STIRRING IN VERTICAL MCC. II

The scalar set of integral equations has been obtained which describes in cylindrical system of coordinates the three-dimensional distribution of eddy flows in the system continuous casting (CC) of round cross-section — mould under electromagnetic stirring in vertical CC. It is based on the vector set of integral equations. An auxiliary problem is considered in Part I of the paper: scalar integral equations describing three-dimensional distribution of eddy flows in continuous casting of round cross-section. The effect of eddy flows is not taken in the account.

K e y w o r d s: integral model, three-dimensional distribution, eddy flows, continuous casting, round cross-section, electromagnetic stirring.

REFERENCES

1. *Yevdokimov V.F.,Petrushenko E.I.* Integral model of three-dimensional distribution of eddy flows in continuous casting of round cross-section under electromagnetic stirring in vertical MCC. I. // Electronic Modeling. — 2014. — Vol. 36, No 5. — P. 67—79 (in Russian).
2. *Yevdokimov V.F., Petrushenko E.I.* Integral model of three-dimensional distribution of eddy flows in continuous casting of square cross-section under electromagnetic stirring in vertical MCC. I // Ibid. — 2013. — Vol. 35, No 6. — P. 49—62 (in Russian).
3. *Yevdokimov V.F., Petrushenko E.I.* Integral model of three-dimensional distribution of eddy flows in continuous casting of square cross-section under electromagnetic stirring in vertical MCC. II // Ibid. — 2014. — Vol. 36, No 1. — P. 81—95 (in Russian).
4. *Yevdokimov V.F., Kuchaev A.A., Petrushenko E.I., Kuchaev V.A*. Model of three-dimensional magnetic field of the stator of cylindrical electromagnetic stirrer with allowance for magnetization currents distribution on the magnetic circuit surface. I // Ibid. — 2012. — Vol. 34, No 1. — P. 81—92 (in Russian).

Поступила 20.10.14

ЕВДОКИМОВ Виктор Федорович, чл.-кор. НАН Украины, директор Ин-та проблем моделирования в энергетике НАН Украины им. Г.Е. Пухова. В 1963 г. окончил Харьковский политехнический ин-т. Область научных исследований — теория моделирования процессов и систем в энергетике, теория функционально-ориентированных компьютерных систем, анализ и синтез параллельных вычислительных методов и систем.

ПЕТРУШЕНКО Евгений Иванович, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., зав. отделом моделирования задач электромагнитной гидродинамики Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 1960 г. окончил Новочеркасский политехнический ин-т, а в 1963 г. Ростовский государственный университет. Область научных исследований — моделирование электромагнитных полей.

КУЧАЕВ Виталий Александрович, аспирант отдела моделирования задач электромагнитной гидродинамики Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 2002 г. окончил Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический ин-т». Область научных исследований — моделирование электромагнитных полей.