УДК:004.492

Я.А. Калиновский, д-р техн. наук, **А.С. Туренко,** аспирант
Ин-т проблем регистрации информации НАН Украины
(Украина, 03113, Киев, ул. Н.Шпака, 2,
e-mail: kalinovsky@i.ua; asturenko@mail.ru),
Ю.Е. Бояринова, канд. техн. наук, **Я.В. Хицко**
Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический ин-т»
(Украина, 03056, Киев, пр-т Победы, 37,
e-mail: ub@ua.fm; yannuary@yandex.ua)

Свойства обобщенных кватернионов и их связь с процедурой удвоения Грассмана—Клиффорда

Исследован класс некоммутативных гиперкомплексных числовых систем четвертой размерности, построенных с помощью некоммутативной процедуры удвоения Грассмана—Клиффорда систем второй размерности, и установлена их связь с обобщенными кватернионами. Исследованы выполняемые в них операции, а также методы вычисления алгебраических характеристик: сопряжения, нормирования, вид делителей нуля.

Досліджено клас некомутативних гіперкомплексних числових систем четвертої вимірності, побудованих за допомогою некомутативної процедури подвоєння Грасмана—Кліфорда систем другої вимірності, та встановлено їхній зв'язок з узагальненими кватерніонами. Досліджено виконання операцій у них, а також методи обчислення алгебраїчних характеристик: спряження, нормування, вигляд дільників нуля.

Ключевые слова: кватернион, обобщенный кватернион, гиперкомплексная числовая система, делитель нуля, псевдонорма, сопряжение, процедура удвоения Грассмана—Клиффорда.

Гиперкомплексные числовые системы (ГЧС), являющиеся расширением системы комплексных чисел [1], широко применяются в механике твердого тела — для описания вращения в пространстве, при решении задач навигации, ориентации и управления движением; в компьютерной анимации, при исследовании деформации упругих конструкций, фильтрации цветных изображений; в криптографии и других направлениях. Находят применение и другие системы исследуемого класса. Система антикватернионов $Д\,(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{W}, 4)$ и система $Д\,(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{W}, 4)$ применяются в специальной теории относительности [2], где с их помощью компактно описываются вращения в пространстве Минковского. Системы этого класса целесообразно использовать в криптографии, в частности в алгоритмах генерации цифровой подписи и задачи разделения секрета [3]. Данные алгоритмы основаны на построении системы остаточных классов с использованием модулярной арифметики [3] для систем комплексных, двойных, дуальных чисел и обобщены для ГЧС более высоких размерностей, в том числе и для системы $Д(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, 4)$, применение которой приводит к повышению устойчивости этих алгоритмов.

Система коммутативных квадриплексных чисел эффективно применяется в цифровой фильтрации сигналов, что приводит к снижению чувствительности к искажениям амплитудно-частотной характеристики фильтра [4]. Изучается возможность применения также систем $Д(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{D}, 4)$ и $Д(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{D}, 4)$, разряженные таблицы Кели которых позволяют сократить объем вычислений.

Задача установления связи между обобщенными кватернионами и системами четвертой размерности, построенными с помощью некоммутативной процедуры удвоения Грассмана—Клиффорда (ГК-процедуры), представляется весьма актуальной.

Обобщенные кватернионы. Впервые обобщенные кватернионы были применены при изображении пространственно-временных групп в 1949 г. В работе [5] представлено решение уравнений Эйнштейна гравитационного поля с помощью этих кватернионов. Обобщенные кватернионы исследованы многими авторами [6—11]. Проанализируем некоторые полученные ими результаты.

Обобщенный кватернион имеет вид

$$q = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4, \tag{1}$$

где a_i — действительные числа; e_i, $i = 2, ..., 4$, — мнимые единицы, определяемые из следующей таблицы Кели:

$$\begin{array}{|c|cccc|}
\hline
H_{\alpha\beta} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\
\hline
e_1 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\
e_2 & e_2 & -\alpha e_1 & e_4 & -\alpha e_3 \\
e_3 & e_3 & -e_4 & -\beta e_1 & \beta e_2 \\
e_4 & e_4 & \alpha e_3 & -\beta e_2 & -\alpha\beta e_1 \\
\hline
\end{array}, \tag{2}$$

где $\alpha, \beta \in R$. Поскольку e_1 — действительная единица, обобщенный кватернион состоит из двух частей: действительной и мнимой, соответственно $S(q) = a_1 e_1$ и $V(q) = a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4$. Следовательно, (1) можно записать в виде

$$q = S(q) + V(q). \tag{3}$$

Система кватернионов принадлежит классу обобщенных кватернионов при $\alpha=1$, $\beta=1$. Подставив эти значения α и β в (2), получим таблицу Кели системы кватернионов

$$\begin{array}{c|cccc} H & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline e_1 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_2 & e_2 & -e_1 & e_4 & -e_3 \\ e_3 & e_3 & -e_4 & -e_1 & e_2 \\ e_4 & e_4 & e_3 & -e_2 & -e_1 \end{array}. \qquad (4)$$

Свойства обобщенных кватернионов подробно описаны в работах [9, 10]. Операция умножения вводится так же, как и для любых других гиперкомплексных чисел, т.е. выполняется следующее правило:

$$(a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3+a_4e_4)(b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3+b_4e_4)=$$
$$=(a_1b_1-\alpha a_2b_2-\beta a_3b_3-\alpha\beta a_4b_4)\,e_1+(a_2b_1+a_1b_2-\beta a_4b_3+\beta a_3b_4)\,e_2+$$
$$+(a_3b_1+\alpha\, a_4b_2+a_1b_3-\alpha a_2b_4)\,e_3+(a_4b_1-a_3b_2+a_2b_3+a_1b_4)\,e_4. \qquad (5)$$

С помощью (3) правило (5) можно записать в виде

$$qp=S(q)\,S(p)-\langle V(q),V(p)\rangle+S(q)\,V(p)+S(p)V(q)+V(p)\times V(q),$$

где

$$S(q)=a_1e_1,\ S(p)=b_1e_1,\ \langle V(q),V(p)\rangle=\alpha a_2b_2+\beta a_3b_3+\alpha\beta a_4b_4;$$
$$V(p)\times V(q)=\beta(a_3b_4-a_4b_3)\,e_2+\alpha\,(a_4b_2-a_2b_4)\,e_3+(a_2b_3-a_3b_2)\,e_4.$$

Сопряжения для данных ГЧС вводятся так же, как и для кватернионов, т.е. если исходное число $q=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3+a_4e_4$, то сопряженное к нему имеет вид

$$\bar{q}=a_1e_1-a_2e_2-a_3e_3-a_4e_4. \qquad (6)$$

На основе сопряжения вводится норма, определяемая из равенства

$$N(q)=q\bar{q}=\bar{q}q=a_1^2+\alpha a_2^2+\beta a_3^2+\alpha\beta a_4^2. \qquad (7)$$

В работе [9] рассмотрены конкретные ГЧС для следующих случаев обобщенных кватернионов:

1. $\alpha=\beta=1$ — $H_{\alpha\beta}$ — система кватернионов;
2. $\alpha=1$, $\beta=-1$ — $H_{\alpha\beta}$ — система антикватернионов;
3. $\alpha=1$, $\beta=0$ — $H_{\alpha\beta}$ — система псевдо-кватернионов;
4. $\alpha=-1$, $\beta=0$ — $H_{\alpha\beta}$ — система псевдо-антикватернионов;
5. $\alpha=0$, $\beta=0$ — $H_{\alpha\beta}$ — система 1/4-кватернионов.

ГЧС четвертой размерности, построенные с помощью ГК-процедуры. Как показали результаты исследований [12], существует связь между системами, полученными с помощью некоммутативной КГ-процедуры, и обобщенными кватернионами. Для установления этой связи рассмотрим построение систем, полученных с помощью некоммутативной ГК-процедуры, и их свойства.

Исследуемый в работе [12] класс некоммутативных ГЧС четвертой размерности состоит из некоммутативных удвоений ГЧС второй размерности с помощью ГК-процедуры. Базис таких ГЧС состоит из четырех элементов: $g=\{g_1, g_2, g_3, g_4\}=\{e_1 f_1, e_1 f_2, e_2 f_1, e_2 f_2\}$. Исследуемый класс ГЧС определяется следующими условиями:

1. Элементы базисов e_1 и f_1 — единичные элементы своих систем.

2. Элементы таблицы Кели ГЧС g являются произведениями вида $g_i g_k = e_j f_s e_t f_r$, значение которых можно вычислить с помощью коммутации множителей и использования таблиц Кели удваиваемых ГЧС. При этом будем считать, что e_1 и f_1 коммутируют с e_2 и f_2, т.е. $e_1 f_2 = f_2 e_1$, $e_2 f_1 = f_1 e_2$, а последние антикоммутируют между собой, т.е. $e_2 f_2 = -f_2 e_2$. Например,

$$g_1 g_1 = e_1 f_1 e_1 f_1 = e_1 e_1 f_1 f_1 = e_1 f_1 = g_1,$$

$$g_2 g_1 = e_1 f_2 e_1 f_1 = e_1 e_1 f_2 f_1 = e_1 f_2 = g_2,$$

$$g_2 g_3 = e_1 f_2 e_2 f_1 = -e_1 e_2 f_2 f_1 = -e_2 f_2 = -g_4,$$

$$g_2 g_2 = e_1 f_2 e_1 f_2 = e_1 e_1 f_2 f_2 = e_1 f_2 f_2,$$

$$g_4 g_4 = e_2 f_2 e_2 f_2 = -e_2 e_2 f_2 f_2.$$

Последние два элемента таблицы Кели можно окончательно вычислить только для конкретных ГЧС.

3. Элементы таблицы Кели, находящиеся под главной диагональю, но не в первом столбце, противоположны элементам, симметричным относительно главной диагонали, т.е. $g_3 g_2 = -g_2 g_3$; $g_4 g_2 = -g_2 g_4$; $g_4 g_3 = -g_3 g_4$.

С учетом этих условий обобщенная таблица Кели для ГЧС исследуемого класса имеет следующий вид:

	g_1	g_2	g_3	g_4
g_1	g_1	g_2	g_3	g_4
g_2	g_2	$e_1 f_2 f_2$	$-g_4$	$-e_2 f_2 f_2$
g_3	g_3	g_4	$e_2 e_2 f_1$	$e_2 e_2 f_2$
g_4	g_4	$e_2 f_2 f_2$	$-e_2 e_2 f_2$	$-e_2 e_2 f_2 f_2$

. (8)

Как известно [13—16], существуют три класса изоморфизмов ГЧС второй размерности. Выберем из этих классов по одному представителю: систему комплексных чисел $\boldsymbol{C}$, систему двойных чисел $\boldsymbol{W}$ и систему дуальных чисел $\boldsymbol{D}$. Как показано в работе [14], первых два операнда в операторе удвоения можно коммутировать, так как полученные таблицы Кели отличаются только порядком строк и столбцов, т.е. они являются изоморфными. Поэтому исследуемый класс ГЧС состоит из шести классов изоморфизмов:

1. $Д\,(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}, 4) = \boldsymbol{H}$ — система кватернионов;
2. $Д\,(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{W}, 4) = \boldsymbol{AH}$ — система антикватернионов;
3. $Д\,(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, 4) = Д\,(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, 4)$;
4. $Д\,(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{W}, 4)$;
5. $Д\,(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{D}, 4)$;
6. $Д\,(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{D}, 4) = Д(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{W}, 4)$.

Таблицы Кели приведенных шести классов изоморфизмов можно легко получить, подставив в (8) базисные элементы систем комплексных, двойных и дуальных чисел и заменив двухсимвольные элементы базиса односимвольными. Выполнив такую подстановку для каждого из шести классов изоморфизмов, получим таблицы Кели четвертой размерности (табл. 1).

Связь систем, полученных с помощью ГК-процедуры, с обобщенными кватернионами. Как видно из табл. 1, умножение базисных элементов системы кватернионов удовлетворяет таблице Кели кватернионов (4). Проанализировав полученные результаты, видим, что системе антикватернионов $\boldsymbol{AH}$ соответствует второй случай обобщенных кватернионов, системе $Д(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, 4)$ — третий случай, системе $Д(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{D}, 4)$ — четвертый случай. Пятому случаю 1/4-кватернионов соответствует система $Д(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{D}, 4)$ (см. табл. 1).

В роботах [6—11] сформированы пять некоммутативных систем четвертой размерности, а с помощью ГК-процедуры получена шестая система — $Д\,(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{W}, 4)$. Проанализировав таблицу Кели этой системы, видим что она соответствует таблице умножения базисных элементов обобщенных кватернионов (2) для случая $\alpha = -1, \beta = -1$.

Исследование свойств полученного класса ГЧС. Введем следующее обозначение: $w = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4$, где $a_i \in R$. В данных ГЧС операцию умножения выполняем по правилу умножения любых двух гиперкомплексных чисел с учетом таблицы Кели рассматриваемой системы или подстановкой в (5) соответствующих значений α и β для каждой системы. В обоих случаях получаем одинаковые результаты.

В работе [3] норма гиперкомплексного числа в общем случае найдена по формуле

$$N\,(w) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij}^{k} a_i\,,$$

где γ_{ij}^{k} — структурные константы рассматриваемой ГЧС из табл. 1. На этой основе построена матрица нормы, после вычисления детерминанта которой получена норма гиперкомплексного числа.

По аналогии с теорией кватернионов назовем псевдонормой гиперкомплексного числа любой рассматриваемой системы подкоренное выра-

Таблица 1

Номер класса изоморфизмов	Таблица Кели	Номер класса изоморфизмов	Таблица Кели
1	$\begin{array}{c\|cccc} H & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline e_1 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_2 & e_2 & -e_1 & e_4 & -e_3 \\ e_3 & e_3 & -e_4 & -e_1 & e_2 \\ e_4 & e_4 & e_3 & -e_2 & -e_1 \end{array}$	4	$\begin{array}{c\|cccc} \text{Д}(\boldsymbol{W},\boldsymbol{W},4) & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline e_1 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_2 & e_2 & e_1 & e_4 & e_3 \\ e_3 & e_3 & -e_4 & -e_1 & e_2 \\ e_4 & e_4 & -e_3 & -e_2 & e_1 \end{array}$
2	$\begin{array}{c\|cccc} AH & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline e_1 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_2 & e_2 & -e_1 & e_4 & -e_3 \\ e_3 & e_3 & -e_4 & e_1 & -e_2 \\ e_4 & e_4 & e_3 & e_2 & e_1 \end{array}$	5	$\begin{array}{c\|cccc} \text{Д}(\boldsymbol{D},\boldsymbol{D},4) & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline e_1 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_2 & e_2 & 0 & e_4 & 0 \\ e_3 & e_3 & -e_4 & 0 & 0 \\ e_4 & e_4 & 0 & 0 & 0 \end{array}$
3	$\begin{array}{c\|cccc} \text{Д}(\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},4) & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline e_1 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_2 & e_2 & -e_1 & e_4 & -e_3 \\ e_3 & e_3 & -e_4 & 0 & 0 \\ e_4 & e_4 & e_3 & 0 & 0 \end{array}$	6	$\begin{array}{c\|cccc} \text{Д}(\boldsymbol{W},\boldsymbol{D},4) & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline e_1 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_2 & e_2 & e_1 & e_4 & e_3 \\ e_3 & e_3 & -e_4 & 0 & 0 \\ e_4 & e_4 & -e_3 & 0 & 0 \end{array}$

Таблица 2

ГЧС	Псевдонорма	Делитель нуля
$\boldsymbol{H}$	$N(w)=a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2$	Отсутствует
$\boldsymbol{AH}$	$N(w)=a_1^2+a_2^2-a_3^2-a_4^2$	$a_1^2+a_2^2=a_3^2+a_4^2$
$\text{Д}(\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},4)$	$N(w)=a_1^2+a_2^2$	$a_1^2+a_2^2=0$
$\text{Д}(\boldsymbol{W},\boldsymbol{W},4)$	$N(w)=a_1^2-a_2^2-a_3^2+a_4^2$	$a_1^2+a_4^2=a_3^2+a_2^2$
$\text{Д}(\boldsymbol{D},\boldsymbol{D},4)$	$N(w)=a_1^2$	$a_1^2=0$
$\text{Д}(\boldsymbol{W},\boldsymbol{D},4)$	$N(w)=a_1^2-a_2^2$	$a_1^2=a_2^2$

жение нормы $N(w)$. Следует заметить, что для этих систем матрицы нормы будут различными, а соответственно будут отличаться и представления псевдонормы (табл. 2). Если в (7) подставить значения α и β, соответствующие каждой системе, то получим одинаковые результаты. Как видно из табл. 2, в некоторых системах псевдонорма может быть отрицательной. Следовательно, таким способом введена мультипликативная псевдонорма для каждой системы, т.е. выполняется равенство

$$N(w_1 w_2) = N(w_1)\, N(w_2). \tag{9}$$

Сопряженное число определяем из равенства [3] $w\overline{w} = N(w)$, где $\overline{w} = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 + b_4 e_4$. Подставив введенные обозначения (см. табл. 2) и приравняв коэффициенты при одинаковых базисных элементах, получим линейную алгебраическую систему относительно переменных b_1, b_2, b_3, b_4. Например, для ГЧС $Д(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{D}, 4)$ такая линейная алгебраическая система выглядит так:

$$\begin{aligned} &a_1 b_1 = a_1^2, \\ &a_1 b_2 + a_2 b_1 = 0, \\ &a_1 b_3 + a_3 b_1 = 0, \\ &a_1 b_4 + a_4 b_1 + a_2 b_3 - a_3 b_2 = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Ее решение имеет вид $b_1 = a_1$, $b_2 = -a_2$, $b_3 = -a_3$, $b_4 = -a_4$. Поэтому, если исходным числом является $w = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4$, то сопряженное к нему имеет вид

$$\overline{w} = a_1 e_1 - a_2 e_2 - a_3 e_3 - a_4 e_4. \tag{11}$$

Несмотря на то, что для каждой из рассматриваемых ГЧС линейная алгебраическая система (10) будет иметь другой вид, представление сопряженного числа для каждого случая будет иметь вид (11), что совпадает с (6).

Для рассматриваемого класса ГЧС определены признаки делителей нуля [3]. Согласно (9) следует ожидать, что $N(w_i) = 0$, откуда вытекает наличие признаков делителей нуля в любой из рассматриваемых ГЧС (кроме системы кватернионов, в которой по теореме Фробениуса отсутствуют делители нуля [13]) (см. табл. 2).

Выводы

Установлено соответствие между отдельными случаями обобщенных кватернионов и ГЧС четвертой размерности, построенными с помощью некоммутативной ГК-процедуры удвоения систем второй размерности. Полученные результаты исследований арифметических и алгебраических свойств ГЧС позволяют сделать вывод о возможности их использования для построения различных математических моделей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hamilton W.R.* On a New Species of Imaginary Quantities Connected with a Theory of Quaternions // Proc. of the Royal Irish Academy. — 1844. — Vol. 2. — P. 424—434.
2. *Gorberashvili M.* Split quaternions and particles in (2+1)-space // Eur. Phys. J. C. — 2014. — P. 3199—3207.
3. *Синьков М.В., Бояринова Ю.Е., Калиновский Я.А.* Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения. — Киев. : Инфодрук, 2010. — 388 с.
4. *Toyoshima H.* Computationally Efficient Implementation of Hypercomplex Digital Filters // IEICE Trans. Fundamentals. — 2002, Aug. — Vol. E85-A, No 8. — P. 1870—1876.
5. *Godel C.* An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein`s Field Equations of Gravitation // Rev. Mod. Phys. — 1949. — Vol. 21, No. 3. — P. 447—450.
6. *Szeto G.* On generalized quaternion algebras // Intern. I. Math. And Math. Sci. — 1980. — Vol. 3, No. 2. — P. 237—245.
7. *Cai Yong-yu* On the First-degree Algebraic Equation of the Generalized Quaternion // Chinese Quarterly Journal of Mathematics. — 2002. — Vol. 17, No. 2. — P. 59—64.
8. *Flaut C., Shpakivskyi V.* An efficient method for solving equations in generalized quaternion and octonion algebras. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://arxiv.org/pdf/1405.5652.pdf. 2014.
9. *Jafari M., Yayli Y.* Generalized quaternion and rotation in 3-space $E^3_{\alpha\beta}$. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://arxiv.org/abs/1204.2476 (accessed April 11, 2012).
10. *Mamagami A.B., Jafari M.* On Properties of Generalized Quaternion Algebra // Journal of Novel Applied Sciences. — 2013. — Vol 2, No. 12. — P. 683—689.
11. *Mamagami A.B., Jafari M.* Some Notes on Matrix of Generalized // Intern. Research Journal of Applied and Basic Sciences. — 2013. — Vol 7, No. 14. — P. 1164—1171.
12. *Kalinovsky Y.O., Lande D.V., Boyarinova Y.E., Turenko A.S.* Computing Characteristics of One Class of Non-commutative Hypercomplex Number Systems of 4-dimension. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1409/1409.3193.pdf
13. *Кантор И.Л., Солодовников А.С.* Гиперкомплексные числа. — М. : Наука, 1973. —144 с.
14. *Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е.* Высокоразмерные изоморфные гиперкомплексные числовые системы и их использование для повышения эффективности вычислений. — Киев. : Инфодрук, 2012. — 183 с.
15. *Бояринова Ю.Е.* Неканонические гиперкомплексные числовые системы размерности 2 и их изоморфизмы // Реєстрація, зберігання і обробка даних. — 2011. — **13**, № 1. — С. 29—38.
16. *Калиновский Я.А.* Исследование свойств изоморфизма квадриплексных и бикомплексных числовых систем // Там же. — 2003. — **5**, № 1. — С. 69—73.

Ya. Kalinovsky, Yu. Boyarinova, A.Turenko, Y. Khitsko

PROPERTIES OF THE GENERALIZED QUATERNIONS AND THEIR RELATIONSHIP WITH GRASSMANN—CLIFFORD PROCEDURE OF DOUBLING

The class of non-commutative hypercomplex number systems of the 4th dimension constructed by using of non-commutative procedure of Grassman—Clifford doubling of 2-dimensional systems has been investigated in the article and their relationships with the generalized quaternions has been established. Algorithms of operations performance and methods of algebraic characteristics calculation in them, such as conjugation, normalization, a type of zero divisors are investigated.

*K e y w o r d s**:** quaternion, generalized quaternion, hypercomplex number system, zero divisor, pseudonorm, conjugation, Grassman—Clifford procedure of doubling.*

REFERENCES

1. Hamilton, W.R. (1844), "On a new species of imaginary quantities connected with a theory of quaternions», *Proceedings of the Royal Irish Academy*, Vol. 2, pp. 424-434.
2. Gorberashvili, M. (2014), "Split quaternions and particles in (2+1)-space", *Eur. Phys. J.,* pp. 3199-3207.
3. Sinkov, M.V., Boyarinova, Yu.E. and Kalinovsky, Ya.A. (2010), *Konechnomernyie giperkompleksnyie chislovyie sistemy. Osnovy teorii. Primeneniya* [Finite-dimensional hypercomplex number systems. Fundamentals of the theory. Applications], Infodruk, Kiev, Ukraine.
4. Toyoshima, H. (2002), "Computationally efficient implementation of hypercomplex digital filters", *IEICE Trans. Fundamentals,* Vol. E85-A, no. 8, pp. 1870-1876.
5. Godel, C. (1949), "An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein`s Field Equations of Gravitation", *Rev. Mod. Phys*, Vol. 21, no. 3, pp. 447-450.
6. Szeto, G. (1980), "On generalized quaternion algebras", *Internat. I. Math. And Math. Sci*., Vol. 3, no. 2, pp. 237-245.
7. Cai Yong-yu (2002), "On the first-degree algebraic equation of the generalized quaternion", *Chinese Quarterly Journal of Mathematics*, Vol. 17, no. 2, pp. 59-64.
8. Flaut, C. and Shpakivskyi, V. (2014), "An efficient method for solving equations in generalized quaternion and octonion algebras", available at: http://arxiv.org/pdf/1405.5652.pdf. 2014 (accessed June 4, 2014).
9. Jafari, M. and Yayli, Y. (2012), "Generalized quaternion and rotation in 3-space", available at: http://arxiv.org/abs/1204.2476 (accessed April 11, 2012).
10. Mamagami, A.B. and Jafari, M. (2013), "On properties of generalized quaternion algebra", *Journal of Novel Applied Sciences*, Vol. 2, no. 12, pp. 683-689.
11. Mamagami, A.B. and Jafari, M. (2013), "Some notes on matrix of generalized quaternion», *International Research Journal of Applied and Basic Sciences*, Vol. 7, no. 14, pp. 1164-1171.
12. Kalinovsky, Ya.O., Lande, D.V., Boyarinova, Yu.E. and Turenko, A.S. (2014), "Computing characteristics of one class of non-commutative hypercomplex number systems of 4-dimension", available at : http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1409/1409.3193.pdf (accessed September 9, 2014).
13. Kantor, I.L. and Solodovnikov, A.S. (1973) *Giperkompleksnyie chisla* [Hypercomplex numbers], Nauka, Moscow, Russia.
14. Kalinovsky, Ya.A. and Boyarinova, Yu.E. (2012) *Vysokorazmernyie izomorfnyie giperkompleksnyie chislovyie sistemy i ikh ispolzovaniye dlya povysheniya efektivnosti vychisleniy* [High-dimensional isomorphic hypercomplex number systems and their use to increase calculation efficiency], Infodruk, Kiev, Ukraine.
15. Boyarinova, Yu.E. (2011), "Non-canonical hypercomplex number systems of dimension 2 and their isomorphisms", *Data recording, storage and processing*, Vol. 13, no. 1, pp. 29-38.
16. Kalinovsky, Ya.A. (2003), "Research of properties of isomorphism of quadriplex and bicomplex number systems", *Data recording, storage and processing*, Vol. 5, no. 1, pp. 69-73.

Поступила 22.12.14;
после доработки 23.01.15

КАЛИНОВСКИЙ Яков Александрович, д-р техн. наук, ст.. науч. сотр. Ин-та проблем регистрации информации НАН Украины. В 1965 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — теория гиперкомплексных числовых систем и их применение в математическом моделировании.

ТУРЕНКО Алина Сергеевна, аспирантка Ин-та проблем регистрации информации НАН Украины. В 2013 г. окончила Житомирский государственный университет. Область научных исследований — теория гиперкомплексных числовых систем и их применение в математическом моделировании.

БОЯРИНОВА Юлия Евгеньевна, канд. техн. наук, доцент Национального технического университета Украины «Киевский политехнический ин-т», который окончила в 1997 г. Область научных исследований — теория гиперкомплексных числовых систем и их применение в математическом моделировании.

ХИЦКО Яна Владимировна, мл. науч. сотр. Национального технического университета Украины «Киевский политехнический ин-т», который окончила в 2005 г. Область научных исследований — теория гиперкомплексных числовых систем и их применение в математическом моделировании.