УДК 621.37:621.391

В.В. Палагин, д-р техн. наук
Черкасский государственный технологический университет
(Украина, 18006, Черкассы, бул.Шевченко, 460,
тел. (0472) 730261, e-mail: palahin@yahoo.com)

Кумулянтные модели и полиномиальные методы обнаружения сигналов при аддитивном взаимодействии с коррелированными негауссовыми помехами

Предложены модели и методы обработки статистически зависимых случайных величин для синтеза и анализа полиномиальных алгоритмов обнаружения сигналов на фоне негауссовых коррелированных помех при моментно-кумулянтном описании случайных процессов. Показано, что нелинейная обработка выборочных значений и учет параметров негауссового распределения статистически зависимых случайных величин позволяет повысить эффективность полиномиальных решающих правил и уменьшить вероятность появления ошибок первого и второго рода по сравнению с известными результатами.

Запропоновано моделі і методи обробки статистично залежних випадкових величин для синтезу і аналізу поліноміальних алгоритмів виявлення сигналів на фоні негаусових корельованих завад при моментно-кумулянтному описі випадкових процесів. Показано, що нелінійна обробка вибіркових значень і врахування параметрів негаусового розподілу статистично залежних випадкових величин дозволяє підвищити ефективність поліноміальних розв’язувальних правил і зменшити ймовірність виникнення помилок першого і другого роду в порівнянні з відомими результатами.

Ключевые слова: стохастические полиномы, моментные критерии качества, коррелированные негауссовы помехи.

С развитием технических систем увеличивается уровень их сложности, расширяются функциональные возможности и повышаются требования к качеству обработки информации. Это требует не только технологического обновления, но и создания усовершенствованных методов обработки сигналов, представляющих собой случайные процессы.

Использование теории проверки статистических гипотез позволяет успешно решать целый комплекс прикладных задач, в том числе и задачи обнаружения, распознавания и различения сигналов. Как известно, в основе решения таких задач лежит решающая функция, представленная в виде сравнения отношения правдоподобия с тем или иным порогом, выбираемым по одному из классических критериев качества [1—3]. Такие критерии назовем вероятностными, так как в их основе лежат вероятности ошибок первого и второго рода решающей функции. Построение систем обнаружения и различения сигналов на основе классического похода в общем случае не предусматривает ограничений на использование вида плотности распределения случайных величин. На практике широко используется стандартное нормальное распределение случайных величин, которое во многих случаях не позволяет отображать реальные процессы с необходимой адекватностью [4].

При изучении прохождения сигналов через неоднородные среды, переотражения сигналов от морской поверхности, загоризонтной радиолокации и других процессов требуется использование негауссовых моделей сигналов и помех как наиболее адекватных [4—7].

Использование классических вероятностных критериев качества для негауссовых моделей сигналов и помех вызывает ряд существенных трудностей, связанных как с синтезом алгоритмов обработки, так и с их практической реализацией. Данная задача существенно усложняется при рассмотрении корреляционных связей случайных величин, в системах с ограниченным интервалом наблюдения, учете параметров многолучевого распространения сигналов и в других случаях.

Результаты последних исследований свидетельствуют о том, что для решения задач обработки негауссовых процессов перспективен подход, при котором для описания статистических свойств случайных величин используются моменты и кумулянты (семиварианты). Такой подход позволяет с приемлемым приближением характеризовать статистические свойства негауссовых процессов [6, 7].

Рассмотрим возможность создания и реализации моделей процессов обнаружения сигналов на фоне коррелированных негауссовых помех на основе моментно-кумулянтного представления случайных величин с модификацией моментного критерия качества проверки статистических гипотез для построения эффективных методов обработки данных.

Моментно-кумулянтные модели статистически зависимых случайных величин. При исследовании статистических зависимостей между случайными величинами используют многомерные моменты и кумулянты, которые являются коэффициентами разложения многомерной характеристической функции в ряд [6]. Одномерные моменты m_i-го порядка для статистически независимых выборочных значений определяются через одномерную плотность распределения:

$$E(\xi^i) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^i W_1(\xi)\, dx.$$

Совместные моменты случайных величин определяются через многомерную плотность распределения:

$$E(\xi^i(t_1)\dots\xi^s(t_n)) =$$

$$= \int \dots \int \xi_1^i, \xi_2^j \dots \xi_n^s W_n(\xi_1 \dots \xi_n, t_1, t_2, \dots, t_n)\, d\xi_1 \dots d\xi_n.$$

Многомерная характеристическая функция, как и многомерная плотность распределения, является полным описанием случайной величины.

Для практических задач важной характеристикой учета статистической связи случайных величин является двухмерное вероятностное распределение [8]. При этом случайную величину с какой-либо статистической связью выборочных значений можно характеризовать не только одномерными, но и совместными кумулянтами, выразив их через совместные моменты:

$$E(\xi^i \xi^j) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^i \xi^j W(\xi_1, \xi_2)\, dx.$$

Пусть имеются выборочные значения стационарного случайного процесса, которые можно рассматривать как отдельные случайные величины. Тогда в качестве статистически зависимых выборочных значений можно принять взаимосвязь между двумя случайными величинами, что равносильно рассмотрению двумерной совместной плотности распределения двух случайных величин.

Рассмотрим случай, когда имеются две зависимые случайные величины, ξ и η, с плотностями распределения соответственно p_ξ и p_η. Согласно [6, 7] начальные моменты первого порядка случайных величин ξ и η запишем в виде

$$m_i^{(\xi)} = E\,\xi^i = \int_{-\infty}^{+\infty} x^i p_\xi(x)\, dx, \;\; m_i^{(\eta)} = E\eta^i = \int_{-\infty}^{+\infty} y^i p_\eta(y)\, dy.$$

Поскольку случайные величины ξ и η зависимые, кроме начальных моментов они имеют смешанные (совместные) моменты различной размерности.

Определение 1. Смешанным моментом двух случайных величин размерностью (i, j) будем называть величину, равную математическому ожиданию произведения i-й степени случайной величины ξ и j-й степени случайной величины η:

$$m_{i,j}^{(\xi,\eta)} = E\xi^i \eta^j = \int_{-\infty}^{+\infty} x^i y^j p(x, y)\, dxdy,$$

где $p(x, y)$ — совместное распределение случайных величин ξ и η. Очевидно, справедливы следующие равенства:

$$m_i^{(\xi)} = m_{i,0}^{(\xi,\eta)}, \; m_j^{(\eta)} = m_{0,j}^{(\xi,\eta)}, \; m_{i+j}^{(\xi)} = m_{i,j}^{(\xi,\xi)}, \; m_{i+j}^{(\eta)} = m_{i,j}^{(\eta,\eta)}.$$

Аналогично можно определить смешанный (совместный) момент трех и более случайных величин, ξ, η, γ, размерностью (i, j, k):

$$m_{i,j,k}^{(\xi,\eta,\gamma)} = E\xi^i \eta^j \gamma^k = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^i y^j z^k p(x, y, z)\, dxdydz.$$

В данном случае получаем равенства:

$$m_{i,j}^{(\xi,\eta)} = m_{i,j,0}^{(\xi,\eta,\gamma)}, \; m_{i,k}^{(\xi,\gamma)} = m_{i,0,k}^{(\xi,\eta,\gamma)}, \; m_{j,k}^{(\eta,\gamma)} = m_{0,j,k}^{(\xi,\eta,\gamma)},$$

$$m_i^{(\xi)} = m_{i,0,0}^{(\xi,\eta,\gamma)}, \; m_j^{(\eta)} = m_{0,j,0}^{(\xi,\eta,\gamma)}, \; m_k^{(\gamma)} = m_{0,0,0}^{(\xi,\eta,\gamma)},$$

$$m_{i+j+k}^{(\xi)} = m_{i,j,k}^{(\xi,\xi,\xi)}, \; m_{i+j+k}^{(\eta)} = m_{i,j,k}^{(\eta,\eta,\eta)}, \; m_{i+j+k}^{(\gamma)} = m_{i,j,k}^{(\gamma,\gamma,\gamma)},$$

$$m_{i+j}^{(\xi)} = m_{i,j,0}^{(\xi,\xi,\xi)}, \; m_{i+k}^{(\eta)} = m_{i,0,k}^{(\eta,\eta,\eta)}, \; m_{j+k}^{(\gamma)} = m_{0,j,k}^{(\gamma,\gamma,\gamma)}.$$

Кроме начальных моментов i-го порядка и смешанных моментов размерностью (i, j) будем использовать корреляционные моменты размерностью (i, j).

Определение 2. Корреляционным моментом двух случайных величин, ξ и η, размерностью (i, j) будем называть величину $F_{i,j}^{(\xi,\eta)}$:

$$F_{i,j}^{(\xi,\eta)} = E(\xi^i - m_i^{(\xi)})(\eta^j - m_j^{(\eta)}) = E\,\xi^i \eta^j - m_i^{(\xi)} m_j^{(\eta)} = m_{i,j}^{(\xi,\eta)} - m_i^{(\xi)} m_j^{(\eta)}.$$

Определим корреляционный момент для трех случайных величин размерностью (i, j, k). При этом возможны два случая, а именно:

1) $F_{i,j,k}^{(\xi,\eta,\gamma)} = E(\xi^i - m_i^{(\xi)})(\eta^j - m_j^{(\eta)})(\gamma^k - m_k^{(\gamma)}) = m_{i,j,k}^{(\xi,\eta,\gamma)} - m_k^{(\gamma)} m_{i,j}^{(\xi,\eta)} - m_j^{(\eta)} m_{i,k}^{(\xi,\gamma)} - m_i^{(\xi)} m_{j,k}^{(\eta,\gamma)} + 2m_i^{(\xi)} m_j^{(\eta)} m_k^{(\gamma)}$;

2) $F_{i,j,k}^{(\xi,\eta,\gamma)} = E(\xi^i \eta^j - m_{i,j}^{(\xi,\eta)})(\gamma^k - m_k^{(\gamma)}) = m_{i,j,k}^{(\xi,\eta,\gamma)} - m_{i,j}^{(\xi,\eta)} m_k^{(\gamma)}$.

Аналогично могут быть определены корреляционные моменты для четырех, пяти и более случайных величин.

Использование совместных моментов позволяет учесть не только такие параметры как асимметрия (γ_3), эксцесс (γ_4) и другие, но и степень статистической взаимосвязи случайных величин. В работах [6, 7] показано, что для негауссовых статистически независимых случайных величин с нулевым математическим ожиданием взаимосвязь между начальными моментами α_i и кумулянтами χ_i до четвертого порядка включительно имеет вид $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \chi_2, \alpha_3 = \chi_3, \alpha_4 = \chi_4 + 3\chi_2^2$.

Следует заметить, что для гауссовых случайных величин кумулянты третьего и более высоких порядков $(\chi_3, \chi_4, ...)$ равны нулю. Для негауссовой статистически зависимой случайной величины с нулевым математическим ожиданием связь между совместными моментами m_{ij} и кумулянтами χ_{ij} до четвертого порядка имеет вид

$$m_{11} = \chi_{11}, \; m_{12} = \chi_{12}, \; m_{13} = \chi_{13} + 3\chi_2\chi_{11}, \; m_{22} = \chi_{22} + \chi_2^2 + 2\chi_{11}^2.$$

Если случайная величина является статистически независимой, то многомерные моменты трансформируются в произведение одномерных.

Моменты могут быть получены в результате экспериментальных исследований как определенные усреднения выборочных значений и оставаться единственными величинами, представляющими определенные свойства случайной величины. Как известно, на основе бесконечной последовательности моментных функций можно восстановить вид характеристической функции. Для случайных величин, которые отличаются от гауссовых, именно эти характеристики могут нести все возможные сведения об их статистических связях и распределениях.

Поскольку не всегда имеется полная информация о многомерной функции распределения, целесообразным является более детальное рассмотрение статистически зависимых случайных величин с помощью усредненных характеристик в виде моментов и кумулянтов. При этом отличие от нулевого значения совместных кумулянтов свидетельствует о существовании статистической зависимости между соответствующими случайными величинами.

Между совместными моментами и кумулянтами существуют связи, подобные связям для одномерных случайных величин. Известно, что совместный кумулянт второго порядка (ковариация) χ_{11} описывает статистическую связь первого порядка или коррелированность случайных величин: $\chi_{11} = m_{11} - m_{\xi 1} m_{\xi 2}$, где $m_{\xi 1}$ и $m_{\xi 2}$ — математические ожидания случайных величин ξ_1 и ξ_2.

Статистическая связь между выборочными значениями, при которых $\chi_{11} \neq 0$, характеризует корреляцию этих выборочных значений. Известно, что равенство $\chi_{11} = 0$ еще не свидетельствует о статистической независимости, так как кумулянты высших порядков могут отличаться от нуля и устанавливать более сложную зависимость между случайными величинами, чем их зависимость при взаимной корреляции [6].

Исследование негауссовых моделей сигналов и помех представляет собой достаточно обширную задачу, так как приходится рассматривать определенную последовательность начальных моментов и кумулянтов, описывающих степень негауссовости случайных величин. При этом возникают сложные вопросы, связанные с существованием области допустимых значений кумулянтов и наложении ограничений при их взаимном использовании. Кумулянты различных порядков, как коэффициенты разложения характеристической функции, могут быть отнесены к определенным классам, характеризующим соответствующую плотность вероятности. Такая классификация негауссовых случайных величин получила название перфорации, где выделены асимметричные, эксцессные и другие статистически независимые случайные величины различных типов и видов [7].

Дальнейшее развитие классификации негауссовых статистически зависимых случайных величии позволяет существенно упростить построение решающих правил (РП) обнаружения сигналов по моментным критериям качества и исследование их свойств [8—10]. Рассмотрим примеры классификации таких случайных величин, которые используем далее для построения полиномиальных РП.

Определение 3. Гауссовыми статистически зависимыми случайными величинами будем называть такие, для которых отличными от нуля являются одномерный кумулянт второго порядка χ_2 и совместный кумулянт второго порядка χ_{11}, а все остальные кумулянты третьего и более высоких порядков, а также совместные кумулянты выше второго порядка равны нулю.

В этом случае начальные моменты до четвертого порядка включительно имеют вид $\alpha_1 = \chi_1, \alpha_2 = \chi_2, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 3\chi_2^2$, а совместные моменты имеют следующую взаимосвязь с совместными кумулянтами:

$$m_{11}^{(v,k)} = \chi_{11} = \chi_2 \rho^{(v,k)}, \; m_{12} = \chi_{12} = 0, \; m_{22}^{(v,k)} = \chi_2^2 + 2\chi_{11}^2 = \chi_2^2 (1 + 2\rho^{(v,k)^2}),$$

где $\rho^{(v,k)}$ — корреляционная функция заданного вида между v-м и k-м выборочными значениями. Например, корреляционная функция может иметь экспоненциальную зависимость $\rho^{(v,k)} = e^{-A|v-k|}$ либо иную.

Определение 4. Асимметричными статистически зависимыми случайными величинами первого типа первого вида будем называть такие, для которых отличны от нуля χ_2 и χ_3, а также совместные кумулянты χ_{11} и χ_{12}, а все остальные кумулянты четвертого и более высоких порядков, а также совместные кумулянты выше третьего порядка равны нулю.

В этом случае начальные моменты до четвертого порядка включительно имеют вид $\alpha_1 = \chi_1, \alpha_2 = \chi_2, \alpha_3 = \chi_3, \alpha_4 = 3\chi_2^2$, а совместные моменты имеют следующую взаимосвязь с совместными кумулянтами:

$$m_{11}^{(v,k)} = \chi_{11} = \chi_2 \rho^{(v,k)}, \, m_{12}^{(v,k)} = \chi_{12} = \gamma_3 \chi_2^{3/2} \rho^{(v,k)^{3/2}},$$

$$m_{22}^{(v,k)} = \chi_2^2 + 2\chi_{11}^2 = \chi_2^2 (1 + 2\rho^{(v,k)^2}).$$

Определение 5. Эксцессными статистически зависимыми случайными величинами первого типа первого вида будем называть такие, для которых отличны от нуля χ_2 и χ_4, а также совместные кумулянты χ_{11}, χ_{13} и χ_{22}, а все остальные кумулянты третьего и выше четвертого порядков, а также совместные кумулянты выше четвертого порядка равны нулю.

В этом случае начальные моменты до четвертого порядка включительно имеют вид $\alpha_1 = \chi_1$, $\alpha_2 = \chi_2$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = \chi_4 + 3\chi_2^2$, а совместные моменты имеют следующую взаимосвязь с совместными кумулянтами:

$$m_{11}^{(v,k)} = \chi_{11} = \chi_2 \rho^{(v,k)},\ m_{12}^{(v,k)} = \chi_{12} = 0,\ m_{13}^{(v,k)} = \gamma_4 \chi_{11}^2 + 3\chi_2 \chi_{11},$$

$$m_{22}^{(v,k)} = \chi_2^2 (\gamma_4 \rho^{(v,k)^2} + 1 + 2\rho^{(v,k)^2}).$$

Определение 6. Асимметрично-эксцессными статистически зависимыми случайными величинами второго типа первого вида будем называть такие, для которых отличны от нуля χ_2, χ_3 и χ_4, а также совместные кумулянты $\chi_{11}, \chi_{12}, \chi_{13}$ и χ_{22}, а все остальные кумулянты выше четвертого порядков, а также совместные кумулянты выше четвертого порядка равны нулю.

В этом случае начальные моменты до четвертого порядка включительно имеют вид $\alpha_1 = \chi_1$, $\alpha_2 = \chi_2$, $\alpha_3 = \chi_3$, $\alpha_4 = \chi_4 + 3\chi_2^2$, а совместные моменты имеют следующую взаимосвязь с совместными кумулянтами:

$$m_{11}^{(v,k)} = \chi_{11} = \chi_2 \rho^{(v,k)},\ m_{12}^{(v,k)} = \chi_{12} = \gamma_3 \chi_2^{3/2} \rho^{(v,k)^{3/2}},$$

$$m_{13}^{(v,k)} = \gamma_4 \chi_{11}^2 + 3\chi_2 \chi_{11},\ m_{22}^{(v,k)} = \chi_2^2 (\gamma_4 \rho^{(v,k)^2} + 1 + 2\rho^{(v,k)^2}).$$

Следует заметить, что как и одномерные кумулянтные коэффициенты, многомерные кумулянты не могут принимать произвольных значений в связи с положительной определенностью характеристической функции. Существуют области допустимых значений (ОДЗ) этих характеристик, что также следует учитывать при использовании полиномиальных методов синтеза РП.

В работе [7] ОДЗ кумулянтных коэффициентов определяется из условия положительного объема тела стохастического полинома. Распространим это положение и на многомерные кумулянты. Например, при степени полинома РП $s = 2$ объем тела определяется корреляционными функциями следующего вида:

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_{1,1}^{(v,k)} & F_{1,2}^{(v,k)} \\ F_{2,1}^{(v,k)} & F_{2,2}^{(v,k)} \end{vmatrix},$$

где $F_{1,1}^{(v,k)} = \chi_{11}^{(v,k)} - \chi_1^2$; $F_{1,2}^{(v,k)} = F_{2,1}^{(v,k)} = \chi_{12}^{(v,k)} - \chi_1(\chi_2 + \chi_1^2)$; $F_{2,2}^{(v,k)} = \chi_{22}^{(v,k)} + {}$ $+ \chi_2^2 + 2\chi_{11}^{(v,k)2} - (\chi_2 + \chi_1^2)^2$. Учитывая положительное значение объема тела

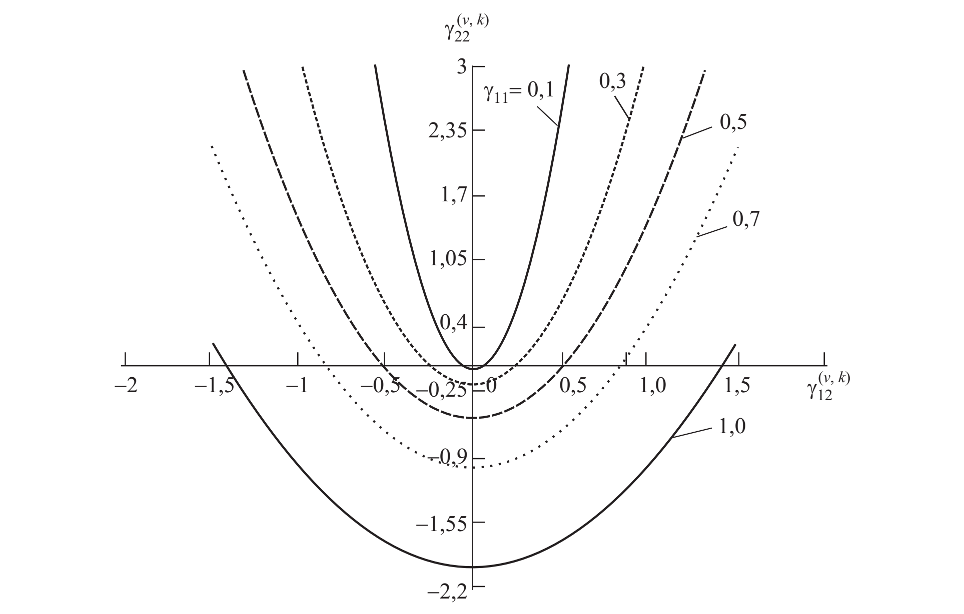

Рис. 1. Область допустимых значений кумулянтных коэффициентов $\gamma_{12}^{(v,k)}$ и $\gamma_{22}^{(v,k)}$ при фиксированных значениях коэффициента корреляции $\gamma_{11}^{(v,k)}$

и дисперсии χ_2, получаем следующее неравенство, устанавливающее связь между двухмерными кумулянтами:

$$\gamma_{11}^{(v,k)}\gamma_{22}^{(v,k)} + 2{\gamma_{11}^{(v,k)}}^3 - {\gamma_{12}^{(v,k)}}^2 > 0\,. \qquad (1)$$

На рис. 1 приведены графики кумулянтных коэффициентов $\gamma_{12}^{(v,k)}$ и $\gamma_{22}^{(v,k)}$ при фиксированных значениях коэффициента корреляции $\gamma_{11}^{(v,k)}$. Следует заметить, что в случае отсутствия корреляции неравенство (1) принимает вид $\gamma_4 + 2 - \gamma_3^2 > 0$, что полностью совпадает с известным выражением [6, 7] для негауссовых независимых случайных величин и определяет ОДЗ коэффициента асимметрии и эксцесса. Аналогичным способом можно проводить исследования ОДЗ и для других кумулянтных коэффициентов.

Модификация моментного критерия качества верхней границы вероятностей ошибок при статистически зависимых выборочных значениях. Пусть имеются зависимые выборочные значения $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ объемом *n*, осуществленные при реализации гипотезы H_1 или H_0. При реализации гипотезы H_1 наблюдается аддитивная смесь полезного сигнала *a* и помехи η и любое выборочное значение x_v описывается начальными моментами $m_i^{(v)}$ порядка *i* в моменты времени *v*, а смешанные моменты двух случайных величин, x_v и x_k, описываются совместным моментом $m_{i,j}^{(v,k)}$ размерностью (i,j) в моменты времени v и k. При реализации гипотезы H_0 наблюдается только одна помеха η и любое выборочное значение x_v описывается начальными моментами $u_i^{(v)}$ порядка i, а смешанные моменты двух случайных величин, x_v и x_k, описываются совместным моментом $u_{i,j}^{(v,k)}$ размерностью (i,j). Необходимо синтезировать РП, с помощью которого по выборке можно определить, какая из гипотез осуществилась.

В [8] описан метод обработки статистически зависимых случайных величин, в котором отношение правдоподобия представлено в виде стохастического полинома конечной степени s:

$$\Lambda_{sn}(X) = \sum_{v=1}^{n} \sum_{i=1}^{s} k_{iv} x_v^i + k_0 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0, \tag{2}$$

где k_{iv}, k_0 — оптимальные коэффициенты, минимизирующие один из известных вероятностных критериев качества, в частности критерий суммы вероятностей ошибок первого (α) и второго (β) рода РП, и определяемые из минимума моментного критерия качества верхней границы вероятностей ошибок

$$Ku(E,G,\rho) = \frac{\sum_{v=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} k_{iv} k_{jk} (F_{i,j}^{(v,k)}(H_0) + F_{i,j}^{(v,k)}(H_1))}{\sum_{v=1}^{n} \sum_{i=1}^{s} k_{iv} (m_i^{(v)} - u_i^{v})^2}. \tag{3}$$

Согласно этому критерию неизвестный коэффициент РП (2) k_0 выбирается как среднее значение математических ожиданий РП при гипотезе и альтернативе:

$$k_0 = -\frac{1}{2} \sum_{v=1}^{n} \sum_{i=1}^{s} k_{iv} (m_i^{(v)} - u_i^{v}), \tag{4}$$

где неизвестные коэффициенты k_{iv} определяются из (3) в результате решения системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{s} k_{jk} (F_{i,j}^{(v,k)}(H_0) + F_{i,j}^{(v,k)}(H_1)) = m_i^{(v)} - u_i^{v}, \ \ v,k = \overline{1,n}, \ \ i = \overline{1,s}. \tag{5}$$

Отличие функционала (3) для зависимых выборочных значений состоит в том, что в развернутом виде выражения для математического ожидания и дисперсии РП общего вида (2) при гипотезе и альтернативе E_0, E_1, G_0 и G_1 имеют вид

$$E_{0(sn)}=\sum_{i=1}^{s}\sum_{v=1}^{n}k_{iv}u_i^v,\ \ E_{1(sn)}=\sum_{i=1}^{s}\sum_{v=1}^{n}k_{iv}m_i^v,$$

$$G_{0(sn)}=\sum_{i=s}^{s}\sum_{j=1}^{s}\sum_{v=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}k_{iv}k_{jv}F_{(i,j)}^{(v,k)}(H_r),\ \ r=0,1,\ \ v,k=\overline{1,n},$$

где корреляционные моменты v-го и k-го выборочного значения для статистически зависимых выборочных значений имеют вид

$$F_{(i,j)}^{(v,k)}(H_0)=u_{(i,j)}^{(v,k)}-u_i^{(v)}u_j^{(k)},\ F_{(i,j)}^{(v,k)}(H_1)=m_{(i,j)}^{(v,k)}-m_i^{(v)}m_j^{(k)}. \tag{6}$$

Решение системы алгебраических уравнений (5) при применении численных методов [11] является весьма сложным, так как корреляционные моменты $F_{(i,j)}^{(v,k)}$ при гипотезе и альтернативе представляют собой корреляционные матрицы, описывающие взаимосвязь выборочных значений. Например, корреляционная функция $F_{(1,1)}^{(v,k)}$ при реализации гипотезы H_1 согласно (6) примет вид

$$F_{(i,j)}^{(v,k)}(H_1)=m_{(i,j)}^{(v,k)}-m_i^{(v)}m_j^{(k)}=\chi_2\rho^{(v,k)}-m_i^{(v)}m_j^{(k)},\ v,k=\overline{1,n},$$

где

$$\rho^{(v,k)}=\begin{pmatrix}1 & \rho^{(1,2)} & \cdots & \rho^{(1,n)}\\ \rho^{(2,1)} & 1 & \cdots & \rho^{(2,n)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \rho^{(n,1)} & \rho^{(n,2)} & \cdots & 1\end{pmatrix},\ \ \rho^{(i,j)}=e^{-A|i-j|},\ \ i,j=\overline{1,n}.$$

Минимальное значение критерия (3) при степени полинома РП s составляет

$$Ku(E,G,\rho)=I_s^{-1}, \tag{7}$$

где I_s — количество извлекаемой информации из выборочных значений о различении гипотез H_1 и H_0 с помощью РП (2).

Таким образом, на основе предложенных моделей коррелированных негауссовых случайных величин и адаптации моментного критерия качества проверки статистических гипотез для статистически зависимых выборочных значений получен новый метод синтеза полиномиальных РП обнаружения сигналов на фоне коррелированных негауссовых помех.

Синтез и анализ полиномиальных алгоритмов обнаружения сигнала на фоне негауссовых помех при статистически зависимых выборочных значениях. Пусть на входе системы обнаружения наблюдается аддитивная смесь полезного сигнала a и помехи η, которая является случайной величиной с нулевым математическим ожиданием. Тогда при осуществлении гипотезы H_1 выборочные значения объемом n из полученной смеси имеют вид $x_v = a + \eta_v$, $v = \overline{1, n}$, а при осуществлении гипотезы H_0 — следующий вид: $x_v = \eta_v$. При этом будем полагать, что выборочные значения η_v — статистически зависимые и имеют корреляционный момент $\chi_{1,1}^{(v,k)}$ размерностью (1,1), $v, k = \overline{1, n}$. Тогда РП для различения гипотезы и альтернативы при степени полинома $s = 1$ с учетом выражений (4, 5) примет вид

$$\sum_{v=1}^{n} A_v \left(x_v - \frac{a}{2} \right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0, \tag{8}$$

где A_v — определитель, полученный заменой v-го столбца столбцом, состоящим из единиц в определителе

$$\Delta_1 = |F_{(1,1)}^{(v,k)}| = \begin{vmatrix} \rho^{(1,1)}, \rho^{(1,2)} & \ldots & \rho^{(1,n)} \\ \rho^{(2,1)}, \rho^{(2,2)} & & \rho^{(2,n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \rho^{(n,1)}, \rho^{(n,2)} & \cdots & \rho^{(n,n)} \end{vmatrix}, \quad v, k = \overline{1, n},$$

где $\rho^{(v,k)}$ — заданный коэффициент корреляции. Тогда согласно (7) количество извлекаемой информации о различении гипотез для линейного РП с учетом найденного коэффициента $k_{1v} = (aA_v) / \Delta_1$ имеет вид

$$I_1 = \frac{a_2}{\Delta_1} \sum_{v=1}^{n} A_v, \tag{9}$$

а значение критерия качества принимает вид, обратный I_1.

Легко показать, что если выборочные значения — независимые, т.е. $\rho^{(v,k)} = 0$ при $v \neq k$ и $\rho^{(v,k)} = 1$ при $v = k$, то значение $Ku(E, G, \rho)$ будет такое же, как при $Ku_1(E, G) = 2 / nq$, где $q = a^2 / \chi_2$ — отношение сигнал—шум, а линейное РП (8) преобразуется к известному виду

$$\frac{1}{n} \sum_{v=1}^{n} x_v - \frac{a}{2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0.$$

Здесь $\sum\limits_{v=1}^{n} x_v$ — усредненная сумма выборочных значений; $a/2$ — половинное значение математического ожидания принимаемого сигнала.

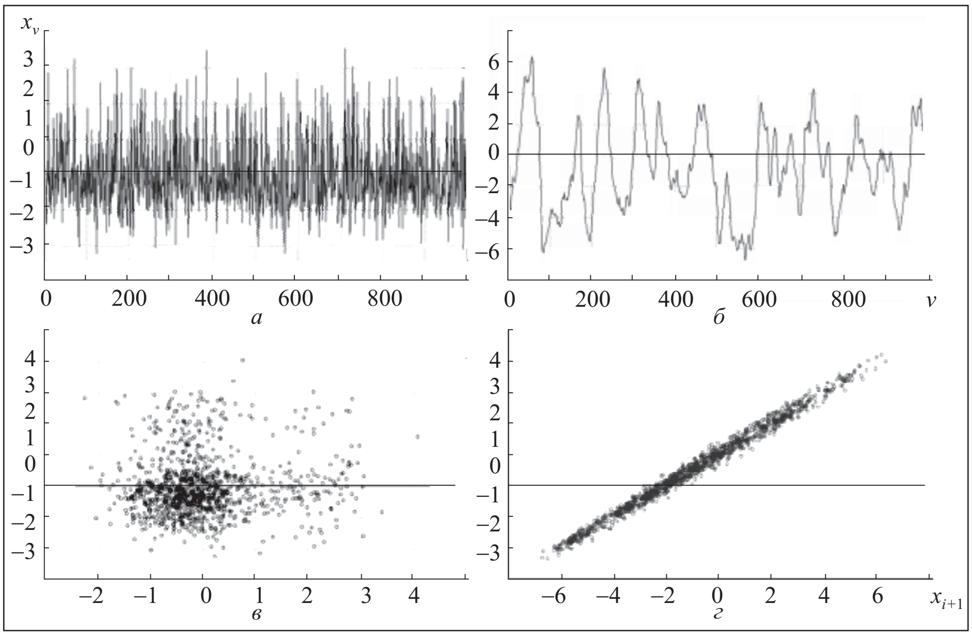

Рис. 2. Графики (*а*, *б*) и корреляционные поля (*в*, *г*) некоррелированной (*а*, *в*) и коррелированной (*б*, *г*) негауссовой случайной величины при $n = 1000$, $A = 0{,}1$, $\gamma_3 = 0{,}9$, $\gamma_4 = 0{,}8$

На рис. 2 представлены графики временной зависимости некоррелированной и коррелированной негауссовых случайных величин, полученные при использовании полигауссового способа генерации выборочных значений. Как видно из рис. 2, при введении корреляционных связей между выборочными значениями «выбросы» и «хаотичность» коррелированной случайной величины уменьшились, что является следствием взаимосвязи соседних выборочных значений.

Линейное РП (8) не позволяет учесть негауссово распределение помехи, так как в этом случае используются только начальные моменты первого и второго порядков, которые описывают математическое ожидание и дисперсию обрабатываемой случайной величины и являются типичными характеристиками нормального закона распределения. В случае увеличения степени стохастического полинома до $s = 2$ РП будет нелинейным. Тогда в общем случае оно примет вид

$$\sum_{v=1}^{n} k_{1v} x_v + \sum_{v=1}^{n} k_{2v} x_v^2 - k_0 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0 \qquad (10)$$

ISSN 0204–3572. Electronic Modeling. 2015. V. 37. № 6

и система уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов, согласно (5), будет иметь следующий вид:

$$\begin{gathered}\sum_{v=1}^{n} k_{1v}(F_{1,1}^{(v,k)}(H_0)+F_{1,1}^{(v,k)}(H_1))+\\+\sum_{v=1}^{n} k_{2v}(F_{1,2}^{(v,k)}(H_0)+F_{1,2}^{(v,k)}(H_1))=a,\ k=1,n,\\ \sum_{v=1}^{n} k_{1v}(F_{2,1}^{(v,k)}(H_0)+F_{2,1}^{(v,k)}(H_1))+\\+\sum_{v=1}^{n} k_{2v}(F_{2,2}^{(v,k)}(H_0)+F_{2,2}^{(v,k)}(H_1))=a^2,\ k=1,n.\end{gathered} \tag{11}$$

Решив систему (11), получим неизвестные коэффициенты РП (10):

$$k_{1v}=\frac{aA_v}{\Delta_2},\quad v=\overline{1,n}\ ,\ k_{2v}=\frac{aB_v}{\Delta_2},\quad v=\overline{n+1,2n}\ ,$$

где A_v — определитель, полученный с помощью определителя

$$\Delta_2=\left|\begin{array}{ccc:ccc} F_{11}^{1,1} & \cdots & F_{11}^{1,n} & F_{12}^{1,1} & \cdots & F_{12}^{1,n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ F_{11}^{n,1} & \cdots & F_{11}^{n,n} & F_{12}^{n,1} & \cdots & F_{12}^{n,n}\\ \hdashline F_{21}^{1,1} & \cdots & F_{21}^{1,n} & F_{22}^{1,1} & \cdots & F_{22}^{1,n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ F_{21}^{n,1} & \cdots & F_{21}^{n,n} & F_{22}^{n,1} & \cdots & F_{22}^{n,n}\end{array}\right|$$

заменой v-го столбца столбцом $v=\overline{1,n}$ с элементами $(\underline{1,1,\ldots,1},a,a,\ldots,a)$, а определитель B_v подобен определителю A_v при $v=n+1,2n$.

В общем случае для найденных коэффициентов k_{1v} и k_{2v} порог РП следующий:

$$k_0=-\frac{1}{2}\sum_{v=1}^{n}\left(\frac{qA_v}{\Delta_2}+\frac{q^{0,5}B_v}{\Delta_2}(q+2)\right).$$

Легко показать, что после преобразований РП (9) примет следующий окончательный вид:

$$\sum_{v=1}^{n} A_v\left(x_v-\frac{a}{2}\right)+\sum_{v=1}^{n} B_v\left(x_v^2-\chi_2-\frac{a^2}{2}\right)\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}0\,. \tag{12}$$

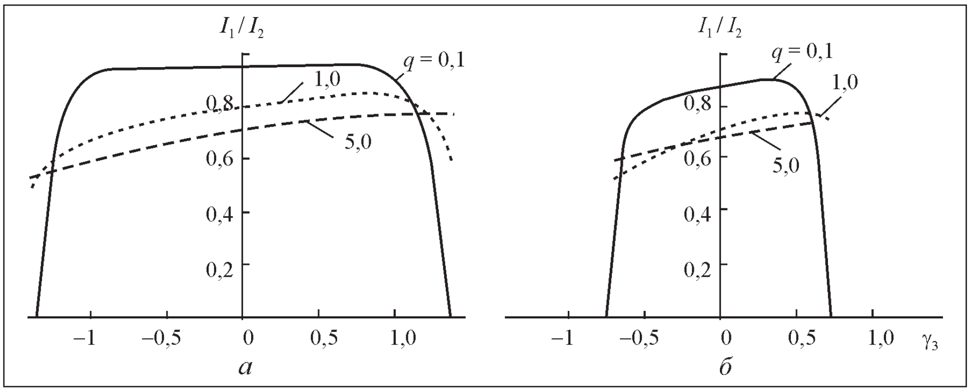

Рис. 3. Графики зависимости отношения I_1/I_2 от коэффициента асимметрии γ_3 при $A = 0{,}01$: *а* — асимметричная ($\gamma_4 = 0$) негауссова помеха; *б* — асимметрично-эксцессная ($\gamma_4 = -1$) негауссова помеха

С учетом коэффициентов k_{1v} и k_{2v} количество извлекаемой информации о различии гипотез с помощью нелинейного РП (12) примет вид

$$I_2 = \frac{1}{\Delta_2} \sum_{v=1}^{n} (q^{0,5} A_v + q^{1,5} B_v) . \tag{13}$$

Сравнивая количество извлекаемой информации о различии гипотез при линейной (9) и нелинейной (13) обработке выборочных значений, можно получить количественные оценки синтезированных РП.

На рис. 3 представлены зависимости отношения I_1 / I_2 от коэффициента асимметрии γ_3 для экспоненциальной корреляционной функции. Из графиков видно, что для малых значений параметра q существенное увеличение количества извлекаемой информации из выборочных значений $s = 2$ достигается при граничных значениях коэффициента γ_3. Результаты исследований других типов негауссовых помех также показали тенденцию к увеличению эффективности обработки данных при учете параметров негауссового распределения помехи.

Выводы

Разработанные на основе предложенных кумулянтных моделей и полиномиальных методов обработки сигналов на фоне негауссовых коррелированных помех эффективные вычислительные алгоритмы обнаружения сигналов позволяют увеличить точность обработки данных при заданных ограничениях на их сложность и повысить эффективность процессов обнаружения в системах наблюдения, диагностики, мониторинга, контроля и управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. Изд. 3-е, перераб. и доп. — М. : Радио и связь, 1989. — 696 с.
2. *Van Trees H.L.* Detection Estimation and Modulation Theory. 2nd ed. — John Wiley & Sons, 2013. — 1176 p.
3. *Vijay K. Madisetti* The Digital signal processing Handbook. Digital signal processing fundamentals. — CRC Press, 2010. — 906 p.
4 *Fabing Duan, François Chapeau-Blondeau, Derek Abbott* Non-Gaussian noise benefits for coherent detection of narrowband weak signal // Physics Letters A 378. — 2014. — P. 1820—1824.
5. *Безрук В.М., Певцов Г.М.* Теоретические основы проектирования систем распознавания сигналов для автоматизированного радиоконтроля. — Харьков: Коллегиум, 2007. — 430 с.
6. *Малахов А.Н.* Кумулянтный анализ негауссовских процессов и их преобразований. — М.: Сов. радио, 1979. — 376 с.
7. *Kunchenko Y.* Polynomial Parameter Estimations of Close to Gaussian Random variables. — Shaker Verlag, 2002. — 396 p.
8. *Палагин В.В.* Моментный критерий качества проверки статистических гипотез для обработки сигналов на фоне коррелированных негауссовских помех // Системы обработки информации. — 2009. — Вып. 4 (78). — С. 96—101.
9. *Palahin V.V., Goncharov A.V., Filipov V.V.* Features of the constant signal parameter estimation by the method of truncated polynomial maximization // Oxford Journal of Scientific Research. — 2015. — IV, No 1. (9). — P. 170—177.
10. *Палагин В.В.* Программные средства компьютерного моделирования процессов обнаружения и различения сигналов на фоне негауссовских помех // Информатика и математические методы в моделировании. — 2015. — **5**, № 5. — С. 103—114.
11. *Кендалл М. , Стюарт А.* Статистические выводы и связи. — М. : Наука, 1973. — 900 с.

V.V. Palahin

CUMULANT MODELS AND POLYNOMIAL METHOD SIGNAL DETECTION
UNDER ADDITIVE INTERACTION WITH CORRELATED NON-GAUSSIAN NOISE

The models and methods of processing statistically dependent random variables for the synthesis and analysis of polynomial algorithms for signals detection on the background of correlated non-Gaussian noise under the moment-cumulant description of random processes are developed. It is shown that the nonlinear processing of sample values and account of the parameters of non-Gaussian distributions of statistically dependent random variables can improve the efficiency of polynomial decision rules that is a decrease of the probability of errors of the first and second kind, as compared with well-known results.

K e y w o r d s: stochastic polynomials, moment quality criteria, correlated non-Gaussian noise.

REFERENCES

1. Levin, B.R. (1989), *Teoreticheskie osnovy statisticheskoi radiotechniki* [Theoretical foundations of statistical radio engineering, 3rd ed., revised. and suppl.], Radio i svyaz, Moscow, Russia.
2. Van Trees, H.L. (2013), Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part IV,Optimum Array Processing, John Wiley & Sons, New York, USA.

3. Vijay K. Madisetti (2010), The Digital Signal Processing, Handbook, Digital Signal Processing Fundamentals, CRC Press, USA.
4. Duan, F., Chapeau-Blondeau, F. and Abbott, D. (2014), “Non-Gaussian noise benefits for coherent detection of narrowband weak signal”, *Physics Letters*, A 378, pp. 1820-1824.
5. Bezruk, V.M. and Pevtsov, G.M. (2007), *Teoreticheskie osnovy proektirovaniya sistem raspoznavaniya signalov dlya avtomatizirovannogo radiokontrolya* [Theoretical bases of designing the systems of signals identification for automated radio control], Kollegium, Kharkov, Ukraine.
6. Malakhov, A.N. (1979), *Kumulyantnyi analiz negaussovskikh protsessov i ikh preobrazovaniy* [Cumulant analysis of non-Gaussian processes and their transformation], Sovetskoe radio, Moscow, Russia.
7. Kunchenko, Y. (2002), Polynomial Parameter Estimations of Close to Gaussian Random Variables, Shaker Verlag, Herzogenrath, Germany.
8. Palahin, V.V. (2009), “Moment criterion of quality statistical hypothesis testing for processing signals on background of the correlated non-Gaussian noise”, *Sistemy obrabotki informatsii*, Vol. 78, Iss. 4, pp. 96-101.
9. Palahin, V.V., Goncharov, A.V. and Filipov, V.V. (2015), “Features of the constant signal parameter estimation by the method of truncated polynomial maximization”, *Oxford Journal of Scientific Research*, IV, Vol. 9, no.1, pp.170-177.
10. Palahin, V.V. (2015), “Software of computer simulation of detecting and distinguishing signals on the background of non-Gaussian noise”, *Informatika i matematicheskie metody v modelirovanii*, Vol. 5, no. 5, pp. 103-114.
11. Kendall, M. and Stewart, A. (1973), *Statisticheskie vyvody i svyazi* [Statistical inference and communication], Nauka, Moscow, Russia.

Поступила 18.05.15;
после доработки 23.09.15

ПАЛАГИН Владимир Васильевич, д-р техн. наук, зав. кафедрой радиотехники и информационно-телекоммуникационных систем Черкасского государственного технологического университета. В 1992 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — методы математического и компьютерного моделирования в задачах обработки сигналов и негауссовых процессов.