УДК 681.5.011

Ю.А. Клевцов, канд. техн. наук
(Украина, 03150, Киев,
тел. (044) 5290566, e-mail: kk123@ukr.net)

Структурные преобразования моделей систем с распределенными параметрами

На основании теории конечных интегральных преобразований рассмотрен класс моделей — передаточные функции трехмерных систем с распределенными параметрами. Решены некоторые задачи структурных преобразований. Приведены примеры моделирования последовательного и параллельного соединения двух звеньев.

На основі теорії скінченних інтегральних перетворювань розглянуто клас моделей — передавальні функції тривимірних систем з розподіленими параметрами. Розв'язано деякі задачі структурних перетворювань. Наведено приклади моделювання послідовного та паралельного з'єднань двох ланцюгів.

Ключевые слова: конечные интегральные преобразования, системы с распределенными параметрами, передаточная функция, структурный метод.

Структурный метод теории автоматического управления широко применяется для систем, динамика которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Применение интегрального преобразования Лапласа позволяет ввести понятие передаточной функции, которая устанавливает алгебраическую связь между входом и выходом системы. Однако применить его к системам с распределенными параметрами (СРП) удается лишь в простейших случаях. Поэтому в структурном методе для СРП [1] используется преобразование Лапласа только по временному аргументу (если это возможно).

Пространственные аргументы учитываются с помощью функции Грина, нахождение которой является непростой задачей, усложняющей структурный метод. В работе [2] описаны функции Грина типовых объектов. Однако структурная теория А.Г. Бутковского [1] не приводит к алгебраической связи между входом и выходом системы. Эта связь описывается интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода, что усложняет алгоритмизацию структурного метода.

Применение конечных интегральных преобразований позволяет алгебраически описать связь между входом и выходом системы. В работе [3] приведены собственные функции ядра конечного интегрального преобразования для различных дифференциальных операторов, однако в ней не отражено все многообразие дифференциальных операторов, каждый из которых имеет свое ядро интегрального преобразования. Это также затрудняет алгоритмизацию задач структурных преобразований СРП.

Построение структурного метода на основе спектральной теории нестационарных систем управления [4—6] устраняет указанные трудности, так как спектральная теория оперирует непосредственно с передаточными функциями, для вычисления которых используются стандартные алгоритмы операций с матрицами. Связь между входом и выходом системы в спектральной форме принимает алгебраическую форму.

Пространственный сигнал и распределенные звенья. Назовем пространственным сигналом, или полем, функцию $q(x, y, z, t)$, зависящую от пространственных аргументов $x, y, z \in D$ и от временного аргумента $t \in \Omega$, где D — прямоугольная область в евклидовом пространстве, Ω — область числовой оси $[t_0, T]$. Если пространственный сигнал не зависит от временного аргумента t, то такой сигнал называется стационарным пространственным сигналом. Пространственный сигнал (поле) $q(x, y, z, t)$, в зависимости от решаемых задач, принадлежит конкретному функциональному пространству, например пространству непрерывных функций, интегрируемых с квадратом.

В структурном методе для сосредоточенных систем основным является понятие звена, а для распределенных систем — понятие распределенного звена. В распределенном звене можно выделить вход и выход. На вход звена поступает пространственный сигнал $f(\xi, \eta, \lambda, \tau)$, а на выходе — создается пространственный сигнал $q(x, y, z, t)$, $(\xi, \eta, \lambda \in D, \tau \in \Omega)$, который может иметь другую размерность. Схематически такое распределенное звено представлено на рис. 1. Связь между входным $f(\xi, \eta, \lambda, \tau)$ и выходным $q(x, y, z, t)$ сигналами задается некоторым уравнением (граничная задача или интегральное уравнение) $l[q(x, y, z, t)] = f(\xi, \eta, \lambda, \tau)$, где l — линейный оператор. Следует заметить, что начальные и граничные функции преобразуются в эквивалентный входной сигнал [2, 7].

Существует такой линейный оператор l^{-1}, обратный оператору l, что

$$q(x, y, z, t) = l^{-1}[f(\xi, \eta, \lambda, \tau)] =$$
$$= \int_{t_0}^{T} \int_{D} G(x, \xi, y, \eta, z, \lambda, t, \tau) f(\xi, \eta, \lambda, \tau)\, d\xi d\eta d\lambda d\tau. \qquad (1)$$

Функция Грина G линейного оператора l однозначно описывает распределенное звено и связывает входной и выходной распределенные сигналы

 ISSN 0204–3572. Electronic Modeling. 2016. V. 38. № 1

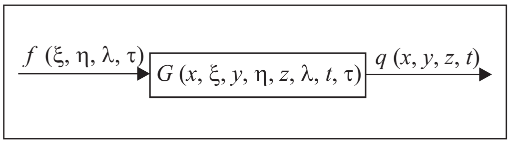

Рис. 1

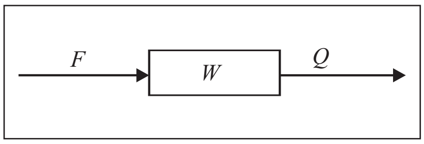

Рис. 2

(см. рис. 1), являясь функцией восьми аргументов (шести пространственных и двух временных).

Пусть имеется система ортонормированных, в общем случае комплексных, функций $\{\phi_{ijkh}(x, y, z, t)\}$ в пространстве L_2. Пространственные аргументы заданы на области D, а временной аргумент изменяется в пределах $[t_0, T]$. Система многомерных базисных функций может быть представлена в виде произведения систем одномерных базисных функций $\Phi_{ijkh}(x, y, z, t) = \varphi_i(x)\varphi_j(y)\varphi_k(z)\varphi_h(t)$, где $\{\varphi\}$ — система одномерных ортонормированных базисных функций.

Спектральная характеристика (СХ) входного распределенного сигнала $f(\xi, \eta, \lambda, \tau)$ определяется так:

$$F_{ijkh} = \int_D \int_{t_0}^{T} f(\xi, \eta, \lambda, \tau)\, \phi_{ijkh}(\xi, \eta, \lambda, \tau)\, d\xi d\eta d\lambda d\tau.$$

Формула обращения имеет вид

$$f(\xi, \eta, \lambda, \tau) = \sum_{ijkh} F_{ijkh} \phi_{ijkh}(\xi, \eta, \lambda, \tau). \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и находя СХ левой и правой частей формулы (1) относительно системы функций $\{\phi_{ijkh}(x, y, z, t)\}$, получаем $Q_{\alpha\beta\gamma\mu} = \sum_{ijkh} W_{i\alpha j\beta k\gamma h\mu} F_{ijkh}$, или в матричной форме $Q = WF$, где $Q_{\alpha\beta\gamma\mu}$ — СХ выходного распределенного сигнала, $Q_{\alpha\beta\gamma\mu} = \int_{t_0}^{T} \int_D \Phi_{\alpha\beta\gamma\mu}(x, y, z, t) q(x, y, z, t)\, dxdydzdt$; W — СХ функции Грина G,

$$W_{i\alpha j\beta k\gamma h\mu} = \int_D \int_{t_0}^{T} \int_D \int_{t_0}^{T} G(x, \xi, y, \eta, z, \lambda, t, \tau)\, \phi_{\alpha\beta\gamma\mu}(x, y, z, t) \times$$

$$\times \phi_{ijkh}(\xi, \eta, \lambda, \tau)\, dx d\xi dy d\eta dz d\lambda dt d\tau.$$

Таким образом, СХ W связывает СХ входного F и выходного Q пространственных сигналов (рис. 2). Поэтому назовем W передаточной функ-

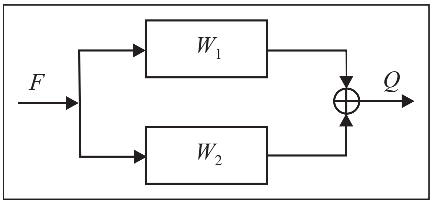

Рис. 3

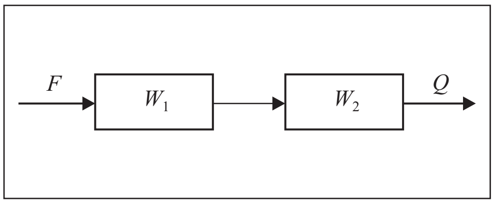

Рис. 4

цией распределенного звена, так как она однозначно определяет распределенное звено.

Передаточная функция W трехмерной системы с распределенными параметрами представляет собой пространственную матрицу или тензор. Элементы пространственной матрицы зависят от восьми дискретных аргументов: i, j, k, h, α, β, γ, μ. Такую пространственную матрицу удобно представить в виде прямого (кронекерового) произведения прямоугольных матриц [6]. В этом случае матрица W записывается как прямоугольная, а матрицы F, Q — в виде одномерных матриц. Для упрощения будем использовать матричную форму записи, опуская индексы при СХ.

Рассмотрим элементарные соединения распределенных звеньев.

Параллельное соединение. Пусть два распределенных звена соединены параллельно (рис. 3). При этом пространственные входные и выходные сигналы определены на одном и том же множестве аргументов. Тогда функция Грина параллельного соединения определяется по формуле [1] $G = G_1 + G_2$, которой в спектральной области соответствует формула

$$W = W_1 + W_2. \tag{3}$$

Следовательно, параллельное соединение распределенных звеньев можно представить в виде суммы передаточных функций звеньев. Если параллельно соединено n звеньев, то передаточная функция такого соединения определяется по формуле $W = \sum_{i=1}^{n} W_i$.

Последовательное соединение. Пусть два распределенных звена соединены последовательно (рис. 4). Область определения выходного пространственного сигнала распределенного звена W_1 совпадает с областью определения входного пространственного сигнала распределенного звена W_2. Функция Грина последовательного соединения звеньев определяется по формуле

$$G(x,\xi,y,\eta,z,\lambda,t,\tau) = \int_{t_0}^{t}\int_{D} G_2(x,x_1,y,y_1,z,z_1,t,t_1)\times$$

$$\times G_1(x_1,\xi,y_1,\eta,z_1,\lambda,t_1,\tau)\,dx_1dy_1dz_1dt_1. \tag{4}$$

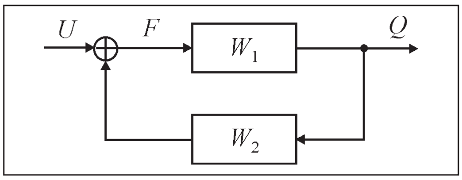

Рис. 5

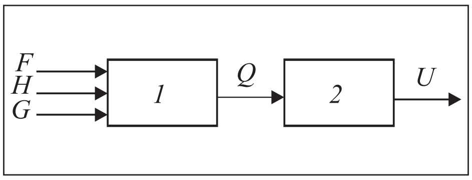

Рис. 6

Интегральному соотношению (4) в спектральной форме соответствует формула

$$W = W_2 W_1. \tag{5}$$

Следует заметить, что последовательное соединение распределенных звеньев не коммутативно. Если последовательно соединено n звеньев, то такое соединение описывается формулой $W = \prod_{i=n}^{1} W_i$. Однако при последовательном соединении необходимо учитывать, что в каждой паре двух соседних звеньев область определения выходного пространственного сигнала предыдущего звена должна совпадать с областью определения входного пространственного сигнала последующего распределенного звена.

Таким образом, последовательному соединению распределенных звеньев в спектральной форме соответствует умножение передаточных функций распределенных звеньев в обратном порядке по отношению к порядку следования звеньев в схеме соединения.

Соединение с обратной связью. Схема соединения распределенных звеньев с обратной связью представлена на рис. 5, где U и Q — спектральные характеристики входного и выходного пространственных сигналов. Звено с передаточной функцией W_1 находится в канале прямой связи, а звено с передаточной функцией W_2 — в канале обратной связи. В результате алгебраических преобразований при условии, что операция обращения осуществима, передаточная функция такого соединения описывается формулой $W = (E + W_1 W_2)^{-1} W_1$, или $W = W_1 (E + W_2 W_1)^{-1}$, где E — единичная матрица.

Рассмотрим два примера структурных преобразований систем с распределенными параметрами.

Пример 1. ***Последовательное соединение.*** Будем рассматривать два двумерных модельных объекта: *1* и *2*. Выходное поле первого объекта является входным полем второго объекта. Таким образом, два объекта соединены последовательно (рис. 6). Аналогично могут быть рассмотрены и трехмерные объекты с распределенными параметрами (ОРП).

Пусть объект *1* описывается модельным уравнением

$$\frac{\partial q}{\partial t}-0{,}5\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}\right)+q=f(x,y,t),\ 0\le x,y\le 1,\ t\ge 0,\ q=q(x,y,t),$$

$$f(x,y,t)=-e^{-1}(x^2+y^2). \tag{6}$$

Зададим начальные, $q(x,y,0)=q_0(x,y)=x^2y^2$, и граничные,

$$\frac{\partial q(0,y,t)}{\partial x}=g_1(y,t)=0,\quad \frac{\partial q(1,y,t)}{\partial x}=g_2(y,t)=2e^{-t}y^2,$$
$$\frac{\partial q(x,0,t)}{\partial y}=g_3(x,t)=0,\quad \frac{\partial q(x,1,t)}{\partial y}=g_4(x,t)=2e^{-t}x^2,$$

условия второго рода.

Объект *2* описывается модельным уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y}\right)=q(x,y,t),\ 0\le x,y\le 1,\ t\ge 0,\ u=u(x,y,t). \tag{7}$$

Задаем начальные, $u(x,y,t)=0$, и граничные, $u(0,y,t)=u(1,y,t)=0$, $u(x,0,t)=u(x,1,t)=0$, условия первого рода. Существует взаимосвязь между дифференциальным уравнением в частных производных объекта и его передаточной функцией W. Эта взаимосвязь устанавливается с использованием правил преобразования (трансформации) в спектральную область. Для записи модельных уравнений (6) и (7) в спектральной области необходимо воспользоваться следующими правилами [6].

Частная производная функции трех аргументов $q(x,y,t)$ по временному аргументу в спектральной области определяется по формуле

$$\frac{\partial q(x,y,t)}{\partial t}\Rightarrow(E\otimes E\otimes P)\,Q-Q_0\Delta_t(0)\,, \tag{8}$$

где $\otimes$ — символ прямого произведения матриц; P — матрица СХ оператора дифференцирования [4]; Q — СХ функции $q(x,y,t)$; $\Delta_t(0)$ — СХ дельта-функции в точке 0 [4]; Q_0 — СХ начальных условий функции $q_0(x,y)$.

Частная производная функции трех аргументов $q(x,y,t)$ по пространственным аргументам с учетом нулевых граничных условий первого рода определяется по правилам

$$\frac{\partial^2 q(x,y,t)}{\partial x^2}\Rightarrow(\mathsf{P}R\otimes E\otimes E)\,Q, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 q(x,y,t)}{\partial y^2} \Rightarrow (E \otimes \mathrm{P} R \otimes E) Q, \tag{10}$$

где P — СХ оператора дифференцирования, не учитывающая граничных условий [4]; R — СХ оператора дифференцирования, учитывающая граничные условия [6]. Если заданы граничные условия второго рода, то получаем

$$\frac{\partial^2 q(x,y,t)}{\partial x^2} \Rightarrow (R\mathrm{P} \otimes E \otimes E) Q - [\Delta_x(0) G_1 - \Delta_x(1) G_2], \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 q(x,y,t)}{\partial y^2} \Rightarrow (E \otimes R\mathrm{P} \otimes E) Q - [\Delta_y(0) G_3 - \Delta_y(1) G_4], \tag{12}$$

где $\Delta_x(0)$, $\Delta_x(1)$, $\Delta_y(0)$, $\Delta_y(1)$ — СХ дельта-функций в точках 0 и 1; G_1, G_2, G_3, G_4 — СХ соответствующих граничных условий. Для учета граничных условий используется различный порядок перемножения матриц R, P: для граничных условий первого рода — произведение матриц СХ $\mathrm{P}R$, для граничных условий второго рода — произведение матриц СХ $R\mathrm{P}$.

Используя правила (8)—(12), уравнения (6), (7), записанные в пространственно-временной области, запишем в спектральной области.

Для объекта *1*:

$$(E \otimes E \otimes P) Q - 0{,}5(\mathrm{P}R \otimes E \otimes E + E \otimes \mathrm{P}R \otimes E) Q + (E \otimes E \otimes E) Q = F + H - G,$$

где F — СХ функции $f(x, y, t)$; $H = Q_0 \Delta_t(0)$; $G = \Delta_x(1) G_2 + \Delta_y(1) G_4$. Отсюда $Q = W_1(F + H - G)$, где

$$W_1 = [E \otimes E \otimes P - 0{,}5(\mathrm{P}R \otimes E \otimes E + E \otimes \mathrm{P}R \otimes E) + E \otimes E \otimes E]^{-1}. \tag{13}$$

Для объекта *2*:

$$(E \otimes E \otimes P) U - (R\mathrm{P} \otimes E \otimes E) U - (E \otimes R\mathrm{P} \otimes E) U = Q \tag{14}$$

и заданы нулевые начальные и граничные условия. Из (14) находим $U = W_2 Q$, где

$$W_2 = (E \otimes E \otimes P - R\mathrm{P} \otimes E \otimes E - E \otimes R\mathrm{P} \otimes E)^{-1}. \tag{15}$$

Связь между входом объекта *1* и выходом объекта *2* на основании (5) определяется формулой

$$U = W(F + H - G), \tag{16}$$

где $W = W_2 W_1$.

Пример 2. ***Параллельное соединение.*** Рассмотрим два модельных объекта, *3* и *4*, соединенных паралельно (как показано на рис. 3).

Объект *3* описывается модельным уравнением

$$\frac{\partial q_3}{\partial t}-\frac{\partial^2 q_3}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 q_3}{\partial y^2}+q_1=2\pi^2 e^{-t}\sin(\pi x)\sin(\pi y),$$

$$0\le x,y\le 1,\quad t\ge 0,\quad q_3=q_3(x,y,t).$$

Задано начальное условие $q_3(x,y,0)=q_{30}(x,y)=\sin(\pi x)\sin(\pi y)$ и граничное условие первого рода $g_{31}(0,y,t)=g_{32}(1,y,t)=g_{33}(x,0,t)=g_{34}(x,1,t)=0$.

Объект *4* описывается модельным уравнением

$$\frac{\partial q_4}{\partial t}-\frac{\partial^2 q_4}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 q_4}{\partial y^2}=2\pi^2 e^{-t}\sin(\pi x)\sin(\pi y),$$

$$0\le x,y\le 1,\quad t\ge 0,\quad q_4=q_4(x,y,t).$$

Задано начальное условие $q_4(x,y,0)=q_{40}(x,y)=\sin(\pi x)\sin(\pi y)$ и граничное условие первого рода $g_{41}(0,y,t)=g_{42}(1,y,t)=g_{43}(x,0,t)=g_{44}(x,1,t)=0$.

Модели объектов представим в спектральной области. Используя правила (8)—(10) для объекта *3*, запишем

$$(E\otimes E\otimes P)\,Q_3-(\mathsf{P}R\otimes E\otimes E)\,Q_3-(E\otimes \mathsf{P}R\otimes E)\,Q_3+(E\otimes E\otimes E)\,Q_3=F+H,$$

где Q_3 — СХ функции $q_3(x,y,t)$; F — СХ функции $2\pi^2 e^{-t}\sin(\pi x)\sin(\pi y)$; H — СХ начальных условий. Отсюда $Q_3=W_3(F+H)$, где

$$W_3=(E\otimes E\otimes P-\mathsf{P}R\otimes E\otimes E-E\otimes \mathsf{P}R\otimes E+E\otimes E\otimes E)^{-1}. \qquad (17)$$

Для объекта *4* , используя правила (8)—(10), запишем

$$(E\otimes E\otimes P)\,Q_4-(\mathsf{P}R\otimes E\otimes E)Q_4-(E\otimes \mathsf{P}R\otimes E)\,Q_4=F+H,$$

где Q_4 — СХ функции $q_4(x,y,t)$. Отсюда $Q_4=W_4(F+H)$, где

$$W_4=(E\otimes E\otimes P-\mathsf{P}R\otimes E\otimes E-E\otimes \mathsf{P}R\otimes E)^{-1}. \qquad (18)$$

На основании (3) связь между входом $F+H$ и выходом $Q=Q_3+Q_4$ определяется по формуле

$$Q=(W_3+W_4)(F+H). \qquad (19)$$

Результаты моделирования. Моделирование последовательного соединения ОРП проведено по формулам (13), (15), (16). Матрицы P, R, P вычислены по формулам [4, 6]

$$P_{ij} = \int_0^1 \varphi_i^*(t) \frac{d\varphi_j(t)}{dt} dt + \varphi_i^*(0)\varphi_j(0), \quad \mathsf{P}_{ij} = \int_0^1 \varphi_i^*(x) \frac{d\varphi_j(x)}{dx} dx,$$

$$R_{ij} = \mathsf{P}_{ij} + \varphi_i^*(0)\varphi_j(0) - \varphi_i^*(1)\varphi_j(1),$$

где $\{\varphi(t)\}$ и $\{\varphi(x)\}$ — системы ортонормированных на интервале [0, 1] базисных функций, в качестве которых использованы полиномы Лежандра. Матрицы P, R, P размера 6×6 имеют следующие численные значения:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1{,}73 & 2{,}24 & 2{,}65 & 3 & 3{,}32 \\ -1{,}73 & 3 & 3{,}87 & 4{,}58 & 5{,}2 & 5{,}74 \\ 2{,}24 & -3{,}87 & 5 & 5{,}92 & 6{,}71 & 7{,}42 \\ -2{,}65 & 4{,}58 & -5{,}92 & 7 & 7{,}94 & 8{,}77 \\ 3 & -5{,}2 & 6{,}71 & -7{,}94 & 9 & 9{,}95 \\ -3{,}31 & 5{,}74 & -7{,}42 & 8{,}77 & -9{,}95 & 11 \end{bmatrix},$$

$$\mathsf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 3{,}46 & 0 & 5{,}29 & 0 & 6{,}63 \\ 0 & 0 & 7{,}75 & 0 & 10{,}39 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11{,}83 & 0 & 14{,}83 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15{,}87 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19{,}9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3{,}46 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7{,}75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5{,}29 & 0 & -11{,}83 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10{,}39 & 0 & -15{,}87 & 0 & 0 \\ -6{,}63 & 0 & -14{,}83 & 0 & -19{,}9 & 0 \end{bmatrix}.$$

Обратное преобразование СХ в пространственно-временную область выполнено по формуле

$$u(x, y, t) = \sum_i \sum_j \sum_k U_{ijk} \varphi_i(x) \varphi_j(y) \varphi_k(t).$$

t	x	y	Эталон	u	t	x	y	Эталон	u
0,25	0,25	0	0	0	0,75	0,25	0	0	0
0,25	0,25	0,25	0,001	0,001	0,75	0,25	0,25	0,003	0,003
0,25	0,25	0,5	0,004	0,004	0,75	0,25	0,5	0,01	0,01
0,25	0.25	0,75	0,008	0,008	0,75	0,25	0,75	0,21	0,021
0,25	0.25	1	0	0	0,75	0,25	1	0	0
0,25	0,5	0	0	0	0,75	0,5	0	0	0
0,25	0,5	0,25	0,004	0,004	0,75	0,5	0,25	0,01	0,01
0,25	0,5	0,5	0,014	0,014	0,75	0,5	0,5	0,035	0,035
0,25	0,5	0,75	0,032	0,031	0,75	0,5	0,75	0,076	0,076
0,25	0,5	1	0	–0,001	0,75	0,5	1	0	–0,001
0,25	0,75	0	0	0	0,75	0,75	0	0	0
0,25	0,75	0,25	0,008	0,008	0,75	0,75	0,25	0,021	0,021
0,25	0,75	0,5	0,032	0,031	0,75	0,75	0,5	0,076	0,076
0,25	0,75	0,75	0,071	0,07	0,75	0,75	0,75	0,165	0,165
0,25	0,75	1	0	–0,001	0,75	0,75	1	0	-0,002
0,5	0,25	0	0	0	1	0,25	0	0	0
0,5	0,25	0,25	0,002	0,002	1	0,25	0,25	0,003	0,003
0,5	0,25	0,5	0,007	0,007	1	0,25	0,5	0,012	0,012
0,5	0,25	0,75	0,015	0,015	1	0,25	0,75	0,025	0,025
0,5	0,25	1	0	0	1	0,25	1	0	0
0,5	0,5	0	0	0	1	0,5	0	0	0
0,5	0,5	0,25	0,007	0,007	1	0,5	0,25	0,012	0,012
0,5	0,5	0,5	0,026	0,026	1	0,5	0,5	0,043	0,043
0,5	0,5	0,75	0,057	0,057	1	0,5	0,75	0,09	0,09
0,5	0,5	1	0	–0,001	1	0,5	1	0	0
0,5	0,75	0	0	0	1	0,75	0	0	0
0,5	0,75	0,25	0,015	0,015	1	0,75	0,25	0,025	0,025
0,5	0,75	0,5	0,057	0,057	1	0,75	0,5	0,09	0,09
0,5	0,75	0,75	0,126	0,126	1	0,75	0,75	0,188	0,189
0,5	0,75	1	0	–0,003	1	0,75	1	0	–0,001

Результаты моделирования для размерности СХ, равной 10, приведены в таблице, где также указаны результаты эталонного решения. Для объекта *1* при $f(x, y, t) = -e^{-t}(x^2 + y^2)$ решение имеет вид $q_1 = e^{-t}x^2y^2$ и является входом объекта *2*. Выход объекта *2* (эталонное решение) получено численным интегрированием функции Грина объекта *2* и q_1 [2]. Результаты эталонного решения и решения спектральным методом практически совпадают, что подтверждает правильность применения структурных преобразований.

Моделирование параллельного соединения ОРП проведено по формулам (17)—(19). В качестве базисных функций использованы ортонормированные на интервале [0, 1] полиномы Лежандра. Для объекта *3* при $f(x, y, t) = 2\pi^2 e^{-t}\sin(\pi x)\sin(\pi y)$ решение имеет вид $q_3 = -e^{-t}\sin(\pi x)\sin(\pi y)$. Выход объекта *4* получен с использованием функции Грина. Поскольку результаты решения спектральным методом для размерности СХ, равной 10, и эталонного решения практически совпадают, эти решения не приведены.

Выводы

Структурный метод дает наглядное представление о сложной взаимосвязи в ОРП, для описания которой используются дифференциальные уравнения в частных производных с коэффициентами, зависящими как от времени, так и от пространственных переменных.

Метод позволяет единым способом определить передаточную функцию, устанавливающую связь между входом и выходом всей системы, если известна ее структурная схема и передаточные функции всех звеньев.

Переход в спектральную область позволяет заменить операции интегрирования и дифференцирования алгебраическими операциями над матрицами СХ, что упрощает решение прямых и обратных задач управления ОРП.

Поскольку при численных расчетах выполняются операции над квадратными матрицами, метод удобен в программировании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутковский А.Г.* Структурная теория распределенных систем. — М. : Наука, 1977. — 320 с.
2. *Бутковский А.Г.* Характеристики систем с распределенными параметрами. — М. : Наука, 1979. — 224 с.
3. *Мартыненко Н.А., Пустыльников Л.М.* Конечные интегральные преобразования и их применение к исследованию систем с распределенными параметрами. Спр. пос. — М. : Наука, 1985. — 304 с.
4. *Солодовников В.В., Семенов В.В.* Спектральная теория нестационарных систем управления. — М. : Наука, 1974. — 335 с.

5. *Краскевич В.Е., Клевцов Ю.А.* Спектральный метод в задаче структурных преобразований объектов с распределенными параметрами // Изв. ВУЗов. Приборостроение. — 1985. — Вып. 6(28). — С. 9—13.
6. *Клевцов Ю.А*. Спектральное описание объектов с распределенными параметрами // Электрон. моделирование. — 1988. — **10**, № 3. — С. 27—31.
7. *Рапопорт Э.Я.* Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. — М. : Высш. шк., 2003. — 299 с.

Yu.A. Klevtsov

STRUCTURAL TRANSFORMATIONS
OF SYSTEMS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS

A class of models – transfer functions of three-dimensional systems with distributed parameters – has been considered on the basis of the theory of finite integrated transformations. The tasks of structural transformations have been solved. Examples of modeling the series and parallel connection of the two units are given.

K e y w o r d s: finite integral transformations, systems with distributed parameters, transfer function, structural method.

REFERENCES

1. Butkovskiy, A.G. (1977), *Strukturnaya teoriya raspredelennykh system* [Structural theory of distributed systems], Nauka, Moscow, Russia.
2. Butkovskiy, A.G. (1979), *Kharakteristiki sistem s raspredelennymi parametrami* [Characteristics of distributed parameter systems], Nauka, Moscow, Russia.
3. Martynenko, N.A. and Pustylnikov, L.M. (1985), *Konechnyie integralnyie preobrazovaniya i ikh primenenie k issledovaniyu sistem s raspredelennymi parametrami. Spravochnoe posobie* [Finite integral transformations and their application to the study of the systems with distributed parameters. Reference Handbook], Nauka, Moscow, Russia.
4. Solodovnikov, V.V. and Semenov, V.V. (1974), *Spektralnaya teoriya nestatsionarnykh sistem upravleniya* [The spectral theory of non-stationary control systems], Nauka, Moscow, Russia.
5. Kraskevitch, V.Ye. and Klevtsov, Yu.A. (1985), "Spectral method in the problems of structural transformations of the objects with distributed parameters", *Izvestiya VUZov. Priborostroenie*, Vol. 28, no. 6, pp. 9-13.
6. Klevtsov, Yu.A. (1988), "Spectral description of the objects with distributed parameters", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 10, no. 3, pp. 27-31.
7. Rapoport, E.Ya. (2003), *Strukturnoe modelirovanie obektov i sistem upravleniya s raspredelennymi parametrami* [Structural modeling of the objects and control systems with distributed parameters], Vysshaya shkola, Moscow, Russia.

Поступила 24.06.15;
после доработки 26.11.15

КЛЕВЦОВ Юрий Алексеевич, канд. техн. наук. В 1973 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — объекты с распределенными параметрами, спектральная теория нестационарных систем управления, задачи моделирования и идентификации.