УДК 004.942

А.В. Маевский,
Житомирский национальный агроэкологический университет
(Украина, 10008, Житомир, Старый бульвар, 7,
e-mail: AlexBEL740@gmail.com)

Решение задачи идентификации рабочих параметров математической модели процесса динамики экологических систем

Обоснована необходимость замены функции Ферхюльста, входящей в состав математических моделей естественных систем взаимодействия «хищник — жертва», функцией, являющейся решением нелинейного дифференциального уравнения первого порядка, формирующего обобщенную модель эволюции естественных систем.

Обґрунтовано необхідність заміни функції Ферхюльста, яка входить до складу математичних моделей природних систем взаємодії «хижак — жертва», функцією, яка є розв'язком нелінійного диференціального рівняння першого порядку, котре формує узагальнену модель еволюції природних систем.

К л ю ч е в ы е с л о в а: функция Ферхюльста, обобщенная модель эволюции естественных систем, дифференциальные уравнения, идентификация рабочих параметров.

При моделировании процессов динамики в экосистемах [1] значительное распространение получила функция Ферхюльста [2, 3], являющаяся решением известного нелинейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \varphi x(t) - a_0 x^2(t). \tag{1}$$

Известно, что при исследовании процессов динамики с помощью функции Ферхюльста и систем дифференциальных уравнений на основе этой функции присутствуют непрогнозируемые изменения в динамике процессов, которые могут быть достаточно значительными и приводить к недостоверным результатам моделирования. Это объясняется недостатками функции Ферхюльста, так как при ее создании считались стабильными условия развития экосистем и не учитывались позитивные и негативные факторы влияния внешней среды. Для учета этих факторов будем использовать обобщенную модель эволюции систем [4, 5]:

$$(1+a_1 x(t))\frac{dx(t)}{dt}=\varphi x(t)-a_0 x^2(t), \tag{2}$$

где x — число элементов экосистемы; φ — потенциал экспоненциального роста; a_1, a_0 — параметры, сдерживающие экспоненциальное развитие экосистемы.

Решение задачи идентификации математических моделей (1) и (2) позволило описать процессы динамики экосистем с учетом влияния внешней среды для взаимодействия «хищник — жертва» с эффектом диффузии [6, 7] и без него.

Постановка задачи. Пусть закон распределения статистических данных о численности хищника и жертвы в процессе динамики экосистемы является нормальным. При исследовании процесса динамики экосистемы для взаимодействия хищник — жертва вместо функции Ферхюльста (1) будем использовать обобщенную модель эволюции систем (2), что должно обеспечить более высокую точность прогнозирования численности особей хищника и жертвы в динамическом процессе и распределения плотности особей на единицу площади. Решение задачи идентификации параметров математической модели взаимодействия хищник — жертва сформируем на основании обобщенной модели эволюции систем (2).

Задача идентификации параметров математических моделей относится к объекту системного характера с малым объемом достоверных исходных данных о его внутренних свойствах и структурных особенностях.

Известная математическая модель хищник — жертва [6], предназначенная для определения числа особей хищника и жертвы, представлена в виде системы двух нелинейных дифференциальных уравнений,

$$\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}+a_0x^2-\varphi x=-\gamma z,\\&\frac{dz}{dt}+b_0z^2-\psi x=\gamma x,\end{aligned} \tag{3}$$

где не учитывается эффект диффузии. С учетом (2) дифференциальные уравнения (3) преобразуются в систему

$$\begin{aligned}&(1+a_1x)\frac{dx}{dt}+a_0x^2-\varphi x=-\gamma z,\\&(1+b_1x)\frac{dz}{dt}+b_0z^2-\psi x=\gamma x,\end{aligned} \tag{4}$$

где x и z — число элементов взаимодействующих естественных систем; φ и ψ — потенциалы экспоненциального роста; a_1, b_1, a_0, b_0 — параметры, сдерживающие экспоненциальное развитие естественных систем, в которых также не учтен эффект диффузии.

Математическая модель взаимодействующих естественных систем, учитывающая эффект диффузии [3, 7], предназначенная для определения числа особей хищника и жертвы на единице площади, представлена системой дифференциальных уравнений параболического типа с частными производными

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= (\alpha - cz)\,x + D_x \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= (-\beta + \gamma x)\,z + D_z \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}, \end{aligned} \tag{5}$$

где t — время; η — пространственная координата; $x(t, \eta)$ и $z(t, \eta)$ — плотность элементов взаимодействующих систем на единицу площади (1 км^2);

Таблица 1. **Рабочие параметры математических моделей (1), (2) процесса динамики экосистемы на территории Украины**

Математическая модель	a_1	φ	a_0
Обобщенная модель эволюции систем	$-2{,}578 \cdot 10^{-5} \pm 2{,}874 \cdot 10^{-6}$	$2{,}5 \cdot 10^{-2} \pm 1{,}96 \cdot 10^{-1}$	$5{,}88 \cdot 10^{-7} \pm 4{,}582 \cdot 10^{-6}$
Функция Ферхюльста	0	$2{,}505 \pm 19{,}008$	$6{,}42 \cdot 10^{-5} \pm 4{,}334 \cdot 10^{-4}$

Таблица 2. **Рабочие параметры математических моделей (3), (4)**

Модель	φ	γ	ψ	a_0	b_0	a_1	b_1
(3)	$5{,}43 \cdot 10^{-1} \pm$ $\pm 2{,}785$	$6{,}893 \pm$ $\pm 21{,}537$	$-96{,}335 \pm$ $\pm 321{,}671$	$3{,}173 \cdot 10^{-6} \pm$ $\pm 2{,}55 \cdot 10^{-5}$	$-6{,}64 \cdot 10^{-6} \pm$ $\pm 2{,}1 \cdot 10^{-2}$	0	0
(4)	$-8{,}8 \cdot 10^{-2} \pm$ $\pm 0{,}482$	$-0{,}262 \pm$ $\pm 3{,}712$	$-0{,}546 \pm$ $\pm 81{,}337$	$-8{,}70 \cdot 10^{-7} \pm$ $\pm 9{,}864 \cdot 10^{-6}$	$-7{,}44 \cdot 10^{-4} \pm$ $\pm 6{,}568 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}53 \cdot 10^{-5} \pm$ $\pm 6{,}318 \cdot 10^{-6}$	$-1{,}287 \cdot 10^{-3} \pm$ $\pm 3{,}169 \cdot 10^{-3}$

Таблица 3. **Рабочие параметры математических моделей (5), (6)**

Модель	α	β	γ	c	D_x	D_z	a_1	b_1
(5)	$3{,}411 \pm$ $\pm 148{,}004$	$0{,}077 \pm$ $\pm 1{,}499$	$0{,}029 \pm$ $\pm 0{,}501$	$3{,}411 \pm$ $\pm 148{,}004$	$161{,}001 \pm$ $\pm 711{,}352$	$131{,}168 \pm$ $\pm 506{,}301$	0	0
(6)	$0{,}655 \pm$ $\pm 29{,}519$	$1{,}095 \cdot 10^{-3} \pm$ $\pm 0{,}048$	$9{,}237 \cdot 10^{-4} \pm$ $\pm 0{,}015$	$1{,}246 \pm$ $\pm 60{,}993$	$24{,}324 \pm$ $\pm 676{,}456$	$0{,}482 \pm$ $\pm 62{,}83$	$-0{,}275 \pm$ $\pm 0{,}541$	$-2{,}059 \pm$ $\pm 0{,}542$

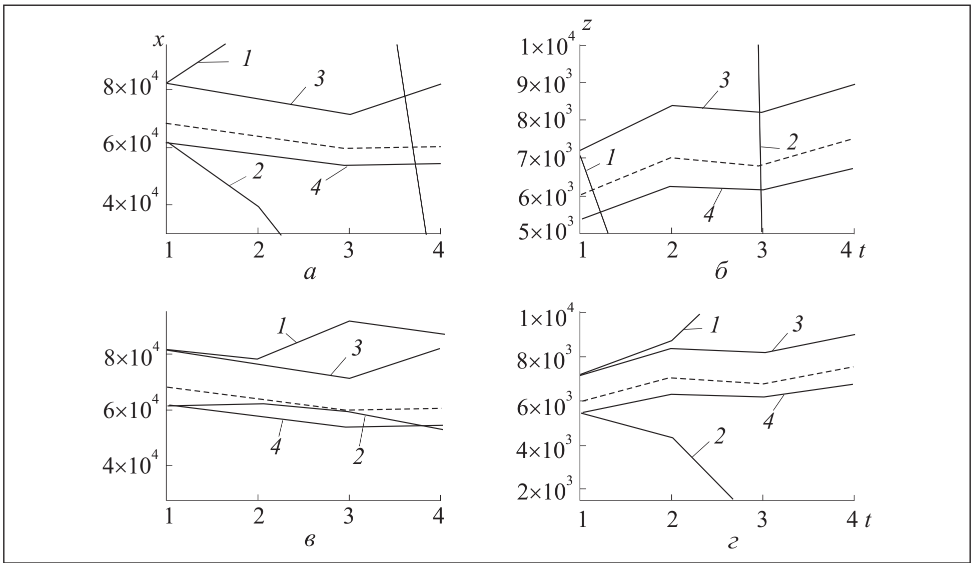

Рис. 1. Динамика изменения численности хищника и жертвы согласно математическим моделям (3) (*а*, *б*) и (4) (*в*, *г*): *а*, *в* — жертва; *б*, *г* — хищник; *1*, *2* — границы результатов моделирования; *3*, *4* — допустимые границы статистических данных

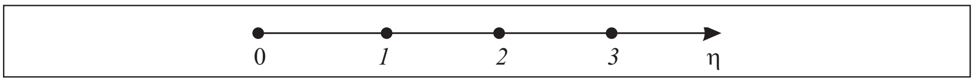

Рис. 2. Направление η исследования с контрольными точками и шагом 20 км

α, c, β, γ — коэффициенты влияния на экспонентный рост процесса динамики естественных систем; D_x, D_z — коэффициенты, характеризующие хаотическое движение составляющих элементов этих систем в пространстве (в рассматриваемом случае одномерное пространство).

На основании обобщенной модели эволюции систем (2) и уравнений (5) получаем математическую модель взаимодействия хищник — жертва, учитывающую как эффект диффузии, так и влияние внешней среды:

$$(1+a_1 x)\frac{\partial x}{\partial t}=(\alpha-cz)\,x+D_x\frac{\partial^2 x}{\partial\eta^2},$$
$$(1+b_1 z)\frac{\partial z}{\partial t}=(-\beta+\gamma x)\,z+D_z\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}, \tag{6}$$

где a_1, b_1 — параметры, учитывающие влияние внешней среды.

Задачи идентификации рабочих параметров математических моделей динамики естественных систем (1)—(6) решены на примере динамики

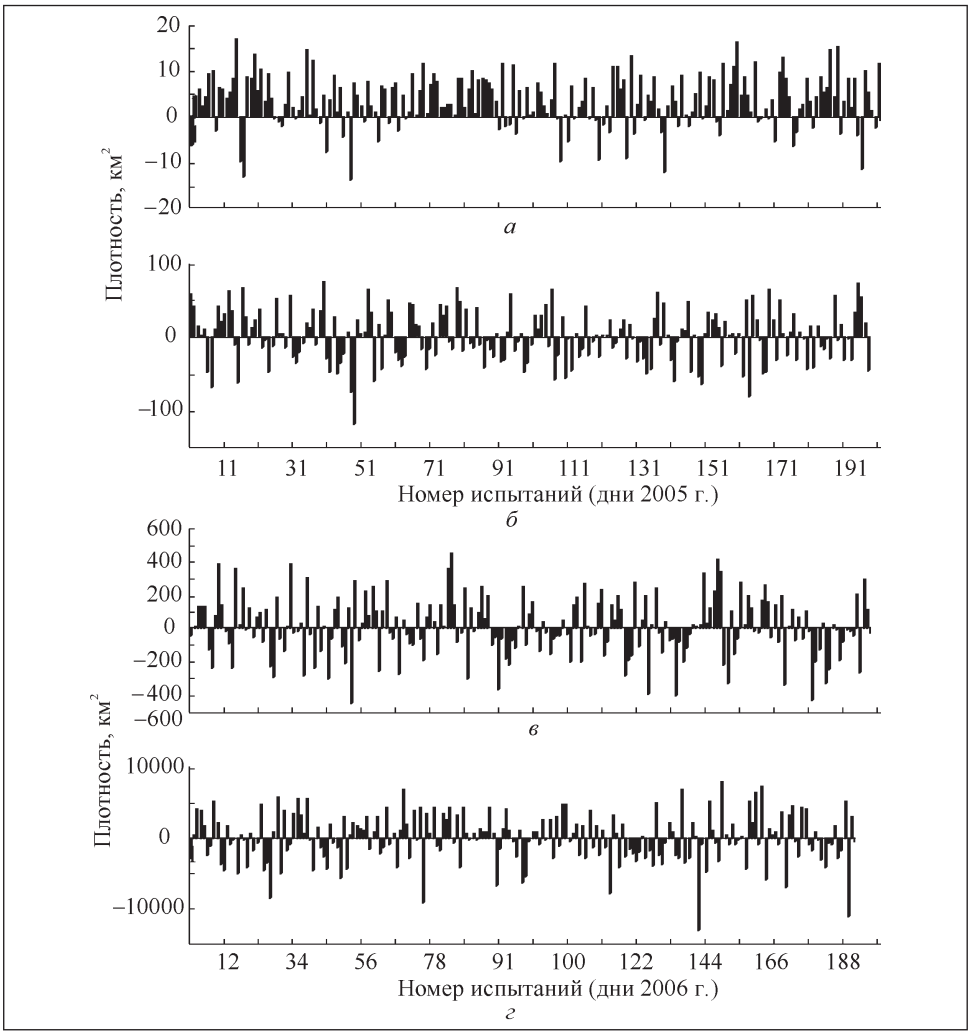

Рис. 3. Распределение плотности жертвы, полученное с помощью (5), в контрольных точках *1* (*а*) и *2* (*б*) в 2005 г. и в контрольных точках *1* (*в*) и *2* (*г*) в 2006 г.

Таблица 4. **Вероятности *P* границ плотности жертвы *X* и хищника *Z* в контрольных точках *1* и *2* (см. рис. 2)**

Математическая модель	Плотность	2005 г.				2006 г.			
		1		*2*		*1*		*2*	
		шт/км^2	*P*	шт/км^2	*P*	шт/км^2	*P*	шт/км^2	*P*
(5)	*X*	< 8	>0,49	< 8	0	< 8	0	< 8	0
	Z	< 0,75	>0,9	< 0,75	0	< 0,75	>0,88	< 0,75	0
(6)	*X*	< 8	>0,58	< 8	>0,49	< 8	0	< 8	0
	Z	< 0,75	>0,93	< 0,75	>0,97	< 0,75	>0,88	< 0,75	>0,6

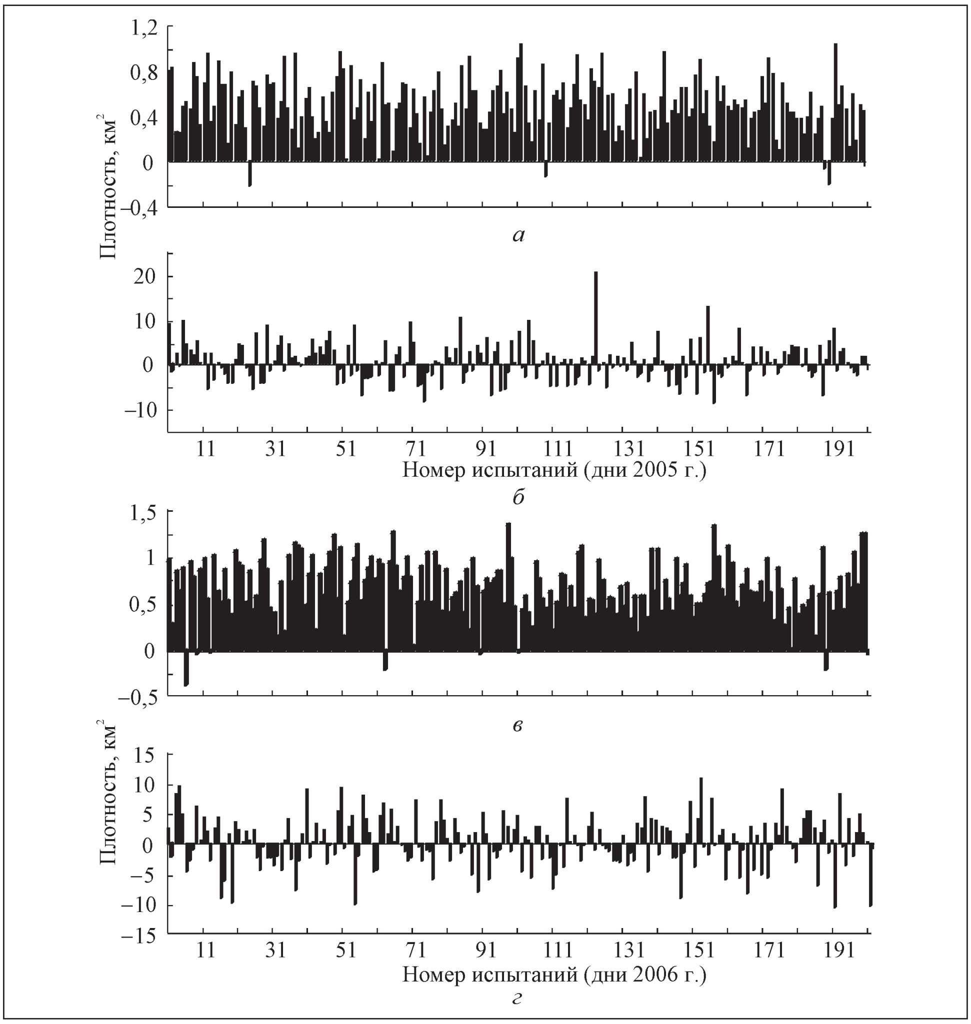

Рис. 4. Распределение плотности хищника, полученное с помощью (5), в контрольных точках *1* (*а*) и *2* (*б*) в 2005 г. и в точках *1* (*в*) и *2* (*г*) в 2006 г.

численности популяций некоторых видов животных с использованием существующих статистических данных с допустимыми границами отклонений.

Решение осуществлялось посредством формирования векторов случайных статистических данных из установленного диапазона. Получены векторы рабочих параметров и выполнено вычисление соответствующих средних значений и стандартных отклонений. Для реализации предложенного решения использован программный пакет Mathcad 15.0.

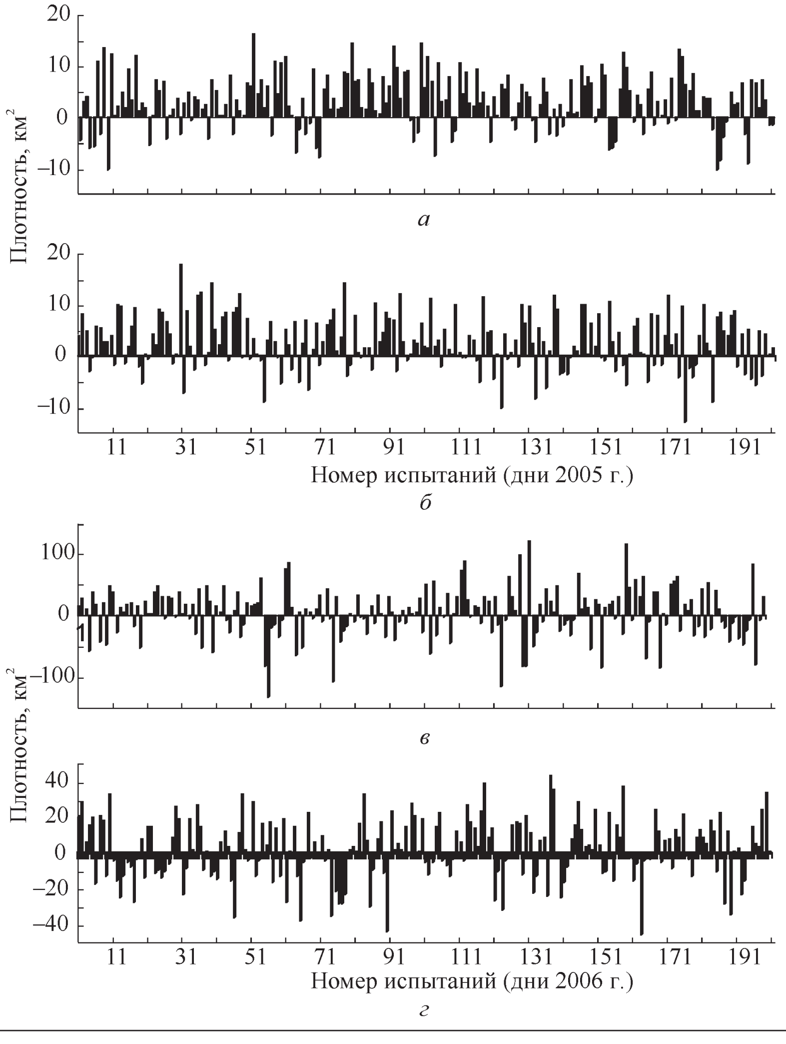

Рис. 5. Распределение плотности жертв, полученное с помощью (6), в контрольных точках *1* (*а*) и *2* (*б*) в 2005 г. и в контрольных точках *1* (*в*) и *2* (*г*) в 2006 г.

В табл. 1 приведены результаты решения задачи идентификации рабочих параметров математических моделей (1) и (2) процесса динамики экосистемы на примере популяции кабана на территории Украины. Полученные результаты позволяют решать задачу Коши с частичной неопределенностью в начальных условиях для систем дифференциальных уравнений, представляющих математические модели на основе функции Ферхюльста и обобщенной модели эволюции систем. Значения параметров идентификации математической модели взаимодействия хищник — жертва для

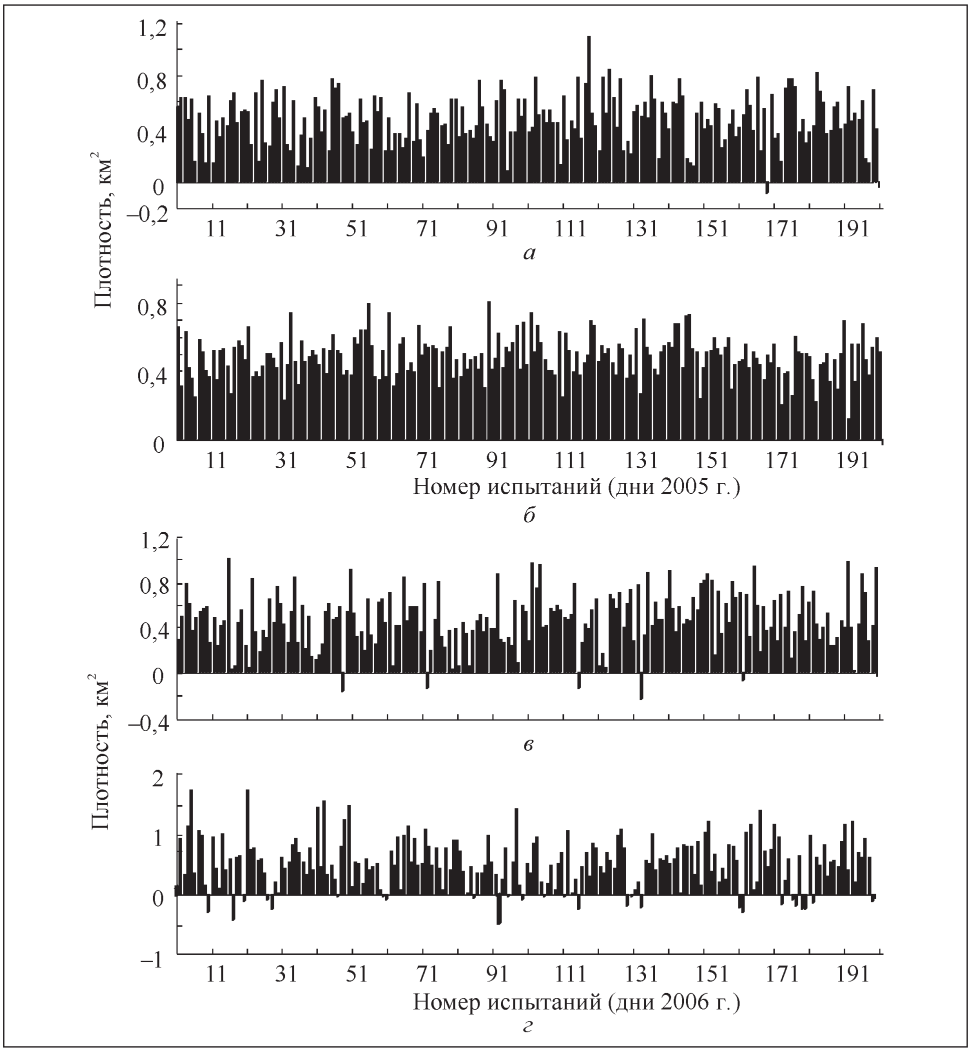

Рис. 6. Распределение плотности хищника, полученное с помощью (6), в контрольных точках *1* (*а*) и *2* (*б*) в 2005 г. и в контрольных точках *1* (*в*) и *2* (*г*) в 2006 г.

пары лиса — заяц на примере данных по Житомирской области с использованием математических моделей (3) и (4) приведены в табл. 2.

Решение задачи Коши с частичной неопределенностью в начальных условиях для математической модели (3) естественных систем хищник — жертва, построенной на основе функции Ферхюльста, представлено на рис. 1, *а*, *б*, а на рис. 1 *в*, *г*, представлено решение задачи Коши с частичной неопределенностью в начальных условиях для обобщенной математической модели (4) естественных систем типа хищник — жертва.

Для математических моделей (5) и (6) рабочие параметры идентификации приведены в табл. 3. По результатам моделирования установлено распределение плотности хищника (лиса) и жертвы (заяц) на единицу площади (1 км^2) с шагом 20 км, в течение года в точках *1* и *2* (для одномерного пространства) (рис. 2). С учетом известных краевых условий плотность хищника составляет 0,0—3,0 элементов на 1 км^2, средние значения — 0,25—0,75 элементов на 1 км^2; плотность жертвы — 0,0—6,0 элементов на 1км^2, средние значения —1,0—5,0 элементов на 1 км^2 (Житомирская область).

Результаты моделирования с использованием математической модели (5) для точек *1* и *2* (см. рис. 2) для жертвы и хищника в 2005 и 2006 гг. представлены на рис. 3 и 4.

Результаты моделирования, полученные с использованием математической модели (6), для точек *1* и *2* (см. рис. 2) в 2005 и 2006 гг. для плотности жертвы и хищника представлены на рис. 5 и 6.

Значения вероятностей границ плотности жертвы (< 8 шт/км^2) и хищника (< 0,75 шт/км^2) представлены в табл. 4.

Полученные результаты моделирования с использованием математических моделей (5) и (6) свидетельствуют о том, что модель (6) более эффективна, так как учитывает влияние внешней среды и позволяет повысить точность моделирования плотностей хищника и жертвы на единицу площади.

Выводы

При исследовании взаимодействия хищник — жертва замена функции Ферхюльста на обобщенную модель эволюции систем обеспечивает более высокую точность прогнозирования численности особей хищника и жертвы в динамическом процессе распределения плотности особей на единицу площади.

Сравнение результатов моделирования численности жертв и хищника с помощью математических моделей (3) и (4) позволяет сделать вывод о целесообразности применения модели (4) для изучения процесса динамики в экологических системах хищник — жертва. Математическая модель (3) при прогнозировании динамики численности жертв и хищника сроком на один год с погрешностью в статистических данных +20 — –10% дает среднюю относительную погрешность результатов моделирования 25% для численности жертв. Для численности хищника, результаты моделирования не адекватны (потеря допустимых границ статистических данных с первого шага прогнозирования). Математическая модель (4) при прогнозировании динамики численности жертв и хищника сроком на один год при погрешности в статистических данных +20 — –10 % обеспечивает среднюю относительную погрешность результатов моделирования 5,8 % для численности жертв и 15 % для численности хищника.

Математическая модель (5) позволяет получить распределение плотности жертв со средней относительной погрешностью 26,17 % и распределение плотности хищника со средней относительной погрешностью 1,6 % в контрольных точках с шагом 20 км при диапазоне статистических данных плотности жертв 3 ± 2 шт/км^2 и 0,5 ± 0,25 шт/км^2 для плотности хищника. Кроме того, с использованием математической модели (5) получены значительные величины дисперсий плотности хищника и жертвы и, как следствие, существует вероятность больших отклонений от средних значений плотности. В связи с этим очевидно преимущество математической модели (6), которая обеспечивает уменьшение дисперсии значений распределения плотности хищника и жертвы, а также позволяет прогнозировать распределение плотности хищника и жертвы в текущем году в контрольных точках с шагом 20 км в выбранном направлении со средней относительной погрешностью 14,93 % для жертв и 1,5 % для хищника.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бигон М., Харпер Дж., Таунсенд К.* Экология: особи, популяции и сообщества. В 2-х томах. Т. 1. Пер. с англ. под. ред. А.М. Гилярова. — М. : Мир, 1989. — 667 с.
2. *Пількевич І.А.* Моделювання і прогнозування динаміки чисельності мисливських тварин . — Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І.Франка, 2012. — 128 с.
3. *Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б.* Математические модели биологических продукционных процессов. — М. : Изд-во МГУ, 1993. — 302 с.
4. *Грабар І.Г.,Тимонін Ю.О. , Бродський Ю.Б.* Універсальна модель системи: методологічний аспект // Віс. ЖНАЕУ : науково-теор. зб. — 2009. — № 1. — С. 358—366.
5. *Тимонін Ю.О.* Принципи енергетичної взаємодії систем // Вісн. ЖІТІ. — 1999. — № 9. — С. 150—155.
6. *Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б.* Биофизическая динамика продукционных процессов. Серия «Математическая биология, биофизика». — Ижевск : Ин-т компьютерных исследований, 2004. — 464 с.
7. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. — М. : Наука, 1966. — 724 с.

A.V. Mayevskyi

SOLVING THE PROBLEM OF OPERATING VARIABLES IDENTIFICATION IN THE MODELS OF NATURAL SYSTEM DYNAMICS

A necessity is substantiated to replace the logistic function in the mathematical models of «predator-prey» natural systems with the function suggested as a solution for the first-order non-linear differential equation that builds a generalized model of natural system evolution.

K e y w o r d s: logistic function, generalized model of natural system evolution, differential equation, operating variables identification.

REFERENCES

1. Bigon, M., Harper, J. and Townsend, C. (1989), *Ekologiya*: *osobi*, *populyatsii i soobschestva* [Ecology: individuals, populations and communities], in 2 vol., Vol. 1., Translated by Gilyarov, A.M., Mir, Moscow, Russia.
2. Pilkevych, I.A. (2012), *Modelyuvannya i prognozuvannya dynamiki chiselnosti myslyvskykh tvaryn* [Modeling and prediction of game population number dynamics], ZhDU im. I. Franko, Zhytomyr, Ukraine.
3. Riznichenko, G.Yu. and Rubin, A.B. (1993), *Matematicheskie modeli biologicheskikh produktsionnykh protsessov* [Mathematical models of biologic production processes], MGU, Moscow, Russia.
4. Grabar, I.G., Timonin, Yu.A. and Brodsky, Yu.B. (2009), “Universal model systems: methodological aspect”, *Visnyk ZhNAEU: Naukovo-teoret. zb*., no. 1, pp. 358-366.
5. Timonin, Yu.O. (1999), “Principles of energy interaction systems”, *Visnyk ZhITI*, no. 9, pp. 150-155.
6. Riznichenko, G.Yu. and Rubin, A.B. (2004), *Biofizicheskaya dinamika produktsionnykh protsesov. Seriya: Matematicheskaya biologiya, biofizika* [Biophysical dynamics of production processes. Series: Mathematical biology, biophysics], Izhevsk Institute for Computer Studies, Izhevsk, Russia.
7. Tikhonov, A.N. and Samarskiy, A.A. (1966), *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics], Nauka, Moscow, Russia.

Поступила 23.02.16

МАЕВСКИЙ Александр Владимирович, ассистент кафедры компьютерных технологий и моделирования систем Житомирского национального агроэкологического университета. В 1999 г. окончил Харьковский аэрокосмический университет (ХАИ). Область научных исследований — математическое моделирование естественных систем, моделирование процессов стохастической природы.