УДК 004.94

Я.А. Калиновский [1], д-р техн. наук, **Ю.Е. Бояринова** [1,2], канд. техн. наук
[1] Ин-т проблем регистрации информации НАН Украины
(Украина, 03113, Киев, ул. Н.Шпака, 2, e-mail: kalinovsky@i.ua),
[2] Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический ин-т»
(Украина, 03113, Киев, пр-т Победы, 37, e-mail: ub@ua.fm)

Экспериментальная оценка уменьшения объема вычислений при использовании представлений гиперкомплексных нелинейностей

Представлены результаты вычислительного эксперимента по уменьшению объема вычислений при использовании представлений гиперкомплексных нелинейностей (экспонента, тригонометрические и гиперболические функции) по сравнению с их вычислением непосредственно по формулам.

Подано результати обчислювального експерименту по зменьшенню об'єму обчислень при використанні представлень гіперкомплексних нелінійностей (експонента, тригонометричні та гіперболічні функції) в порівнянні з їх обчисленням безпосередньо по формулам.

К л ю ч е в ы е с л о в а: гиперкомплексная числовая система, экспоненциальная функция, тригонометрическая функция, гиперболическая функция, объем вычислений.

В связи с расширением области применения гиперкомплексных числовых систем (ГЧС) требуется совершенствование методов вычислений при их использовании. Вычисление значений таких нелинейностей как экспонента, тригонометрические и гиперболические функции при построении математических моделей различных процессов в области ГЧС может представлять серьезные трудности. Как показали результаты исследований [1, 2], одним из эффективных методов сокращения объемов вычислений является использование вместо формул для непосредственного определения указанных функций их представлений.

В работе [3] предложено определять некоторые трансцендентные функции от гиперкомплексных переменных как суммы степенных рядов подобно функциям от вещественного переменного. В соответствии с этим определения экспоненты, тригонометрических и гиперболических функций в ГЧС представим в следующем виде.

1. Экспонента —

$$\exp(M)=\sum_{S=0}^{\infty}\frac{M^S}{S!}. \tag{1}$$

2. Тригонометрические синус и косинус —

$$\sin(M)=\sum_{S=0}^{\infty}(-1)^S\frac{M^{2S+1}}{(2S+1)!},\quad \cos(M)=\sum_{S=0}^{\infty}(-1)^S\frac{M^{2S}}{(2S)!}. \tag{2}$$

3. Гиперболические синус и косинус —

$$\mathrm{sh}(M)=\sum_{S=0}^{\infty}\frac{M^{2S+1}}{(2S+1)!},\ \mathrm{ch}(M)=\sum_{S=0}^{\infty}(-1)^S\frac{M^{2S}}{(2S)!}. \tag{3}$$

В формулах (1) — (3) M — гиперкомплексное число, принадлежащее некоторой ГЧС Γ размерности n с базисом $e_1,...,e_n$,

$$M=\sum_{i=1}^{n}m_i e_i.$$

Предполагаем, что по определению $M^0=\varepsilon$, где ε — единичный элемент гиперкомплексной системы Γ. Вычисления сумм бесконечных сходящихся рядов громоздки и малопригодны для аналитических построений. Поэтому используем представления этих рядов в виде гиперкомплексных функций.

Гиперкомплексной функцией $F(X)$ от гиперкомплексного аргумента

$$X=\sum_{i=1}^{n}x_i e_i\in\Gamma$$

называют функцию вида

$$F(X)=\sum_{i=1}^{n}f_i(x_1,x_2,...,x_n)\,e_i,$$

где $f_i(x_1,x_2,...,x_n)$, $i=1,...,n$, — вещественные функции от n вещественных аргументов, для вычисления значений которых существуют эффективные алгоритмы. Примером такого представления является формула Эйлера $\exp(x+iy)=e^x(\cos x+i\sin y)$. Результаты исследований построения представлений функций от кватернионов различными методами описаны в работах [4—10].

В работах [11, 12] построены представления логарифмической, тригонометрических и гиперболических функций в коммутативных ГЧС третьей и четвертой размерностей посредством преобразования степенного ряда с использованием различных искусственных приемов.

В [1, 2] предложен универсальный метод построения представлений экспонент, тригонометрических и гиперболических функций от гиперкомплексных переменных для коммутативных и некоммутативных ГЧС конечных размерностей. Попытаемся показать эффективность использования представлений нелинейных функций в ГЧС по количеству необходимых вычислений.

Методика исследования. Для проведения экспериментального исследования было отобрано 12 ГЧС размерности два, три и четыре [1, 2]. Названия, обозначения и таблицы Кели этих ГЧС здесь не приводятся. Приведем только примеры представлений нелинейностей в некоторых ГЧС.

1. Представление экспоненты в системе дуальных чисел D размерности два, таблица Кели которой имеет вид

	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2
e_2	e_2	0

$$\exp(M) = e^{m_1}(e_1 + m_2 e_2).$$

2. Представление тригонометрического синуса в системе триплексных чисел Люша T размерности три, таблица Кели которой имеет вид

	e_1	e_2	e_2
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	$(e_3 - e_1)/2$	$-e_2$
e_3	e_3	$-e_2$	e_1

$$\sin(M) = \frac{1}{2}(\sin(m_1 + m_3) + \sin(m_1 - m_3)\operatorname{ch} m_2)\, e_1 +$$

$$+ \cos(m_1 - m_3)\operatorname{sh} m_2 e_2 + \frac{1}{2}(\sin(m_1 + m_3) - \sin(m_1 - m_3)\operatorname{ch} m_2)\, e_3.$$

3. Представление гиперболического косинуса в ГЧС Γ_{46} размерности четыре, таблица Кели которой имеет вид

	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	e_4	e_4	0
e_3	e_3	e_4	0	0
e_4	e_4	0	0	0

$$\operatorname{ch}(M) = \operatorname{ch} m_1 e_1 + m_2 \operatorname{sh} m_1 e_2 + \left(m_3 \operatorname{sh} m_1 + \frac{1}{2} m_2^2 \operatorname{ch} m_1 \right) e_3 +$$

$$+ \left(m_4 \operatorname{sh} m_1 + m_2 m_3 \operatorname{ch} m_1 + \frac{1}{6} m_2^3 \operatorname{sh} m_1 \right) e_4.$$

Для каждой из выбранных ГЧС было определено время вычисления значения экспоненты и одной из тригонометрических или гиперболических функций двумя способами: с помощью степенных рядов и с помощью представлений этих функций для одного и того же гиперкомплексного аргумента. Вычисления выполнялись в среде Maple.

Maple — это пакет для аналитических вычислений, содержащий несколько тысяч команд, которые позволяют решать задачи алгебры, геометрии, математического анализа, статистики, математической физики. Основные объекты пакета — формулы, состоящие из математических символов, и выполняемые над ними действия. Это означает, что пользователь может вводить выражения в традиционной математической, т.е. символьной форме.

Ядро системы Maple написано на языке C и реализует язык Maple. Основная часть функциональности системы реализована в десятках различных библиотек, большинство из которых написано на языке Maple. Символьные выражения хранятся в памяти в виде ориентированного ациклического графа. Стандартный интерфейс реализован на языке Java, при этом существуют возможности его расширения.

Для построения моделей с использованием гиперкомплексного представления данных разработан пакет процедур, обеспечивающих выполнение символьных и численных операций в ГЧС [13]. Использование символьных выражений в Maple позволяет создавать более компактные и эффективные алгоритмы для работы с гиперкомплексными числами.

В пакете процедур используется гиперкомплексное представление чисел и представление таблицы умножения гиперкомплексной числовой системы в общем виде. Так, основные процедуры библиотеки могут быть использованы для ГЧС любых размерностей. Вычисления могут проводиться как в символьном, так и в численном виде, в зависимости от вида заданных коэффициентов.

Пример программы для определения времени вычисления тригонометрического синуса в системе квадриплексных чисел K двумя способами:

```
1. restart;
2. read(“D:\\Triplex\\HNS_lib.m”);
3. T1:=HNS_lib[Tabl_4order](1,15);
```

$$\text{The\_table\_}N = 15\begin{bmatrix} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \\ E_2 & -E_1 & E_4 & -E_3 \\ E_3 & E_4 & -E_1 & -E_2 \\ E_4 & -E_3 & -E_2 & E_1 \end{bmatrix}$$

4. A:=a[1]*E[1]+a[2]*E[2]+a[3]*E[3]+a[4]*E[4];

$$A := a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3 + a_4 E_4$$

5. f1:=(1/2)*((-sin(a[1]-a[4])*cosh(a[2]+a[3])+sin(a[1]+a[4])*cosh(-a[3]+a[2]))*E[1]+ +((cos(a[1]-a[4])*sinh(a[2]+a[3])+cos(a[1]+a[4])*sinh(-a[3]+a[2]))*E[2]+((cos(a[1]- -a[4])*sinh(a[2]+a[3])-cos(a[1]+a[4])*sinh(-a[3]+a[2]))*E[3]-((sin(a[1]-a[4])*cosh(a[2]+ +a[3])+sin(a[1]+a[4])*cosh(-a[3]+a[2])))*E[4])));

$$f1 := \frac{1}{2}(\sin(-a_1 + a_4)\cosh(a_2 + a_3) + \sin(a_1 + a_4)\cosh(a_3 - a_2))\, E_1 +$$

$$+ \frac{1}{2}(\cos(-a_1 + a_4)\sinh(a_2 + a_3) - \cos(a_1 + a_4)\sinh(a_3 - a_2))\, E_2 +$$

$$+ \frac{1}{2}(\cos(-a_1 + a_4)\sinh(a_2 + a_3) + \cos(a_1 + a_4)\sinh(a_3 - a_2))\, E_3 -$$

$$+ \frac{1}{2}(-\sin(-a_1 + a_4)\cosh(a_2 + a_3) + \sin(a_1 + a_4)\cosh(a_3 - a_2))\, E_4$$

6. a[1]:=1.;a[2]:=1.;a[3]:=1;a[4]:=1.;

$$a_1 := 1.\ a_2 := 1.\ a_3 := 1.\ a_4 := 1.$$

$$a_1 := 1.$$

7. A;

$$1.\, E_1 + 1.\, E_2 + E_3 + 1.\, E_4$$

8. for k from 1 to 10000 do f[1]; end do: f[1];

$$0.4546487134\, E_1 + 1.813430204\, E_2 + 1.813430204\, E_3 - 0.4546487134\, E_4$$

9. for m from 1 to 1000 do sum1:=A; mul1:=A; A2:=HNS_lib[Mult](A,A,T1);
for k from 1 to 10 do mul1:=(HNS_lib[Mult](mul1,A2,T1))/((2*k)*(2*k+1)); sum1:=sum1+mul1*(-1)^k;   end do: end do:sum1;

$$0.4546487136\, E_1 + 1.813430203\, E_2 + 1.813430203\, E_3 + 0.4546487136\, E_4\ .$$

В строке оператора 2 осуществляется вызов пакета процедур для выполнения символьных и численных операций в ГЧС, имя которого — HNS_lib.m, а в строке оператора 3 вызывается таблица Кели для квадриплексных чисел — HNS_lib[Tabl_4order](1,15).

В строке оператора 4 определяется вид квадриплексного числа в символьной форме, а в строке оператора 6 ему присваивается конкретное значение, $A = E_1 + E_2 + E_3 + E_4$, тригонометрический синус которого будет вычисляться.

В строке оператора 5 вводится формула представления тригонометрического синуса в системе квадриплексных чисел K.

ГЧС			Время вычисления		$t_р / t_ф$
Номер	Имя	Размерность	по представлениям, $t_ф$, с	с помощью суммы ряда, $t_р$, с	
1	C	2	$\frac{7{,}1\cdot 10^{-5}}{8{,}1\cdot 10^{-5}}$	$\frac{6{,}0\cdot 10^{-3}}{4{,}0\cdot 10^{-3}}$	$\frac{84}{50}$
2	D	2	$\frac{3{,}3\cdot 10^{-5}}{4{,}7\cdot 10^{-5}}$	$\frac{4{,}0\cdot 10^{-3}}{3{,}0\cdot 10^{-3}}$	$\frac{121}{64}$
3	W	2	$\frac{7{,}1\cdot 10^{-5}}{4{,}8\cdot 10^{-5}}$	$\frac{5{,}0\cdot 10^{-3}}{3{,}0\cdot 10^{-3}}$	$\frac{70}{62}$
4	Γ_{31}	3	$\frac{3{,}8\cdot 10^{-5}}{6{,}6\cdot 10^{-5}}$	$\frac{8{,}0\cdot 10^{-3}}{5{,}0\cdot 10^{-3}}$	$\frac{210}{76}$
5	Γ_{32}	3	$\frac{5{,}5\cdot 10^{-5}}{10{,}0\cdot 10^{-5}}$	$\frac{10{,}0\cdot 10^{-3}}{6{,}0\cdot 10^{-3}}$	$\frac{181}{60}$
6	Γ_{33}	3	$\frac{21{,}5\cdot 10^{-5}}{40{,}9\cdot 10^{-5}}$	$\frac{14{,}0\cdot 10^{-3}}{10{,}1\cdot 10^{-3}}$	$\frac{65}{25}$
7	Γ_{41}	4	$\frac{16{,}5\cdot 10^{-5}}{24{,}0\cdot 10^{-5}}$	$\frac{24{,}0\cdot 10^{-3}}{10{,}1\cdot 10^{-3}}$	$\frac{84}{42}$
8	Γ_{42}	4	$\frac{4{,}0\cdot 10^{-5}}{9{,}4\cdot 10^{-5}}$	$\frac{15{,}0\cdot 10^{-3}}{9{,}1\cdot 10^{-3}}$	$\frac{145}{97}$
9	Γ_{43}	4	$\frac{6{,}1\cdot 10^{-5}}{12{,}4\cdot 10^{-5}}$	$\frac{18{,}0\cdot 10^{-3}}{11{,}1\cdot 10^{-3}}$	$\frac{300}{90}$
10	Γ_{44}	4	$\frac{7{,}0\cdot 10^{-5}}{9{,}5\cdot 10^{-5}}$	$\frac{16{,}0\cdot 10^{-3}}{7{,}5\cdot 10^{-3}}$	$\frac{228}{79}$
11	Γ_{46}	4	$\frac{7{,}9\cdot 10^{-5}}{12{,}5\cdot 10^{-5}}$	$\frac{19{,}0\cdot 10^{-3}}{10{,}2\cdot 10^{-3}}$	$\frac{240}{82}$
12	K	4	$\frac{36{,}0\cdot 10^{-5}}{35{,}0\cdot 10^{-5}}$	$\frac{18{,}5\cdot 10^{-3}}{13{,}7\cdot 10^{-3}}$	$\frac{51}{39}$

Примечание: над чертой — время вычисления экспоненты, под чертой — время вычисления тригонометрических и гиперболических функций; значение $t_р/t_ф$ — приблизительное.

В строке оператора 8 в цикле длиной 10 000 вычисляется значение тригонометрического синуса A по формуле представления. Длина цикла определяется так, чтобы суммарное время работы цикла было удобным для фиксации. Система Maple удобна тем, что в ней предусмотрено автоматическое определение времени работы операторов, расположенных в одной секции. Делением этого времени на длину цикла определяется среднее время вычисления тригонометрического синуса по формуле представления, а также результат вычисления.

В строке оператора 9 в цикле длиной 1000 вычисляется значение тригонометрического синуса A по сумме степенного ряда. Длина внутреннего цикла — это количество вычисляемых членов степенного ряда, определяемое экспериментально так, чтобы точности вычислений в обоих случаях совпадали. В этом операторе дважды используется одна из процедур пакета HNS_lib.m — процедура HNS_lib[Mult](A,A,T1) умножения двух квадриплексных чисел, A и A, в соответствии с таблицей Кели $T1$. Время вычисления определяется так же, как и для оператора 8, а результаты вычислений совпадают.

Результаты вычислительного эксперимента, представленные в таблице, получены с помощью программного обеспечения, разработанного в системе символьного вычисления MAPLE (компьютер Pentium IV, 2,8 ГГц). Для сравнения в таблице приведено время вычисления экспоненты, а также тригонометрических и гиперболических функций с помощью формул представлений $t_{\text{ф}}$ и с помощью вычисления суммы ряда $t_{\text{р}}$ для различных ГЧС. Как видно из таблицы, время вычисления нелинейностей от гиперкомплексного аргумента при использовании формул представления сокращается в 25—300 раз по сравнению с использованием степенных рядов.

При вычислении с использованием степенных рядов в программе вычислений ряд операторов был оптимизирован. Например, в операторе 9 члены ряда вычисляются рекуррентно:

$$R_k = R_{k-1} \frac{A^2}{2k\,(2k+1)}\,. \tag{4}$$

Вычисление по формуле (4) является более эффективным, чем полное вычисление члена ряда. В то же время, при вычислении по формуле представления такая оптимизация не выполняется. Так, в операторе 8 вычисления тригонометрических и гиперболических функций от одного и того же вещественного аргумента повторяются. Если избежать повторения посредством промежуточного запоминания, то ускорение вычислений увеличится.

Выводы

Полученные результаты вычислительного эксперимента позволяют сделать вывод о том, что использование представлений нелинейностей при математическом моделировании с применением гиперкомплексных чисел позволяет существенно сократить время вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Синьков М.В., Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е.* Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения.— Киев: Ин-т проблем регистрации информации НАН Украины, 2010. — 389 с.
2. *Каліновський Я.О.* Методи комп'ютерного моделювання та обчислень з використанням гіперкомплексних числових систем: Дис. … д-ра техн. наук Ін-т пробл. реєстрації інформації НАН України. — Київ, 2007. — 417 с.
3. *Hamilton W.R.* Researches respecting Quaternions: First Series // Transactions of the Royal Irish Academy. — 1848. — Vol. 21, part 1. — P. 199—296.
4. *Kahler U.* Die Anwendung der hyperkomplexen Funktionentheorie auf die Losung partieller Differentialgleichungen. — [Электронный ресурс]. — Режим доступа: www.tu-chemnitz. de /mathematik/ prom_habil/promint.pdf (1998).
5. *Brackx F.* The Exponential Function of a Quaternion Variable // Applicable Analysis. — 1979. — Vol. 8. — P. 265—276.
6. *Scheicher K., Tichy R.F., Tomantschger K.W.* Elementary Inequalities in Hypercomplex Numbers // Anzeiger. — 1997. — Abt. II, №134. — P. 3—10.
7. *Holin H.* The Quaternionic Exponential and beyond. — [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://www.bigfoot.com/ ~Hubert.Holin.
8. *Eberly D.* Quaternion Algebra and Calculus. — [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://www.magic-software. com (1999).
9. *Klingener F.* Summary of Dual and Quaternion Mathematics for Kinematics. — [Электронный ресурс]. — Режим доступа: www.BrockEng.com/VMech/Quaternions/kinemath. pdf. — P. 23 (2001).
10. *Ude A.* Filtering in a Unit Quaternion Space for Model-Based Object Tracking.— [Электронный ресурс]. — Режим доступа: www.cns.atr.jp/~aude/ publications /ras99.pdf.
11. *Liefke H.* Quaternion Calculus for Modeling Rotations in 3D Space. — [Электронный ресурс]. — Режим доступа: www.liefke.com/ hartmut (1998).
12. *Olariu S.* Complex Numbers in Three Dimensions. — [Электронный ресурс]. — Режим доступа: arXiv: math. CV/0008119 v1 16 Aug (2000).
13. *Olariu S.* Commutative Complex Numbers in Four Dimensions. — [Электронный ресурс]. — Режим доступа: arXiv: math. CV/0008119 v1 16 Aug (2000).
14. *Сіньков М.В., Бояріновa Ю.Є., Каліновський Я.О. та ін.* Алгоритмічно-програмний інструментарій аналітичних обчислень над гіперкомплексними числами в системі комп'ютерної математики MAPLE // Реєстрація, зберігання і обробка даних. — 2005. — **7**, № 2. — С. 18—24.

J.A.Kalinovsky, Y.E.Boyarinova

EXPERIMENTAL EVALUATION OF REDUCING THE AMOUNT OF CALCULATIONS USING REPRESENTATIONS OF HYPERCOMPLEX NONLINEARITIES

The results of computation experiment have been presented on reducing the amount of computations using representations of hypercomplex nonlinearities, such as exponential curve, trigonometric and hyperbolic functions, as compared to their direct calculation.

K e y w o r d s: hypercomplex number system, the exponential function, trigonometric function, hyperbolic function, the amount of computation.

REFERENCES

1. Sinkov, M.V., Boyarinova, J.E. and Kalinovsky, J.A. (2010), *Konechnomernye giperkompleksnye chislovye sistemy. Osnovy teorii. Primeneniya.* [Finite-dimensional hypercomplex number systems. Fundamentals of the theory. Applications], IPRI, Kyiv, Ukraine.
2. Kalinovsky, J.A. (2007), "Development of methods of HNS theory for mathematical modeling and computer calculations", Dr Sci. (Tech.) dissertation, Institute for Information Recording of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine.
3. Hamilton, W.R. (1848), "Researches respecting quaternions: First series", *Transactions of the Royal Irish Academy*, Vol. 21, part1, pp.199-296.
4. Kähler, U. (1998), "Die Anwendung der hyperkomplexen Funktionentheorie auf die Losung partieller Differentialgleichungen", available at: www.tu-chemnitz.de /mathematik/prom_habil/promint.pdf
5. Brackx, F. (1979), "The exponential function of a quaternion variable", *Applicable Analysis*, Vol. 8, pp. 265-276.
6. Scheicher, K., Tichy, R.F. and Tomantschger, K.W. (1997), "Elementary Inequalities in hypercomplex numbers", *Anzeiger*, Vol. II, no. 134, pp. 3-10.
7. Holin, H. "The quaternionic exponential and beyond", available at: http://www.bigfoot.com/ ~Hubert.Holin.
8. Eberly, D. (1999), "Quaternion algebra and calculus", available at: http://www.magic-software. com
9. Klingener, F. (2001), "Summary of dual and quaternion mathematics for kinematics", available at: www.BrockEng.com/VMech /Quaternions/ kinemath.pdf.
10. Ude, A. "Filtering in a unit quaternion space for model-based object tracking", available at: www.cns.atr.jp/~aude/ publications /ras99.pdf
11. Liefke, H. (1998), "Quaternion calculus for modeling rotations in 3D space", available at: www.liefke.com/ hartmut
12. Olariu, S. (2000), "Complex numbers in three dimensions", available at: arXiv: math. CV/0008119 v1 (accessed Aug. 16, 2000).
13. Olariu, S. (2000), "Commutative complex numbers in four dimensions", available at: arXiv: math. CV/0008119 v1 (accessed August 16, 2000).
14. Sinkov, M.V., Boyarinova, J.E., Kalinovsky, J.A., Postnikova, T.G. and Sinkova, T.V. (2005), "Algorithm-software tools for analytical computations over hypercomplex numbers in computer mathematical system MAPLE", *Data Recording, Storage and Processing*, Vol. 7, no. 2, pp. 18-24.

Поступила 27.01.16

КАЛИНОВСКИЙ Яков Александрович, д-р техн. наук, ст. науч. сотр. Ин-та проблем регистрации информации НАН Украины. В 1965 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — теория гиперкомплексных числовых систем и их применение в математическом моделировании.

БОЯРИНОВА Юлия Евгеньевна, канд. техн. наук, ст. науч. сотр. Ин-та проблем регистрации информации НАН Украины, доцент Национального технического университета Украины «Киевский политехнический ин-т», который окончила в 1997 г. Область научных исследований — теория гиперкомплексных числовых систем и их применение в математическом моделировании.