

---

УДК 621.039.56

**С.Д. Винничук**, д-р техн. наук  
Ин-т проблем моделирования в энергетике  
им. Г.Е. Пухова НАН Украины  
(Украина, 03164, Киев, ул. Генерала Наумова, 15,  
тел. (044) 4249171, e-mail: vynnichuk@i.ua)

## Определение потокораспределения в сетях с древовидным графом

Предложен алгоритм RPR\_D расчета потокораспределения в распределительных сетях с графом древовидной структуры для случая линейных зависимостей изменения потенциала от тока на произвольной ветви. Алгоритм основан на последовательных заменах висячих узлов эквивалентными ветвями, где для уменьшения числа операций формируется специальный вариант положительного направления тока в ветвях. Показано, что алгоритм RPR\_D при произвольных ненулевых значениях сопротивлений ветвей позволяет гарантированно определять неизвестные токи в ветвях и потенциалы в узлах независимо от вариантов граничных условий, а его временная сложность оценивается величиной  $O(V)$ , где  $V$  — число узлов графа.

Запропоновано алгоритм RPR\_D розрахунку потокорозподілу в розподільчих мережах з графом деревовидної структури для випадку лінійних залежностей зміни потенціалу від струму на довільній гілці. Алгоритм базовано на послідовних замінах висячих вузлів еквівалентними гілками, де для зменшення числа операцій формується спеціальний варіант додатного напрямку струму у гілках. Показано, що алгоритм RPR\_D при довільних додатних значеннях опорів віток дозволяє гарантовано визначити невідомі струми у вітках та потенціали в вузлах незалежно від варіантів граничних умов, а його часова складність оцінюється величиною  $O(V)$ , де  $V$  — число вузлів графа.

*К л ю ч е в ы е с л о в а:* распределительная сеть, потокораспределение, свертка, алгоритм, временная сложность.

**Постановка задачи.** В настоящее время расчет потокораспределения в распределительных сетях (РС) различной природы осуществляется на основании решения системы нелинейных уравнений, формируемых согласно первому или второму постулату Кирхгофа [1, 2]. Наиболее часто используются методы контурных токов и узловых потенциалов. В случае применения таких методов для расчета потокораспределения в электрических цепях (ЭЦ) система уравнений является линейной, контурными токами являются собственно токи, а узловыми потенциалами — напря-

© С.Д. Винничук, 2016

жения. При расчетах потокораспределения в установившихся режимах распределительных электроэнергетических сетей (ЭЭС) контурным током является комплекс тока, а узловым потенциалом — комплекс напряжения. В случае гидравлических распределительных сетей (ГРС) сжимаемой и несжимаемой жидкости контурный ток — это массовый расход, а узловой потенциал — полное давление. Далее для переменной, ассоциируемой с током, будем использовать термин ток, а для переменной, ассоциируемой с потенциалом, — термин потенциал. В работе [3] такие переменные названы соответственно последовательными и параллельными.

Общепризнано, что наиболее эффективными методами решения систем нелинейных уравнений потокораспределения являются методы, основанные на методе Ньютона, когда на каждой итерации строится система линейных соотношений и решается СЛАУ [3—5]. Как правило, зависимости, описывающие изменения потенциала на произвольной ветви сети являются функциями тока в этой ветви, а в случае ГРС могут быть приведены к ним [6]. Поэтому поправки  $\delta i_k$  ( $k = 1 \div E$ ) к токам в ветвях, определяемые согласно методу Ньютона, можно найти из полной системы уравнений, составленной на основании первого и второго постулатов Кирхгофа. Коэффициентами в линеаризованных соотношениях являются производные от функции изменения потенциала в каждой из ветвей сети по току в ней.

Полную систему линейных уравнений можно привести к СЛАУ, формируемой согласно методу узловых потенциалов. Получаемая при этом матрица Максвелла имеет простую структуру, определяемую матрицей смежности графа РС, и является разреженной. Существуют эффективные методы решения такой СЛАУ [7]. Известно, что методы контурных токов обеспечивают более высокую точность решения, хотя матрица СЛАУ не всегда оказывается разреженной. Если СЛАУ формируется согласно методу контурных токов, то при ее формализованном построении граф РС преобразуют к циклическому [3].

Решение системы нелинейных уравнений потокораспределения может быть найдено с помощью структурно-декомпозиционных методов [8], но чаще для этого применяется двухуровневый итерационный алгоритм, на верхнем уровне которого формируется СЛАУ, а на нижнем — ее решение. В случае применения традиционных методов решения системы уравнений (например, метода Гаусса), большую часть времени занимает процесс решения СЛАУ, основную часть оперативной памяти занимает матрица коэффициентов СЛАУ. Однако требуемая память ЭВМ и время решения не всегда допустимы при практических расчетах, особенно для систем большой размерности. Поэтому определению токов и потенциалов при линеаризованных зависимостях уделяется большое внимание.

Используя результаты работ [9—15], можно существенно уменьшить число неизвестных СЛАУ или определить неизвестные без формирования СЛАУ и ее решения. Идея исключения узлов из системы узловых уравнений на основании эквивалентирования (в том числе и приближенного) узлов схемы ЭЭС реализована в работе [16], где при свертке схемы используются следующие преобразования:

замена параллельных ветвей одной эквивалентной ветвью;

объединение узлов ветви с нулевым сопротивлением (возможно и обычное замещение ветви выключателя достаточно малым и большим сопротивлениями во включенном и отключенном состояниях);

исключение узла с помощью преобразования активной многолучевой звезды в эквивалентный многоугольник.

В случае произвольной сети с линеаризованными зависимостями изменения потенциала на ветвях ЭЭС в работе [16] неизвестные значения потенциалов определяются в итерациях, на каждой из которых уточняются коэффициенты, формируемые при приближенном эквивалентировании узлов.

В случае ГРС изменение потенциала в зависимости от тока в произвольной ветви графа на шаге метода Ньютона запишем в виде

$$\Delta U_k(i_k) = U(v_{k,1}) - U(v_{k,2}) = a_k + r_k i_k \quad (k = 1 \div E), \quad (1)$$

где  $a_k$  ( $k = 1 \div E$ ) — некоторое действительное число;  $r_k > 0$  ( $k = 1 \div E$ ) — эквивалент сопротивления в электрических цепях;  $i_k$  — ток в ветви  $k$ ;  $v_{k,1}$  ( $v_{k,2}$ ) ( $k = 1 \div E$ ) — узел начала (конца) ветви  $k$ ;  $U(v_{k,1})$  ( $U(v_{k,2})$ ) ( $k = 1 \div E$ ) — значение потенциала в узле начала (конца) ветви  $k$ .

При выполнении соотношений (1), когда  $a_k \neq 0$  ( $k = 1 \div E$ ), не удастся воспользоваться заменой параллельных ветвей одной эквивалентной ветвью и исключением узла с помощью преобразования активной многолучевой звезды в эквивалентный многоугольник. Но и в этом случае при древовидной структуре графа сети неизвестные токи можно определить за время, линейное числу узлов [17].

При известных сопротивлениях ветвей распределительной части ЭЭС с графом древовидной структуры и одним вводом токи в ветвях графа ЭЭС могут быть определены на основании свертки схемы посредством последовательного эквивалентирования висячих узлов одной ветвью [18].

**Алгоритмы расчета потокораспределения в РС с древовидной структурой графа по методу свертки.** Пусть задан граф распределительной сети  $G(V, E)$ . Рассмотрим последовательно эквивалентирование висячего узла при расчетах токов и определение токов в РС с графом, являющимся деревом.

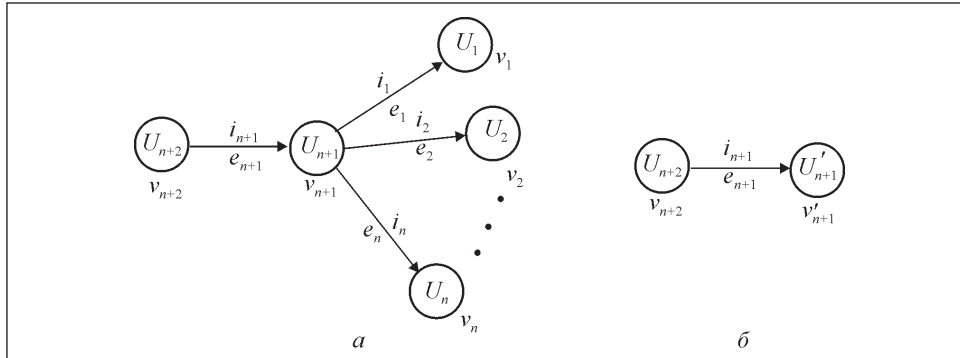


Рис. 1. Схематическое представление всячего узла (а) и эквивалентной ему ветви (б)

**Эквивалентирование всячего узла при расчетах токов в случае действительных значений сопротивлений ветвей, токов и потенциалов.** Подграф сети, содержащей всячий узел, схематически представлен на рис. 1. Для всячего узла  $v_{n+1}$  смежными являются  $n$  граничных узлов  $v_1 — v_n$  и узел сети  $v_{n+2}$ , который, как правило, не является граничным. Каждая из ветвей  $e_k$  ( $k = 1 \div n$ ) инцидентна узлам  $v_{n+1}$  и  $v_k$ . Значение потенциала в узле  $v_k$  равно  $U_k$  ( $k = 1 \div n + 2$ ). Значение тока в ветви  $e_k$  равно  $i_k$  ( $k = 1 \div n + 1$ ). Изменения потенциала на произвольной ветви  $e_k$  ( $k = 1 \div n + 1$ ) описывается зависимостью (1). Значения потенциала в граничных узлах являются известными константами.

Под эквивалентированием всячего узла при расчетах токов будем понимать такую замену ветвей и узлов подграфа, содержащего все смежные всячему узлу ветви и узлы одной ветвью, при которой значение потенциала  $U'_{n+1}$  в узле  $v'_{n+1}$  не зависит от значения потенциала  $U_{n+2}$  и значения тока  $i_{n+1}$  в ветвях  $e_{n+1} = (v_{n+2}, v_{n+1})$  и  $e'_{n+1} = (v_{n+2}, v'_{n+1})$  совпадают при произвольных значениях потенциала  $U_{n+2}$ .

Будем также полагать, что в зависимостях

$$\Delta U_{n+1} = U_{n+2} - U_{n+1} = a_{n+1} + r_{n+1} i_{n+1}, \quad \Delta U'_{n+1} = U_{n+2} - U'_{n+1} = a'_{n+1} + r'_{n+1} i_{n+1}$$

совпадают коэффициенты  $a_{n+1}$  и  $a'_{n+1}$ . Тогда неизвестные  $r'_{n+1}$  и  $U'_{n+1}$  определяем из соотношений

$$i_{n+1} = \sum_{k=1}^n i_k,$$

$$\Delta U_k = U_{n+1} - U_k = a_k + r_k i_k \quad (k=1 \div n), \quad (2)$$

$$i_k = (U_{n+1} - U_k - a_k) / r_k \quad (k=1 \div n),$$

$$i_{n+1} = (U_{n+2} - U'_{n+1} - a'_{n+1}) / r'_{n+1} = (U_{n+2} - U_{n+1} - a_{n+1}) / r_{n+1}.$$

Предположим, что при некотором значении потенциала  $U'_{n+1}$  ток  $i_{n+1}$  в ветви  $n + 1$  равен нулю. Тогда

$$i_{n+1} = \sum_{k=1}^n i_k = \sum_{k=1}^n g_k (U'_{n+1} - U_k - a_k) = U'_{n+1} \sum_{k=1}^n g_k - \sum_{k=1}^n g_k (U_k + a_k) = 0,$$

откуда легко определить значение потенциала  $U'_{n+1}$ :

$$U'_{n+1} = \frac{\sum_{k=1}^n g_k (U_k + a_k)}{\sum_{k=1}^n g_k}. \quad (3)$$

Коэффициенты линейных зависимостей для токов  $i_k$  ( $k = 1 \div n$ ) от  $i_{n+1}$  определяем из соотношения

$$\begin{aligned} i_k &= (U_{n+1} - U_k - a_k) g_k = (U_{n+1} - U'_{n+1}) g_k + (U'_{n+1} - U_k - a_k) g_k = \\ &= (U_{n+1} - U'_{n+1}) g_k + i_{k,0} = (U_{n+1} - U'_{n+1}) \sum_{k=1}^n g_k \left( \frac{g_k}{\sum_{k=1}^n g_k} \right) + i_{k,0} = \\ &= i_{n+1} \left( \frac{g_k}{\sum_{k=1}^n g_k} \right) + i_{k,0} = i_{n+1} c_k + i_{k,0} \quad (k = 1 \div n). \end{aligned} \quad (4)$$

При изменении потенциала в узле  $v_{n+1}$  будет меняться его значение в узле  $v_{n+2}$ :

$$\begin{aligned} U_{n+2} &= U_{n+1} + a_{n+1} + r_{n+1} i_{n+1} = (U_{n+1} - U'_{n+1}) + U'_{n+1} + r_{n+1} i_{n+1} + a_{n+1} = \\ &= (U_{n+1} - U'_{n+1}) \sum_{k=1}^n g_k \left( \frac{1}{\sum_{k=1}^n g_k} \right) + U'_{n+1} + r_{n+1} i_{n+1} + a_{n+1} = \\ &= \left( \frac{1}{\sum_{k=1}^n g_k} \right) i_{n+1} + U'_{n+1} + r_{n+1} i_{n+1} + a_{n+1} = \\ &= U'_{n+1} + a_{n+1} + \left( \frac{1}{\sum_{k=1}^n g_k} + r_{n+1} \right) i_{n+1} = U'_{n+1} + a_{n+1} + r'_{n+1} i_{n+1}, \end{aligned}$$

т.е. изменение разности потенциалов в эквивалентной ветви описывается зависимостью

$$U_{n+2} - U'_{n+1} = U_{n+2} - \sum_{k=1}^n g_k (U_k + a_k) / \sum_{k=1}^n g_k = a_{n+1} + \left( \frac{1}{\sum_{k=1}^n g_k} + r_{n+1} \right) i_{n+1},$$

где значение потенциала в граничном узле  $v'_{n+1}$  и коэффициент сопротивления ветви  $e'_{n+1}$  определяются через постоянные значения потен-

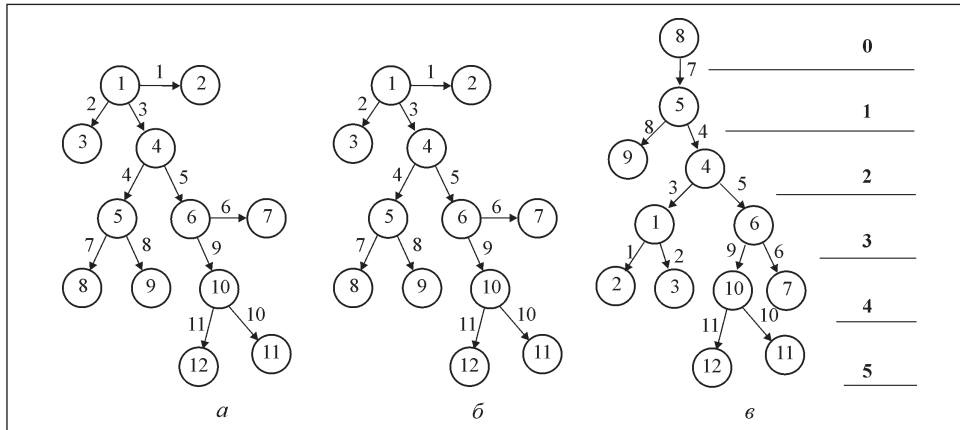


Рис. 2. Ориентированный граф древовидной структуры (а), ассоциированный с ним неориентированный граф (б) и корневое дерево с корнем в узле 8 (в): 0—5—уровни корневого дерева

циалов в граничных узлах  $v_k (k=1 \div n)$ , не зависят от значения потенциала в узле  $v_{n+2}$  и равны константам:

$$U'_{n+1} = \frac{\sum_{k=1}^n g_k (U_k + a_k)}{\sum_{k=1}^n g_k} = \sum_{k=1}^n c_k (U_k + a_k),$$

$$r'_{n+1} = 1 / \sum_{k=1}^n g_k + r_{n+1}.$$

**Определение токов в РС с древовидным графом.** Пусть граф РС является деревом, известны сопротивления всех ветвей и граничные значения потенциалов во всех граничных узлах, являющиеся действительными числами. Данные о ветвях и узлах ориентированного графа заданы списком инцидентий, чем определено положительное направление тока для каждой из ветвей. Рассматривая граф распределительной сети как неориентированный, по списку инцидентий можно построить список смежности и с его помощью построить корневое дерево методом поиска в ширину, где корнем является некоторый граничный узел. Для каждого из узлов определим в корневом дереве его ветвь-предок и узел-предок.

На рис. 2 представлен пример ориентированного графа древовидной структуры, ассоциированный с ним неориентированный граф и корневое ориентированное дерево, с корнем в узле 8. Как видно из рис 3, в, после замены висячего узла 10 эквивалентной ветвью исчезает уровень 5, где вместо висячего узла 10 формируется граничный узел 10'. При этом измененный граф останется деревом. После замены висячих узлов 1 и 6 соот-

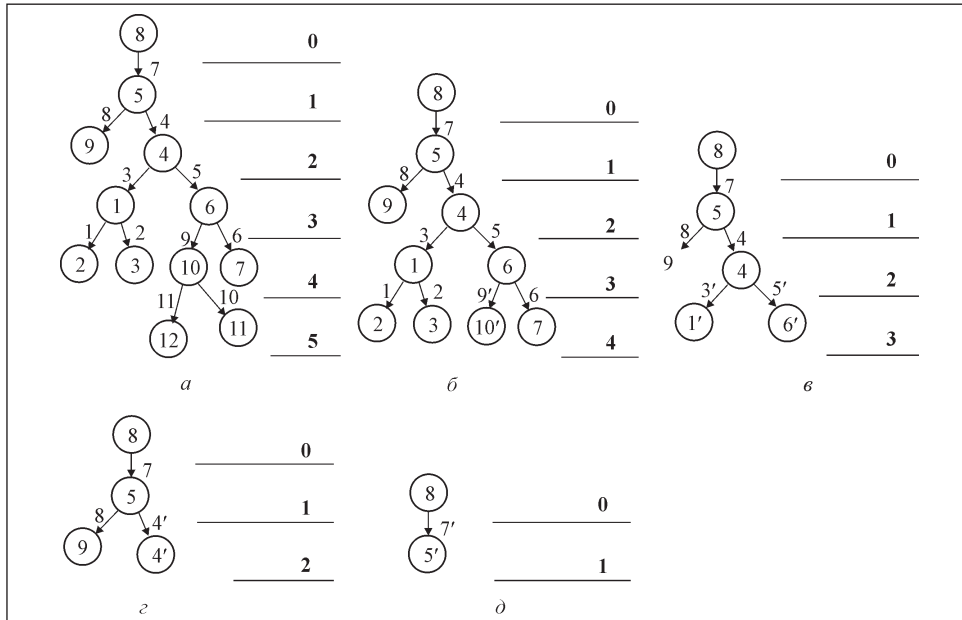


Рис. 3. Изменение числа уровней корневого дерева (а) после замены эквивалентной ветвью висячих узлов уровня 4 (б), уровня 3 (в), уровня 2 (г) и уровня 1 (д): 0 — 5 — уровни корневого дерева

ветствующими им эквивалентными ветвями исчезнет уровень 4, а вместо висячих узлов 1 и 6 сформируются граничные узлы 1' и 6'. После замены висячих узлов 4 и 5 дерево превратится в граф, содержащий всего одну ветвь (рис. 3).

Методом поиска в ширину можно сформировать очередь узлов, в которой узлы более высокого уровня следуют за узлами более низкого уровня. Если полагать что в списке смежности для каждого из узлов смежные ему узлы располагаются в порядке возрастания номеров, то при формировании корневого дерева для графа, представленного на рис. 2, в, будет сформирована следующая очередь узлов (в скобках указан уровень узла): 8 (0), 5 (1), 4 (2), 9 (2), 1 (3), 6 (3), 2 (4), 3 (4), 7 (4), 10 (4), 11 (5), 12 (5). Если из этого списка исключить граничные узлы, то получим последовательность

$$5 (1), 4 (2), 1 (3), 6 (3), 10 (4), \quad (5)$$

в которой последний в очереди узел будет висячим. Висячим будет и каждый из узлов списка (5) после замены эквивалентной ветвью всех узлов, следующих за ним. Для произвольного древовидного графа такое свойство вытекает из того, что в очереди узлов, формируемой с помощью

метода поиска в ширину, для последнего из внутренних узлов среди смежных ему узлов — не более одного внутреннего узла.

При анализе последовательности замен висячих узлов эквивалентными им ветвями (см. рис. 3) легко заметить, что информация об эквивалентной ветви используется при эквивалентировании висячего узла на единицу меньшего уровня. Поэтому при расчете токов в ветвях распределительной сети с древовидным графом следует сохранять информацию о коэффициентах  $a$  и  $r$  в соотношениях (1) для каждой из ветвей, о постоянных значениях потенциалов в граничных узлах, а также результаты обработки данных о графе распределительной сети. Пусть для определенности эти данные хранятся в массивах:

коэффициенты  $a_k$  ( $k = 1 \div E$ ) в (1) — в массиве  $MA$ ;

коэффициенты  $r_k$  ( $k = 1 \div E$ ) в (1) — в массиве  $MR$ ;

проводимости ветвей  $g_k = 1/r_k$  ( $k = 1 \div E$ ) — в массиве  $MG$ ;

значения потенциалов в узлах — в массиве  $PU$ ;

номер узла-предка — в массиве  $P(u)$ ;

номер ветви-предка  $v(u)$ , связывающей узел  $u$  с узлом-предком, — в массиве  $VP$ ;

списки смежности: для каждого из узлов данные о смежных узлах и ветвях, формируемых по списку инцидентий ассоциированного неориентированного графа;

номера узла-предка (в массиве  $P(u)$ ) и ветви-предка  $v(u)$ , связывающей узел  $u$  с узлом-предком (в массиве  $VP$ ), определяемые алгоритмом метода поиска в ширину по спискам смежности.

Кроме того, необходимо хранить следующие данные, получаемые в ходе эквивалентирования висячих узлов и дальнейшего расчета токов:

граничное значение потенциала в узле — в массиве  $H$ ;

значение суммарного сопротивления (в массиве  $RE$ ) и проводимости (в массиве  $GE$ ) эквивалентных ветвей;

значение тока в ветвях — в массиве  $MI$ ;

коэффициенты  $c_k$  (в массиве  $CE$ ) и  $i_{k,0}$  (в массиве  $CI$ ) из (3), на основании которых по току в ветви-предке определяются токи во всех граничных ветвях, смежных висящему узлу.

**Алгоритм RPR\_D определения токов в ветвях РС с древовидным графом. Расчет потокораспределения.**

1. Анализ граничных условий (ГУ). Во всех ветвях, в которых ток неизвестен, принять в качестве начального значение тока, равное нулю. При наличии среди ГУ известных значений токов сформировать сбалансированное в узлах начальное приближение токов. Исключить из дальнейшего анализа те ветви, в которых ток известен, и определять приращения токов в остальных ветвях.



2. Выбор начального граничного узла, т.е. корня дерева, и формирование очереди (массив  $MC$ ) внутренних узлов (число которых пусть равно  $m$ ) методом поиска в ширину согласно списку смежности, а также формирование массивов  $P$  и  $VP$ . Временно (для удобства вычислений) полагаем, что положительное направление токов соответствует направлению от узла с меньшим номером уровня в корневом дереве к узлу с большим номером. Корректировка знака в (1) с учетом сформированного положительного направления токов и начальные присвоения:  $RE = MR$ ;  $GE = MG$ ;  $H = PU$ ;  $CE = 0$ ;  $CI = 0$ .

3.  $n = m$ .

4. Определение номера висячего узла  $u = MC[n]$ , узла-предка  $u1 = P[u]$  и ветви-предка  $e = VP[u]$ .

5. Замена висячего узла  $u$  эквивалентной ветвью с использованием данных массивов  $RE, GE, H$ :

5.1. определение согласно (4) значений граничного потенциала  $H(u) = U'_u$ , сопротивления  $RE[e] = r'_k$  проводимости  $GE[e] = 1/r'_e$ ;

5.2. определение коэффициентов  $c_k$  ( $CE(k) = c_k$ ) и  $i_{k,0}$  ( $CI(k) = i_{k,0}$ ) согласно (4).

6.  $n = n - 1$ .

7. При  $n > 0$  перейти к шагу 4. Иначе — этап свертывания схемы сети завершен и перейти к определению токов.

8.  $u = MC[1]$ ,  $u1 = P[u]$ ,  $e = VP[u]$ . Определение тока в ветви  $e$ :

$$MI(e) = i_e = (H(u1) - H(u) - MA(e)) / RE(e). \quad (6)$$

9.  $n = n + 1$ ;

10.  $u = MC[n]$ ,  $u1 = P[u]$ ,  $e = VP[u]$ .

11. Определение токов в ветвях  $e_j$  ( $j = 1 \div k(u)$ ), смежных узлу  $u$  и не совпадающих с ветвью-предком  $e$ , по значению тока в ветви  $e$ , а также значений потенциала в узле  $u$ :

$$\begin{aligned} MI(e_j) &= MI(e)CE(e_j) + CI(e_j) \quad (j = 1 \div k(u)) \\ H(u) &= H(u1) - MA(e) - MI(e)MR(e). \end{aligned} \quad (7)$$

12. При  $n \leq m$  перейти к шагу 8, а иначе — к шагу 12.

13. Определение знака для токов в ветвях: если для ветви  $e$  в списке инцидентный узлом начала ветви является  $u1(e)$ , ее концом — узел  $u2(e)$ , а  $z = H(u1(e)) - MA(e)$ , то знак тока меняется на противоположный в случаях, когда  $z > H(u2(e))$  и  $i_e < 0$ , либо  $z < H(u2(e))$  и  $i_e > 0$ .

14. Определение значений потенциалов в граничных узлах, инцидентных ветвям с известным значением тока.

**Оценка временной сложности.** Для произвольного дерева число ветвей на единицу меньше числа узлов. Поэтому асимптотическую оценку временной сложности представим с использованием числа узлов графа.

Предполагая, что при расчете токов алгоритм RPR\_D можно использовать многократно, отдельно оценим временную сложность шагов 2, 13 и 3—12. На начальном этапе расчета, когда по списку инцидентий формируются списки смежности, суммарное число операций является величиной порядка  $O(V)$ . Величиной такого же порядка характеризуется число операций в алгоритме метода поиска в ширину, включая определение узлов-предков и ветвей-предков. При выполнении шага 13 алгоритма в цикле по числу ветвей для каждой из них вычисляется разность  $z = H(u1(e)) - MA(e)$  и сравниваются величина  $z$  с  $H(u2(e))$  и величина тока  $MI(e)$  с нулем. Число операций в сумме меньше  $3V$ . Поэтому общее число операций на шагах 2 и 13 является величиной порядка  $O(V)$ .

Шаги алгоритма 3—12 делятся на две составляющие: сворачивание сети (шаги 3—7) и ее разворачивание (шаги 8—12). На этапе сворачивания сети выполняется  $m$  замен висячих узлов эквивалентными ветвями, где  $m$  — число внутренних узлов древовидного графа. На шагах 3, 6 и 7 реализован цикл от  $m$  до 1, т.е.  $m$  раз выполняется вычитание единицы (операция  $n - -$ ) и  $m$  сравнений  $n$  с нулем. На шаге 4 при каждом значении  $n$  выполняется три присвоения. Наиболее трудоемким является шаг 5, на котором определяются:

суммарная проводимость  $\sum_{k(u)} g_{k(u)}$  ветвей  $k(u)$ , смежных висящему уз-

лу, кроме ветви-предка: при всех значениях параметра цикла  $n$  число операций сложения равно  $E - m$ , а число присвоений —  $E - 1$ ;

сумма  $\sum_{k(u)} g_{k(u)} (U_{k(u)} + a_{k(u)})$  по ветвям  $k(u)$ , смежных висящему узлу,

кроме ветви-предка: при всех значениях параметра цикла  $n$  число операций умножения и присвоений равно  $E - 1$ , так как соответствующие данные каждой ветви используются один раз, число операций сложения равно  $2E - m - 1$ ;

граничное значение потенциала:  $m$  делений и присвоений при всех значениях параметра цикла  $n$ ;

коэффициент сопротивления и проводимость эквивалентной ветви с использованием найденного ранее значения  $\sum_{k(u)} g_{k(u)}$ : при  $m$  значениях

параметра цикла  $n$  число операций сложения равно  $m$  и  $2m$  делений и присвоений;

коэффициенты  $c_{k(u)}$  и  $i_{k(u),0}$  согласно (3): для  $m$  значений параметра цикла  $n$  при расчете  $c_{k(u)}$  число делений равно  $E - 1$ , а при расчете  $i_{k(u),0}$  число вычитаний и присвоений равно  $2E - 2$ , число умножений —  $E - 1$ .

На шагах 9 и 12 реализован цикл от 1 до  $m$ , т.е.  $m$  раз выполняется операция  $n^{++}$  и  $m$  сравнений  $n$  с  $m$ . На шаге 8 выполняется четыре присвоения, два вычитания и одно деление, на шаге 10 —  $3m$  присвоений. Наиболее трудоемким является шаг 11, на котором определяются:

токи в ветвях, смежных висящему узлу, кроме ветви-предка: для  $m$  значений параметра цикла  $n$  число сложений, умножений и присвоений равно  $E - 1$ ;

значение потенциала в узле: для  $m$  значений параметра цикла  $n$  число сложений, умножений и присвоений равно  $m$ .

Следовательно, суммарное число операций на шагах 3—12 не превышает: сложений и вычитаний —  $6E + 3m$ , умножений —  $3E + m$ , делений —  $3m + E$ , сравнений —  $2m$ , присвоений —  $11m + 5E$ . Не вызывает сомнений, что вычислительная сложность шага 1 также является величиной порядка  $O(V)$ . Поскольку  $m < V$ , временная сложность алгоритма RPR\_D  $T(V) = O(V)$ .

Как указано в [11], при преобразованиях графов, связанных с перестройкой системы узлов и ветвей, необходимо хранить информацию об исходной и преобразованной системе, что при множественных таких операциях может приводить к хранению большого объема информации, сравнимого с квадратом числа ветвей системы. В то же время, при разбиении системы на удачно выбранные части значительно сокращается как объем оперативной памяти ЭВМ, так и время решения задачи. Анализируя алгоритм RPR\_D, легко заметить, что вследствие дублирования информации о коэффициентах зависимостей вида (1), формирования корневого дерева по исходному графу с определением ветвей-предков и узлов-предков и специальной организации последовательности замен висячих узлов эквивалентными ветвями, при его использовании не потребовалось дополнительной информации для осуществления преобразований графа сети. Информация о списках смежности, очереди висячих узлов, ветвях-предках и узлах-предках для узлов графа требует дополнительного объема памяти, не превышающего  $9V$ .

Следует заметить, что временная сложность алгоритма определена для действительных значений токов, потенциалов, сопротивлений и проводимостей. В случае комплексных их значений (например, для сетей ЭЭС) число шагов алгоритма не изменится, но возрастет сложность выполнения арифметических операций над комплексными числами.

При расчетах токов и потенциалов для ЭЭС в линиях сверхвысокого напряжения, когда ток в начале ветви не совпадает с током в ее конце,

вместо (1) используют четырехполосники, устанавливающие зависимости между токами и потенциалами в начале и конце ветви. Тогда для произвольного висячего узла (см. рис. 1) изменится первая формула в (2). Процедура расчета усложнится, но и в этом случае временная сложность алгоритма свертки будет составлять величину порядка  $O(V)$ .

**Гарантированность определения токов с помощью алгоритма RPR\_D.** Пусть в каждом из граничных узлов задано ГУ, являющееся значением тока или потенциала. Согласно шагу 1 алгоритма RPR\_D ветви с известными значениями тока можно исключить из рассмотрения на этапе определения токов в остальных ветвях. В этом случае граф РС останется деревом, для которого во всех граничных узлах ГУ является значением потенциала.

С использованием алгоритма RPR\_D реализуем сворачивание и разворачивание схемы РС. Для этого методом поиска в ширину по выбранному граничному узлу однозначно строим корневое дерево и определяем последовательность висячих узлов. Такая процедура гарантированно может быть реализована для произвольного древовидного графа.

На этапе свертки в строгой последовательности реализуется эквивалентирование каждого из висячих узлов эквивалентной ветвью. Условие гарантированности выполнения этапа сворачивания схемы РС будет выполнено, если гарантировано эквивалентирование произвольного висячего узла (см. рис. 1). Для его эквивалентирования необходимо определить следующее:

1. Коэффициенты распределения токов в ветвях  $k = 1 \div n$  по значению тока в ветви  $n + 1$ :  $c_k = g_k / \sum_{m=1}^n g_m$ .

2. Значение потенциала в узле  $v_{n+1}$ , при котором суммарный ток  $i_{n+1}$  в  $n + 1$ -й ветви равен нулю, являющееся граничным значением потенциала в узле  $v'_{n+1}$ :  $U'_{n+1} = \sum_{k=1}^n c_k (U_k + a_k)$ .

3. Сопротивление эквивалентной ветви:  $r'_{n+1} = 1 / \sum_{k=1}^n g_k + r_{n+1}$ .

4. Значение тока в ветви  $k$  при  $i_{n+1} = 0$ :  $i_{k,0} = (U'_{n+1} - U_k - a_k) g_k$ .

Гарантированное выполнение операций 1—4 при положительных значениях сопротивлений и проводимостей следует из того, что при выполнении операций 1 и 3 знаменатель  $\sum_{k=1}^n g_k$  будет больше нуля. В случае комплексных значений сопротивлений и проводимостей для РС ЭЭС

действительная часть сопротивлений и проводимостей являются положительными числами, а мнимая представляет собой отличные от нуля значения. При этом для сопротивлений все они положительные, а для проводимостей — все меньше или равны нулю. Следовательно, и в этом случае могут быть выполнены все вычисления операций 1—4.

На шаге 8 алгоритма определяется ток  $i_e$  в ветви  $e$ , эквивалентной всей РС, как произведение разности потенциалов в смежных граничных узлах на эквивалентную проводимость объединяющей их ветви  $i_e = (U_e - U'_e - a_e) g_e$ , где  $U_e$  — потенциал в граничном корневом узле;  $U'_e$  — постоянное значение потенциала в соотношении (1) для эквивалентной ветви  $e$ ;  $g_e$  — проводимость эквивалентной ветви.

После определения тока в ветви  $e$  на шагах 9—12 алгоритма для каждого висячего узла определяются токи в ветвях, смежных узлу  $u$  и не совпадающих с ветвью-предком по значению тока в его ветви-предке. При формальном представлении висячего узла в виде, изображенном на рис. 1, будут выполнены следующие операции по определению тока:  $i_k = i_{k,0} + c_k i_{n+1}$  ( $k = 1 \div n$ ). Возможность выполнения этих операций не вызывает сомнений, что позволяет сделать вывод о возможности гарантированного определения токов в ветвях произвольной РС с древовидным графом.

## Выводы

Среди методов расчета потокораспределения в сетях значительное место занимают методы уменьшения числа неизвестных в системе уравнений, основанных на постулатах Кирхгофа. Их использование позволяет формировать такую последовательность определения неизвестных, в которой не требуется решать СЛАУ большой размерности независимо от числа узлов и ветвей графа распределительной сети. Важным при этом оказывается наличие формализованного алгоритма формирования этой последовательности. Предложенный алгоритм основан на методе поэлементного наращивания, где в качестве элемента рассматривается висячий узел графа древовидной структуры. Данный алгоритм позволяет гарантированно определять неизвестные токи в ветвях и потенциалы в узлах произвольной распределительной сети при положительных коэффициентах сопротивления ветвей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акопян С.Г. Электрическая теория гидравлических цепей и методические основы анализа режимов и оптимального проектирования газотранспортных систем /Автореф. дисс... д-ра техн. наук. — Государственный инженерный университет Армении, Ереван, 1993. — 56 с.

2. Саух С.Е. Исследование энергетических цепей с помощью численных операторных методов: Дисс... д-ра техн. наук. — Ин-т проблем моделирования в энергетике АН Украины, Киев, 1991. — 276 с.
3. Меренков А.П., Хасилев В.Я. Теория гидравлических цепей. — М.: Наука, 1985. — 280 с.
4. Баринов В.А., Савалов С.А. Режимы энергосистем: Методы анализа и управления. — М.: Энергоатомиздат, 1990. — 440 с.
5. Евдокимов А.Г., Тевяшев А.Д., Дубровский В.В. Моделирование и оптимизация потокораспределения в инженерных сетях. 2-е изд. перераб. и доп. — М.: Стройиздат, 1990. — 368 с.
6. Винничук С.Д. Методы и алгоритмы решения задач анализа, проектирования и управления распределением потоков в гидравлических распределительных системах: Дисс... д-ра техн. наук. — Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины, Киев, 2006. — 305 с.
7. Davis T.A. Direct Methods for Sparse Linear Systems (Fundamentals of Algorithms). — Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006. — 218 p.
8. Кондращенко В.Я., Винничук С.Д., Федоров М.Ю. Моделирование газовых и жидкостных распределительных систем. — Киев: Наукова думка, 1990. — 184 с.
9. Бунь Р.А., Васильев Е.Д., Семотюк В.Н. Моделирование электрических цепей методом подсхем. Отв. ред. Грицук В.В. — Киев: Наук. думка, 1991. — 176 с.
10. Грицай М.А., Журавлев В.Г. Расчет потокораспределения в электрической сети по методу определяющих величин // Электричество. — 1968. — № 8. — С. 17—20.
11. Максимович Н.Г. Линейные электрические цепи и их преобразования. — М. — Л.: Госэнергоиздат, 1961. — 267 с.
12. Пухов Г.Е. Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей. — Киев: Наук. думка, 1967. — 568 с.
13. Сецу С., Рид М.Б. Линейные графы и электрические цепи / Пер. с англ., под ред. П.А. Ионкина / Учеб. пособие. — М.: Высш. школа, 1971. — 448 с.
14. Сигорский В.П., Петренко А.И. Алгоритмы анализа электронных схем. — Киев: Техніка, 1970. — 396 с.
15. Шакиров И.А. Универсальные преобразования и диакоптика электрических цепей / Автореф. дисс. ... докт. техн. наук. — Ленинград, 1980. — 32 с.
16. Шаргин Ю.М., Меркурьев А.Г. Расчет электрических режимов методом эквивалентных преобразований // Электричество. — 2003. — № 4. — С. 53—55
17. Винничук С.Д. Метод линейной свертки для решения задач расчета потокораспределения в сетях древовидной структуры // Методы и средства компьютерного моделирования. Сб. науч. тр. — Киев: ИПМЭ НАН Украины, 1997. — С. 53—54
18. Винничук С.Д., Самойлов В.Д. Определение токов в коммутационных структурах электроэнергетических сетей с древовидной структурой графа // Электрон. моделирование. — 2015. — 37, № 5. — С. 89—104.

S.D. Vynnychuk

#### DETERMINATION OF FLOW DISTRIBUTION IN NETWORKS WITH A TREE GRAPH

An algorithm has been proposed for calculating RPR\_D flow distribution in distribution networks with a tree structure graph for the case of linear dependence of the potential change of the current on any arbitrary branch. The algorithm is based on the consecutive replacements of danglers by equivalent branches, where a special variant of the positive direction of current in the branches is formed in order to reduce the number of operations. It is shown that RPR\_D algorithm



for arbitrary non-zero values of the resistance of branches allows determining with guarantee the unknown currents in the branches and potentials in the nodes regardless of the variants of boundary conditions, and its time complexity is estimated to be about  $O(V)$ , where  $V$  is the number of nodes in the graph.

*Key words*: distribution network, load flow, convolution, algorithm, the time complexity.

#### REFERENCES

1. Akopyan, S.G. "Electrical theory of hydraulic circuits and methodical bases of modes analysis and optimal design of gas transmission systems", Abstract of Dr. Sci. (Tech.) dissertation, 05.13.12, 05.15.13, State Engineering University of Armenia, Yerevan, Armenia.
2. Saukh, S.Ye. (1991), "Research of power circuits with the help of numerical operator methods", Abstract of Dr. Sci. (Tech.) dissertation, 05.13.16., Institute for Modeling in Energy Engineering of Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine.
3. Merenkov, A.P. and Khasilev, V.Ya. (1985), *Teoriya gidravlicheskih tsepey* [Theory of hydraulic circuits], Nauka, Moscow, Russia.
4. Barinov, V.A. and Sovalov, S.A. (1990), *Rezhimy energosistem: metody analiza i upravleniya* [Power systems modes: methods of analysis and control], Energoatomizdat, Moscow, Russia.
5. Yevdokimov, A.G., Tevyashev, A.D. and Dubrovskiy, V.V. (1990), *Modelirovanie i optimizatsiya potokoraspredeleniya v inzhenernykh setyakh, 2-e izd. pererab. i dop.* [Modeling and optimization of load flow in engineering networks, 2nd ed., revised. and ext.], Stroyizdat, Moscow, Russia.
6. Vynnychuk, S.D. (2006), "Methods and algorithms for solving problems of analysis, design and management of distribution flows in the hydraulic distribution systems", Abstract of Dr. Sci. (Tech.) dissertation, 01.05.02., Pukhov Institute for Modeling in Energy Engineering of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine.
7. Davis, T.A. (2006), *Direct Methods for Sparse Linear Systems (Fundamentals of Algorithms)*, Society for Industrial and Applied Mathematics.
8. Kondraschenko, V.Ya., Vynnychuk, S.D. and Fedorov, M.Yu. (1990), *Modelirovanie gazovykh i zhidkostnykh raspredelitelnykh system* [Simulation of gas and fluid distribution systems], Naukova dumka, Kiev, Ukraine.
9. Bun, R.A., Vasiliev, E.D. and Semotyuk, V.N. (1991), *Modelirovanie elektricheskikh tsepey metodom podskhem, Otv. red. Grytskyk, V.V., AN Ukrainy, Fiziko-mekhanicheskyy in-t.* [Simulation of electrical circuits by subcircuits, Ed. Grytskyk, V.V., Academy of Sciences of Ukraine, Physical-Mechanical inst.], Naukova dumka, Kiev, Ukraine.
10. Grytsay, M.A. and Zhuravlev, V.G. (1968), "The calculation of flow distribution in the electric network by the method of determining value", *Elektrichestvo*, no. 8, pp. 17-20.
11. Maksimovich, N.G. (1961), *Lineinye elektricheskie tsepi i ikh preobrazovaniya* [Linear circuits and their conversion], Gosenergoizdat, Moscow-Leningrad, Russia.
12. Pukhov, G.Ye. (1967), *Metody analiza i sinteza kvazi analogovykh elektronnykh tsepey* [Methods of analysis and synthesis of the quasi analog electronic circuits], Naukova dumka, Kiev, Ukraine.
13. Seshu, S. and Rid, M.B. (1971), *Lineinye grafy i elektricheskie tsepi, Per. s angl., pod red. P.A. Ionkina, Uchebnoe posobie dlya vuzov spetsialnostey radiotekhnika, elektronnyaya tekhnika, elektropriborostroenie i avtomatika* [Line graphs and circuits, Transl. from English., Ed. Ionkin, P.A., Textbook for Universities radio engineering specialties, electronic engineering, electrical instrumentation and automation], Vysshaya shkola, Moscow, Russia.
14. Sigorskiy, V.P. and Petrenko, A.I. (1970), *Algoritmy analiza elektronnykh skhem* [Algorithms analysis of electronic circuits], Tekhnika, Kiev, Ukraine.

15. Shakirov, I.A. (1980), "Universal conversion and diakoptics circuits", Abstract of Dr. Sci. (Tech.) dissertation, Leningrad, Russia.
16. Shargin, Yu.M. and Merkuriev, A.G. (2003), "Calculation of electrical modes of the method of equivalent transformation", *Elektrichestvo*, no. 4, pp. 53-55
17. Vynnychuk, S.D. (1997), "Linear convolution method for solving flow distribution calculation in the tree structure networks", *Metody i sredstva kompyuternogo modelirovaniya (po materialam ezhegodnoy konferentsii instituta 1996 i 1997 gg.)*, *Sbornik nauchnykh trudov* [Methods and means of computer simulation (based on the annual conference of the Institute for 1996 and 1997), The collection of scientific works], Kiev, IPME NAN Ukrainy, 1997, pp. 53-54.
18. Vynnychuk, S.D. and Samoylov, V.D. (2015), "Determination of the currents in the switching structures of the electrical energy networks with tree graph's structure", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 37, no. 5, pp. 89-104.

Поступила 10.05.16

*ВИННИЧУК Степан Дмитриевич, д-р техн. наук, и.о. зав. отд. Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 1977 г. окончил Черновицкий госуниверситет. Область научных исследований — модели, методы и программные средства для анализа систем сжимаемой и несжимаемой жидкостей, режимы электроэнергетических систем, частотная противоаварийная автоматика, теория алгоритмов.*