МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

УДК: 531.36

И.Л. Иванов, канд. физ.-мат. наук, **А.А. Мартынюк,** акад. НАН Украины
Ин-т механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины
(Украина, 03057, Киев, ул. Нестерова, 3,
тел. (044) 4566140, e-mail: center@inmech.kiev.ua)

Управление с запаздыванием энергосистемой при импульсных возмущениях

Рассмотрено управление с запаздыванием энергосистемой при импульсных возмущениях. Достаточные условия асимптотической стабилизации этой системы пропорционально-дифференциальным регулятором получены с помощью подхода, основанного на прямом методе Ляпунова и технике Разумихина. Полученные аналитические результаты представлены в виде системы нелинейных алгебраических уравнений с совокупностью свободных параметров.

Розглянуто управління з запізненням енергосистемою при імпульсних збуреннях. Достатні умови асимптотичної стабілізації цієї системи пропорційно-диференціальним регулятором отримано за допомогою підходу, базованого на прямому методі Ляпунова та техніці Разуміхіна. Отримані аналітичні результати представлено у вигляді системи нелінійних алгебраїчних рівнянь з сукупністю вільних параметрів.

К л ю ч е в ы е с л о в а: энергосистема, устойчивость по Ляпунову, метод Разумихина, запаздывание, импульсное воздействие, управление.

Понятие устойчивости энергосистемы в широком смысле определяется как такое свойство, которое позволяет ей оставаться в положении равновесия в нормальных условиях и возвращаться к нормальному состоянию после воздействия возмущения [1]. Устойчивость энергосистем является важным аспектом обеспечения безопасности их работы [2—4].

В работах [5—10] проблема устойчивости энергосистем рассматривается для моделей, в которых учтено запаздывание при поступлении сигнала о состоянии системы. В частности, в работах [8—10] обсуждается влияние запаздывания на область устойчивости в пространстве параметров энергосистемы.

В некоторых неблагоприятных случаях работа энергосистемы протекает в условиях краткосрочных возмущений, приводящих к резким перепадам напряжения. Примерами таких возмущений являются короткие замыкания. Известно также, что воздействие на работу энергосистемы ударов молнии, не приводящих к коротким замыканиям, также носит импульсный характер [11]. Устойчивости энергосистем, в которых учтены как запаздывание, так и импульсные возмущения, посвящены работы [12—14].

Рассмотрим проблему стабилизации модели электро-энергетической системы при импульсных возмущениях с помощью пропорционально-дифференциального регулятора с запаздыванием.

Предварительные результаты. Для произвольных борелевских множеств $X \subset \mathrm{R}$, $Y \subset \mathrm{R}^n$, $n \in \mathbf{N}$, определим класс функций $PC(X, Y)$, состоящий из таких $x : X \to Y$, что

1) x непрерывны слева везде на X;

2) x обладают не более чем счетным числом точек разрыва первого рода.

Рассмотрим систему с запаздыванием и импульсным воздействием в виде

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x_t),\ \ t \neq \tau_k,\ \ x(\tau_k^+) = I_k(x),\ \ k \in \mathbf{N}, \tag{1}$$

и начальные условия к ней:

$$x(t) = \varphi_0(t),\ \ t \in [-\tau, 0], \tag{2}$$

где $x \in PC([-\tau, \infty), \mathbf{R}^n$; $f : [-\tau, \infty) \times PC([-\tau, \infty), \mathbf{R}^n) \to \mathrm{R}^n$ — непрерывна по первому аргументу и липшицева по второму; $I_k : [-\tau, \infty] \to \mathrm{R}^n$ — непрерывна, $\tau_k \to \infty$, когда $k \to \infty$. Из сформулированных предположений следует, что начальная задача (1), (2) обладает единственным решением на $[0, \infty)$.

Определение 1. Функция $V(t, x)$ принадлежит классу K, если выполняются следующие условия:

$V(t, x)$ непрерывно дифференцируема на множестве $T \times \mathrm{R}^n$, где $T = [t_0 - \tau, \infty) \setminus \{\tau_k\}_{k \in \mathrm{N}}$;

существует функция a класса Хана такая, что выполняется оценка $a(\|x\|) \leq v(t, x)$ при всех $(t, x) \in \times \mathrm{R}_+ \times \mathrm{R}^n$;

существуют пределы $\lim\limits_{t \to \tau_k - 0} v\ (t, x) = v(\tau_k, x)$, $\lim\limits_{t \to \tau_k + 0} v\ (t, x) = v(\tau_k + 0, x)$ при всех $k = 1, 2, \ldots$.

Теорема 1 [15]. Пусть для системы (1) существует функция $v(t, x)$ класса K и монотонная функция $g : \mathrm{R}_+ \to \mathrm{R}_+$, $g(0) = 0$, $g(s) > 0$, $s > 0$, такие, что

$$\frac{d}{dt} v(t, x(t))|_{(9)} \leq -g(v(t, x(t))),$$

если $v(t, x(t+\zeta)) \le p(v(t, x(t)))$ для $\zeta \in [-\tau', 0]$ (условие Разумихина), где $p(s) > s$ при $s > 0$, $p(0) = 0$, $p(s)$ — непрерывна; $v(\tau_k, x(\tau_k^+)) \le v(\tau_k, x(\tau_k))$.

Тогда система (1) асимптотически устойчива.

Постановка задачи. Рассмотрим уравнения динамики энергетической системы с запаздыванием и импульсным воздействием в виде

$$M_i \frac{d^2\theta_i}{dt^2} = P_{mi} - P_{ei} + P_{\tau i}, \quad t \ne \tau_k, \quad k \in \mathrm{N},$$

$$\dot\theta_i(\tau_k^+) = I_i(\theta_i(\tau_k), \dot\theta_i(\tau_k)), \quad \theta_i(\tau_k^+) = \theta_i(\tau_k), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

с начальными условиями

$$\theta_i(t) = \varphi_i(t), \quad t_0 - \tau \le t \le t_0. \tag{4}$$

Здесь M_i — инерционная постоянная; $\theta_i(t)$ — угол поворота ротора i-го генератора, $\theta_i \in PC([-\tau, \infty), \mathbf{R})$; P_{mi} — постоянные, отвечающие за механическую мощность на валу машины; $P_{\tau i} \in C(\mathrm{R}^n, \mathrm{R})$ — управление, запаздывание которого $\tau > 0$; τ_k^+ — сокращенное обозначение для $\tau_k + 0$, $t_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k < \ldots$, $k \in \mathrm{N}$; $\lim\limits_{k\to\infty} \tau_k = \infty$; $I_{ki} \in C^1(\mathrm{R}^2, \mathrm{R})$; $\varphi_i \in C^1([-\tau, 0), \mathrm{R})$; P_{ei} — активные мощности, определяемые из соотношения

$$P_{ei} = \sum_{j=1}^{n} E_i E_j Y_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) + E_i U Y_{i,n+1} \sin\theta_i,$$

где E_i — э.д.с. i-й машины; Y_{ii} — собственные проводимости машины; Y_{ij} — взаимные проводимости, $Y_{ij} = Y_{ji}$, $i, j = 1, \ldots, n$; $Y_{i,n+1}$ — проводимость i-го генератора с шинами постоянного напряжения; U — величина поступающего напряжения. Несмотря на то, что уравнения (3) не содержат демпфирования, любое ненулевое демпфирование, добавленное в модель, не приведет к ее дестабилизации.

Предположим, что известны координаты равновесия θ_i^0, и допустим, что $P_{mi} = \sum\limits_{j=1}^{n} P_{ij}$, где $P_{ii} = E_i B_i \sin(\theta_i^0)$ и $P_{ij} = E_i E_j B_{ij} \sin(\theta_i^0 - \theta_j^0)$ при $i \ne j$. В переменных возмущенного движения будем рассматривать линеаризированную систему в виде

$$M_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -P_i x_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne 1}}^{n} P_{ij}(x_i - x_j) + a_i x(t-\tau) + b_i \dot x_i(t-\tau),$$

$$\dot x_i(\tau_k^+) = c_{ki1} x_i(\tau_k) + c_{ki2} \dot x_i(\tau_k), \; i = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

при начальных условиях

$$x_i(t) = \psi_i(t), \;\; t_0 - \tau \le t \le t_0, \tag{6}$$

где c_{ki1} и c_{ki2} — некоторые действительные постоянные; a_i, b_i — параметры пропорционально-дифференциального регулятора, $i = 1, \dots, n$. Предположим, что величина запаздывания τ удовлетворяет оценке $2\tau < \tau_{k+1} - \tau_k$, $k \in \mathrm{N}$.

Условия асимптотической устойчивости. Сформулируем и докажем теорему, которая является основным результатом. Пусть R_i, T_i, $i = 1, \dots, n,$ — некоторые действительные постоянные. Обозначим

$$\delta = \varliminf_{k \to \infty} (\tau_{k+1} - \tau_k),$$

$$\Delta_i = (b_i(P_i - M_i R_i^2))^2 + M_i (P_i - M_i R_i^2)((b_i R_i + a_i)^2 +$$

$$+ 4R(P_i - a_i)(b_i + R_i M_i)),$$

$$\lambda_{1i} = \frac{a_i^2}{M_i}\left(1 - \frac{M_i(b_i P_i + R_i a_i)^2}{P_i(a_i^2 + 2R_i a_i b_i M_i P_i + b_i^2 M_i P)}\right)^{-1},$$

$$\lambda_{2i} = \frac{a_i^2 b_i^2}{M_i}\left(1 - \frac{M_i(b_i R_i - a_i)^2}{P_i b_i^2 - 2R_i M_i a_i b_i + M_i a_i^2}\right)^{-1}, \tag{7}$$

$$\lambda_{3i} = \frac{4R_i(P_i - M_i R_i^2)}{-4R_i(P_i - a_i)(b_i + R_i M_i) - (b_i R_i + a_i)^2},$$

$$\lambda_{4i} = \frac{P_i(c_{ki2} - 1)^2 - 2R_i M_i (c_{ki2} - 1) c_{ki1} + M_i c_{ki1}^2}{M_i(P_i - M_i R_i^2)}, \tag{8}$$

$$\overline{P}_i = \sum_{j=1}^{n} P_{ij}, \;\; \mu = \min\{R, \{2\mu_i\}_{i=\overline{1,n}}\}, \;\; \mu_i = \frac{b_i(P_i - M_i R_i^2) - \Delta_i^{1/2}}{2M_i(P_i - M_i R_i^2)}, \tag{9}$$

$$\widetilde{\lambda}_1 = \frac{\sqrt{\mu}}{4}\max_{i=\overline{1,n}}\{|b_i|\sqrt{\overline{P}_i \lambda_{3i}}\}, \widetilde{\lambda}_2 = e^{\tau\nu}\sqrt{\frac{(e^{\tau\nu} - 1)\mu}{2\tau\nu}}\max_{i=\overline{1,n}}\left\{\lambda_{1i}\sqrt{\frac{\lambda_{3i}}{\lambda_{1i}e^{\tau\nu} + \lambda_{2i}}}\right\}, \tag{10}$$

$$\widetilde{\lambda}_3 = \sqrt{\frac{(e^{\tau\nu} - 1)\mu}{2\tau\nu}}\max_{i=\overline{1,n}}\left\{\lambda_{2i}\sqrt{\frac{\lambda_{3i}}{\lambda_{1i}e^{\tau\nu} + \lambda_{2i}}}\right\}, \tag{11}$$

$$\bar{\lambda} = \begin{cases} 2\tilde{\lambda}_1 + 2\sqrt{\tilde{\lambda}_3(\tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_3)}, \text{если } \tilde{\lambda}_2^2(\tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_3) < \tilde{\lambda}_3\tilde{\lambda}_1^2, \\ 2\sqrt{(\tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_3)\left(\tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_3 + \dfrac{\tilde{\lambda}_1^2}{\tilde{\lambda}_2}\right)}, \text{если } \tilde{\lambda}_2^2(\tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_3) \ge \tilde{\lambda}_3\tilde{\lambda}_1^2, \end{cases} \tag{12}$$

$$\tilde{\lambda}_4 = e^{\nu(\tau-\delta)}\sqrt{\frac{(e^{\tau\nu}-1)\mu}{2\tau\nu}}\max_{i=\overline{1,n}}\left\{\lambda_{1i}\sqrt{\frac{\lambda_{3i}}{\lambda_{1i}e^{\nu(\tau-\delta)} + \lambda_{2i}}}\right\}, \tag{13}$$

$$\tilde{\lambda}_5 = \sqrt{\frac{(e^{\tau\nu}-1)\mu}{2\tau\nu}}\max_{i=\overline{1,n}}\left\{\lambda_{2i}\sqrt{\frac{\lambda_{3i}}{\lambda_{1i}e^{\nu(\tau-\delta)} + \lambda_{2i}}}\right\}, \; \tilde{\lambda}_6 = e^{\frac{\tau\nu}{2}}\frac{\sqrt{\mu}}{\tau}\max_{i=\overline{1,n}}\{\sqrt{\lambda_{3i}\lambda_{4i}}\}, \tag{14}$$

$$\tilde{\alpha} = \begin{cases} 2\tilde{\lambda}_1 + 2\sqrt{\tilde{\lambda}_5(\tilde{\lambda}_4 + \tilde{\lambda}_5)} + \tilde{\lambda}_6, \text{если } \tilde{\lambda}_4^2(\tilde{\lambda}_4 + \tilde{\lambda}_5) < \tilde{\lambda}_5\tilde{\lambda}_1^2, \\ 2\sqrt{(\tilde{\lambda}_4 + \tilde{\lambda}_5)\left(\tilde{\lambda}_4 + \tilde{\lambda}_5 + \dfrac{\tilde{\lambda}_1^2}{\tilde{\lambda}_4}\right)} + \tilde{\lambda}_6, \text{если } \tilde{\lambda}_4^2(\tilde{\lambda}_4 + \tilde{\lambda}_5) \ge \tilde{\lambda}_5\tilde{\lambda}_1^2. \end{cases} \tag{15}$$

Теорема 2. Предположим, что для системы (5) при некоторых $R_i, T_i \in \mathrm{R}$, $i = 1, \ldots, n$, $\nu \in \mathbf{R}_+$ выполняются следующие неравенства:

$$2\tau < \delta, \tag{16}$$

$$T_i > M_i R_i^2, \tag{17}$$

$$b_i < -R_i M_i, \tag{18}$$

$$4R_i(b_i + R_i M_i)(P_i - a_i) + (P_i - T_i - b_i R_i - a_i)^2 < 0, \tag{19}$$

$$\tau < \frac{\mu - \nu}{\bar{\lambda}}, \tag{20}$$

$$\tau < \frac{\mu - \nu}{\bar{\alpha}}, \tag{21}$$

$$\left(\frac{T_i}{M_i} - R_i^2\right)e^{2\nu\delta} + \left(-\frac{T_i}{M_i}(c_{ki2}^2 + 1) + 2R_i c_{ki1}(c_{ki2} - 1) - c_{ki1}^2 + 2R_i^2 c_{ki2}\right)e^{\nu\delta} + $$
$$+ c_{ki2}^2\left(\frac{T_i}{M_i} - R_i^2\right) > 0, \tag{22}$$

$$c_{ki2}(c_{ki2} + 2R_i) \le e^{\nu\delta}. \tag{23}$$

Тогда система (5) асимптотически устойчива.

Доказательство. Положим $\delta_\varepsilon = \delta - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — некоторый параметр. Рассмотрим вспомогательную функцию $V_0(\mathbf{x})$ для системы (5):

$$V_0(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} (M_i \dot{x}_i^2 + 2M_i R_i x_i \dot{x}_i + T_i x_i^2) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} P_{ij} (x_i - x_j)^2,$$

где $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$, $\mathbf{x}_i = (x_i, \dot{x}_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Условие (17) гарантирует ее положительную определенность. На основе функции $V_0(\mathbf{x})$ при $v \geq 0$ построим кусочно-экспоненциальную функцию $V(\mathbf{x})$, которую используем как функцию Ляпунова:

$$V(t, \mathbf{x}) = V_0(\mathbf{x}) e^{v(t - \tau_k)}, \ \ t \in [\tau_k, \tau_{k+1}), \ \ k \in \mathbf{N}_0, \tag{24}$$

где $\tau_0 = 0$. Для этой функции потребуем выполнения условий теоремы 1:

$$\left.\frac{dV(t, \mathbf{x}(t))}{dt}\right|_{(5)} \leq -\alpha v(t, \mathbf{x})), \ \ t \neq \tau_k, \ \ k \in \mathrm{N}, \tag{25}$$

если

$$pV(t, \mathbf{x}(t)) > V(t + \zeta, \mathbf{x}(t + \zeta)), \zeta \in [-2\tau, 0), \tag{26}$$

где $\alpha > 0$, $p > 1$ — некоторые параметры;

$$V(\tau_k + 0, \mathbf{x}(\tau_k + 0)) \leq V(\tau_k, \mathbf{x}(\tau_k)), \ \ k \in \mathrm{N}. \tag{27}$$

Подставив выражение (24) в (25) и (26), получим условия для функции V_0 при $t \in (\tau_k, \tau_{k+1})$ в виде

$$\left.\frac{dV_0(t, \mathbf{x}(t))}{dt}\right|_{(5)} \leq -(\alpha + v) V_0(t, \mathbf{x}(t)), t \neq \tau_k, k \in \mathrm{N}, \tag{28}$$

если

$$\begin{gathered} pV_0(\mathbf{x}(t)) > e^{v\zeta} V_0(\mathbf{x}(t + \zeta)), \ \ \zeta \in [-2\tau, 0), \ \text{ при } \ \tau_k - t \notin [-2\tau, 0), \\ pV_0(\mathbf{x}(t)) > e^{v(\zeta + \chi(\tau_k - t - \zeta)\Delta\tau_{k-1})} V_0(\mathbf{x}(t + \zeta)), \zeta \in [-2\tau, 0), \text{ при } \tau_k - t \in [-2\tau, 0), \end{gathered} \tag{29}$$

где $\Delta\tau_k = \tau_{k+1} - \tau_k$. Поскольку для любого $\beta > 0$ множество $\{\Delta\tau_k \mid \Delta\tau_k < \delta_\beta, k \in \mathbf{N}\}$ конечно, при исследовании асимптотической устойчивости условие (29) для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно заменить неравенствами

$$\begin{gathered} pV_0(\mathbf{x}(t)) > e^{v\zeta} V_0(\mathbf{x}(t + \zeta)), \zeta \in [-2\tau, 0), \text{ при } \tau_k - t \notin [-2\tau, 0), \\ pV_0(\mathbf{x}(t)) > e^{v(\zeta + \chi(\tau_k - t - \zeta)\delta_\varepsilon)} V_0(\mathbf{x}(t + \zeta)), \zeta \in [-2\tau, 0), \text{ при } \tau_k - t \in [-2\tau, 0), \end{gathered} \tag{30}$$

учитывая, что на ограниченном множестве $\{(\tau_{k-1}, \tau_k \mid \Delta\tau_k < \delta_\varepsilon, k \in \mathbf{N}\}$ функция $V_0(\mathbf{x}(t))$ допускает экспоненциальную оценку по t.

Производную функции V_0 вдоль системы (5) можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}V_0(\mathbf{x}(t))\Big|_{(5)} = -2\sum_{i=1}^{n}(W_i(\mathbf{x}_i)-(\dot{x}_i+R_ix_i)K_i(t))-2\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}R_iP_{ij}x_i(x_i-x_j),$$

где $W_i(\mathbf{x}_i) = -(b_i+R_iM_i)\,\dot{x}_i^2+(P_i-T_i-b_iR_i-a_i)\,x_i\dot{x}_i+R_i(P_i-a_i)\,x_i^2$; $K_i(t)=a_i(x_i(t-\tau)-x_i(t))+b_i(\dot{x}_i(t-\tau)-\dot{x}_i(t))$.

Положительная определенность форм $W_i(\mathbf{x}_i)$ гарантируется условиями (18) и (19) теоремы 2. К слагаемым $K_i(t)$, $i=1,\dots,n$, далее будем применять теорему Ньютона—Лейбница и вид импульсного воздействия в форме дельта-функций. Представим их в виде $K_i(t)=K_{ic}(t)+K_{i\delta}(t)$, где

$$K_{ic}(t)=\int_{t-\tau}^{t}\left(a_ix_i(s)+b_i\left(P_i(s)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{n}p_{ij}(x_i(s)-x_j(s))\right)\right)ds-$$

$$-b_i\int_{t-\tau}^{t}(a_ix_i(s-\tau)+b_i\dot{x}_i(s-\tau))\,ds;$$

$$K_{i\delta}(t)=-b_i\int_{[t-\tau,t)}\delta(s-\tau_k)(c_{ki1}x_i(s)+(c_{ki2}-1)\,\dot{x}_i(s))\,ds.$$

Рассмотрим случай $\tau_k\in[t-2\tau,t)$. В этом случае для слагаемого $K_i(t)$ получим равенство $K_i(t)=K_{ic}(t)$. Пусть $W(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}W_i(\mathbf{x})$. Учитывая соответствующее этому случаю условие Разумихина в (30), для величины $K(t)=\sum_{i=1}^{n}K_i(t)$ на основе исследования характеристических уравнений регулярных пучков квадратичных форм [16] получаем оценку

$$|K(t)|<\tau\lambda_3W(\mathbf{x})+\lambda_2\int_{t-r}^{t}p^{-1}e^{v(t-s)}V_0(\mathbf{x}(t))\,ds+$$

$$+\lambda_1\int_{t-r}^{t}p^{-1}e^{v(t+\tau-s)}V_0(\mathbf{x}(t))\,ds=\tau\lambda_\eta(p)\,V_0(\mathbf{x}),$$

где при произвольных положительных η_{i1}, η_{i2}, $i=1,\dots,n$, константы λ_i, $l=1,2,3$, удовлетворяют равенствам

$$\lambda_1=\max_{i=\overline{1,n}}\left\{\frac{\lambda_{1i}\tau}{\eta_{i1}},\frac{\tau}{4\eta_{i2}}\right\},\ \ \lambda_2=\max_{i=\overline{1,n}}\left\{\lambda_{2i}\frac{\tau}{\eta_{i1}}\right\},$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{4\tau} \max_{i=\overline{1,n}} \{2\eta_{i1} + b_i^2 \overline{P}_i \eta_{i2}) \lambda_{3i}\},$$

константы $\overline{P}_i$, λ_{li}, $l = 1, 2, 3$, $i = 1, \ldots, n$, заданы выражениями (7)—(9), а функция $\lambda(p)$ определяется равенством

$$\lambda_\eta(p) = \frac{e^{\tau v} - 1}{pv\tau} (\lambda_1 e^{\tau v} + \lambda_2) + \lambda_3 \mu,$$

где μ определяется из (9). В этих обозначениях функция $V_0(\mathbf{x}(t))$ допускает оценку

$$\left. \frac{d}{dt} V_0(\mathbf{x}(t)) \right|_{(5)} < (-\mu + \tau \lambda_\eta(p)) V_0(\mathbf{x}(t)).$$

Условие (28) приводит к неравенству $\tau < \dfrac{\mu - \alpha - v}{\lambda_\eta(p)}$, которое представляет собой семейство неравенств с произвольными параметрами α и p. Объединяя по ним эти неравенства, после минимизации величины $\lambda_\eta(p)$ по произвольным параметрам η_{i1}, η_{i2}, $i = 1, \ldots, n$, получим условие (20) теоремы 2, для которого величина $\overline{\lambda}$ определена в (12).

Аналогично можно показать, что при условии $\tau_k \in [t - 2\tau, t - \tau)$, когда необходимо учитывать различные условия Разумихина, также выполняется оценка (17) теоремы 2.

Положим теперь $\tau_k \in [t - \tau, t)$. Тогда на основе условий Разумихина можно получить неравенства

$$\int_{t-\tau}^{t} V_0(\mathbf{x}(s - \tau))\, ds < \frac{e^{v(\tau - \delta_\varepsilon)} (e^{v\tau} - 1)}{pv} V_0(\mathbf{x}(t)),$$

$$\int_{t-\tau}^{t} V_0(\mathbf{x}(s))\, ds < \frac{e^{v\tau} - 1}{pv} V_0(\mathbf{x}(t)),$$

откуда следует, что

$$\left| \sum_{i=1}^{n} (\dot{x}_i + R_i x_i) K_{ic}(t) \right| \le \left(\frac{e^{v\tau} - 1}{pv} (\lambda_1 e^{\tau(v - \delta_\varepsilon)} + \lambda_2) + \tau \lambda_3 \mu \right) V_0(\mathbf{x}).$$

Оценим далее аналогичную сумму со слагаемыми $K_{i\delta}(t)$:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} (\dot{x}_i + R_i x_i) K_{i\delta}(t) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} b_i (\dot{x}_i + R_i x_i) ((c_{ki2} - 1) \dot{x}_i(\tau_k) + c_{ki1} x_i(\tau_k)) \right| \le$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_{3i}(\dot{x}_i + R_i x_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^2}{\eta_{3i}}((c_{ki2}-1)\dot{x}_i(\tau_k) + c_{ki1}x_i(\tau_k))^2\right),$$

где $\eta_{3i} > 0$ — некоторые постоянные. Можно показать, что $((c_{ki2}-1)\dot{x}_i(\tau_k) + c_{ki1}x_i(\tau_k))^2 \leq \lambda_{4i}(M_i\dot{x}_i^2 + 2M_iR_ix_i\dot{x}_i + T_ix_i^2)$, где λ_{4i} определяется из (8). Обозначим далее

$$\lambda_4 = \frac{1}{4\tau}\max_{i=\overline{1,n}}\left\{\frac{b_i^2\lambda_{4i}}{\eta_{3i}}\right\}.$$

Тогда верной будет оценка

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^2}{\eta_{3i}}((c_{ki2}-1)\dot{x}_i(\tau_k) + c_{ki1}x_i(\tau_k))^2 < \lambda_4 V_0(\mathbf{x}(\tau_k)).$$

Введем обозначение

$$\lambda_5 = \frac{1}{4\tau}\max_{i=\overline{1,n}}\{((2\eta_{i1} + b_i^2\overline{P}_i\eta_{2i})\tau + 2\eta_{3i})\lambda_{3i}\}.$$

Тогда абсолютная величина $K(t)$ может быть оценена в виде $|K(t)| < \tau\alpha_\eta(p)V_0(\mathbf{x})$, где

$$\alpha_\eta(p) = \frac{e^{\nu\tau}-1}{p\nu}(\lambda_1 e^{\tau(\nu-\delta_\varepsilon)} + \lambda_2) + \frac{\lambda_4}{p}e^{\nu\tau} + \lambda_5\mu.$$

Поэтому

$$\left.\frac{d}{dt}V_0(\mathbf{x}(t))\right|_{(5)} < (-\mu + \tau\alpha_\eta(p))V_0(\mathbf{x}(t)).$$

Получим семейство неравенств $\tau < \dfrac{\mu-\alpha-\nu}{\alpha_\eta(p)}$ с произвольными параметрами α и p. Объединяя по ним эти неравенства после минимизации величины $\alpha_\eta(p)$ по произвольным параметрам η_{i1}, η_{i2}, η_{i3}, $i = 1, \ldots, n$, получим условие (21) теоремы 2 с величиной $\overline{\alpha}$, определяемой в (15).

Запишем теперь условие (27), воспользовавшись заменой (24). Получим

$$V_0(\mathbf{x}(\tau_k - 0)) \leq e^{\nu(\tau_k-\tau_{k-1})}V_0(\mathbf{x}(\tau_k)),\ k \in \mathrm{N}. \tag{31}$$

Из системы неравенств (31) при всех k, кроме принадлежащих конечному множеству, следует оценка $V_0(\mathbf{x}(\tau_k + 0)) \leq e^{\nu\delta_\varepsilon}V_0(\mathbf{x}(\tau_k))$, $k \in \mathrm{N}$. Поскольку $\nu > 0$, данная оценка всегда верна для компонентов функции Ляпунова, отвечающих за взаимосвязи. Для прочих ее компонентов при $i=\overline{1,n}$ получим систему неравенств

$$M_i(c_{ki1}x_i+c_{ki2}\dot{x}_i)^2+2M_iR_i(c_{ki1}x_i+c_{ki2}\dot{x}_i)x_i+T_ix_i^2\le$$
$$\le e^{\nu\delta_\varepsilon}(M_i\dot{x}_i^2+2M_iR_i\dot{x}_ix_i+T_ix_i^2). \tag{32}$$

Объединяя по ε условия, гарантирующие выполнение неравенства (32) между квадратичными формами, получаем условия (22) и (23) теоремы 2. Теорема доказана.

В доказательстве теоремы 2 условия (22) и (23) получены на основе анализа соответствующих слагаемых функции V_0. Использование такого подхода объясняется тем, что вопрос знакоопределенности функции V_0, вообще говоря, при больших значениях n приводит к многомерной задаче знакоопределенности квадратичной формы, решение которой может быть затруднительным.

Условие $\nu\ge 0$, используемое при построении функции Ляпунова (24), в случае $\sup\{\tau_{k+1}-\tau_k\}=\infty$ является принципиальным. Оно исключает возможность стабилизирующего эффекта от импульсного воздействия, что для данной задачи является естественным предположением. Таким образом, модель энергосистемы без импульсных возмущений полагается априори устойчивой.

Выводы

Полученные достаточные условия асимптотической устойчивости энергосистемы представлены в виде системы неравенств с многочисленными свободными параметрами. Использование отдельных свободных параметров при построении функции Ляпунова, соответствующих каждому генератору, позволяет считать полученные результаты более эффективными, чем результаты работы [13] для случая энергосистемы с различными генераторами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kundur P.* Power System Stability and Control. — NY: McGraw-Hill, 1994. — 1176 p.
2. *Pavella M., Ernst D., Ruiz-Vega D.* Transient stability of power systems: a unified approach to assessment and control.— Boston: Kluver Academic Publisher, 2000. — 237 p.
3. *Chang H.D., Chu C.C., Cauley G.* Direct stability analysis of electric power systems using energy functions: Theory, applications, and perspective // Proc. of the IEEE. — 1995. — V. 13. — P. 1497—1529.
4. *Груйич Л.Т., Мартынюк А.А., Риббенс-Павелла М.* Устойчивость крупномасштабных систем при структурных возмущениях. — Киев : Наук. думка, 1984. — 308 с.

5. *Zribi M., Mahmoud M.S., Karkoub M., Lie T.T.* H∞-controllers for linearised time-delay power systems // IEE Proceedings-Generation, Transmission and Distribution. — 2000. — V. 147, № 6. — P. 401—408.
6. *Chaudhuri B., Majumder R., Pal B.C.* Wide-area measurement-based stabilizing control of power system considering signal transmission delay / // IEEE Transactions on Power Systems. — 2004. — V. 19, №. 4. — P. 1971—1979.
7. *Yao W. et al.* Delay-dependent stability analysis of the power system with a wide-area damping controller embedded // IEEE Transactions on Power Systems. — 2011. — V. 26, № 1. — P. 233—240.
8. *Wu H., Ni H. , Heydt G.T.* The impact of time delay on robust control design in power systems // Power Engineering Society Winter Meeting, 2002, New York. — IEEE. — 2002. — P. 1511—1516.
9. *Milano F., Anghel M.* Impact of time delays on power system stability // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. — 2012. — V. 59, № 4. — P. 889—900.
10. *Jia H., Yu X., Yu Y., Wang C.* Power system small signal stability region with time delay // Intern. Journal of Electrical Power & Energy Systems. — 2008. — V. 30, № 1. — P. 16—22.
11. *Berger K., Anderson R. B., Kroninger H.* Parameters of lightning flashes // Electra. — 1975. — № 41. — P. 23—37.
12. *Мартынюк А.А., Иванов И.Л.* О связной устойчивости трехмашинной энергосистемы при импульсных возмущениях // Доп. НАН України. — 2013. — № 7. — С. 64—71.
13. *Иванов И.Л.* Устойчивость одной модели энергосистемы с запаздыванием и импульсным воздействием// Зб. праць Ін-ту математики НАН України «Аналітична механіка та її застосування». — 2012. — **9**, № 1. — С. 114—127.
14. *Иванов И.Л.* Регулирование энергосистем при импульсных возмущениях // Электрон. моделирование. — 2014. — **36**, № 5. — С. 17—26.
15. *Іванов І.Л.* Підхід до дослідження стійкості імпульсних систем з запізненням // Зб. праць Ін-ту математики НАН України «Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики». — 2015. — **12**, № 5. — С. 30—38.
16. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М. : Наука, 1966. — 576 с.

I.L. Ivanov, A.A. Martynyuk

DELAYED CONTROL OF POWER SYSTEM UNDER PULSE PERTURBATIONS

The paper deals with the delayed control of a power system under the pulse perturbations. Suffcient conditions of asymptotic stabilization of this system by the delayed proportional differentional controller are obtained via developed approach, based on direct Lyapunov method and Razumikhin technique. Obtained analytical results are represented as a system of nonlinear algebraic inequalities with a set of free parameters.

K e y w o r d s: power system, Lyapunov stability, Razumikhin approach, time delay, pulse effects, control.

REFERENCES

1. Kundur, P. (1994), Power system stability and sontrol, McGraw-Hill, USA
2. Pavella, M., Ernst, D. and Ruiz-Vega, D. (2000), Transient stability of power systems: a unified approach to assessment and control, Kluver Academic Publisher, Boston, USA.
3. Chang, H.D., Chu, C.C. and Cauley, G. (1995), Direct stability analysis of electric power systems using energy functions: Theory, applications, and perspective, *Proceedings of the IEEE,* Vol. 13, pp. 1497-1529.

4. Gruyich, L.T., Martynyuk, A.A. and Ribbens-Pavella, M. (1984), *Ustoichivost krupno-masshtabnyh system pri strukturnykh vozmushcheniyakh* [Large-scale systems stability under structural perturbations], Naukova dumka, Kiev, Ukraine.
5. Zribi, M., Mahmoud, M.S., Karkoub, M. and Lie, T.T. (2000), H∞-controllers for linearised time-delay power systems, *IEE Proceedings-Generation, Transmission and Distribution*, Vol. 147, no. 6, pp. 401-408.
6. Chaudhuri, B., Majumder, R. and Pal, B.C. (2004), "Wide-area measurement-based stabilizing control of power system considering signal transmission delay", *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 19 no. 4, pp. 1971-1979.
7. Yao, W., Jiang, L., Wu, Q.H., Wen, J.Y. and Cheng, S.J. (2011), "Delay-dependent stability analysis of the power system with a wide-area damping controller embedded", *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 26 no. 1, pp. 233-240.
8. Wu, H., Ni, H. and Heydt, G.T. (2002), "The impact of time delay on robust control design in power systems", *Power Engineering Society Winter Meeting*, *IEEE,* 2002, New York, pp. 1511-1516.
9. Milano, F. and Anghel, M. (2012), "Impact of time delays on power system stability", *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, Vol. 59 no. 4, pp. 889-900.
10. Jia, H., Yu, X., Yu, Y. and Wang, C. (2008), "Power system small signal stability region with time delay", *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, Vol. 30, no. 1, pp. 16-22.
11. Berger, K., Anderson, R.B. and Kroninger, H. (1975), "Parameters of lightning flashes", *Electra*, no. 41, pp. 23-37.
12. Martynyuk, A.A. and Ivanov, I.L. (2013), "On the connective stability of three-machine power system under impulsive perturbations", *Dopovidi NAN Ukrainy*, no. 7, pp. 64-71.
13. Ivanov, I.L. (2012), "Stability of a model of a power system with delay and pulse effects", *Analitychna mekhanika ta ii zastosuvannya. Zbirnyk prats Institutu Matematyky NAN Ukrainy*, Vol. 9, no. 1, pp. 114-127.
14. Ivanov, I.L. (2014), "Regulation of power systems under impulsive perturbations", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 36, no. 5, pp. 17-26.
15. Ivanov, I.L. (2015), "An approach for stability analysis of impulsive systems with delay", *Mathematychni problemy mekhaniky i obchyslyuvalnoi tekhniky. Zbirnyk prats Institutu Matematyky NAN Ukrainy*, Vol. 12, no. 5, pp. 30-38.
16. Gantmakher, F.R. (1966), *Teoriya matrits* [The theory of matrices], Nauka, Moscow, USSR.

Поступила 04.11.16

ИВАНОВ Игорь Львович, канд. физ.-мат. наук, мл. науч. сотр. Ин-та механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины. В 2007 г. окончил Черкасский национальный университет им. Б. Хмельницкого, в 2009 г. — Киевский национальный университет им. Т. Шевченко. Область научных исследований — управление и устойчивость систем с запаздыванием и импульсным воздействием.

МАРТЫНЮК Анатолий Андреевич, академик НАН Украины, зав. отделом Ин-та механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины. В 1962 г. окончил Черкасский педагогический ин-т. Область научных исследований — теория устойчивости движения систем, моделируемых обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями с частными производными; управление движением; теория крупномасштабных систем (детермированных, стохастических, а также сингулярно-возмущенных и импульсных).