УДК 004.94

Я.А. Калиновский, д-р техн. наук
Ин-т проблем регистрации информации НАН Украины
(Украина, 03113, Киев, ул. Н. Шпака, 2,
тел. 4542138, e-mail: kalinovsky@i.ua)

Эффективные алгоритмы решения уравнений изоморфизма гиперкомплексных числовых систем с помощью представлений экспонент

Разработан метод определения изоморфности гиперкомплексных числовых систем с помощью анализа представлений экспоненциальных функций в этих системах. Показано, что такой подход значительно повышает эффективность алгоритмов решения систем уравнений изоморфизма.

Розроблено метод визначення ізоморфності гіперкомплексних числових систем за допомогою аналізу представлень експоненціальних функцій в цих системах. Показано, що такий підхід значно підвищує ефективність алгоритмів розв’язання систем рівнянь ізоморфізму.

Ключевые слова: гиперкомплексная числовая система, изоморфизм, экспонента, система уравнений изоморфизма, оператор изоморфизма.

Объем вычислений при решении конкретных научно-технических задач существенно зависит от организации этих вычислений [1, 2]. Одним из наиболее эффективных методов организации вычислений является переход от исходного представления информации к такому виду, при котором оперирование с данными становится более продуктивным.

Идея перехода от одних объектных пространств к другим плодотворна и в области гиперкомплексного исчисления [3—6], так как среди множества гиперкомплексных числовых систем (ГЧС) фиксированной размерности существуют подмножества изоморфных между собой систем. Две ГЧС являются изоморфными, если между ними существует такое взаимно однозначное соответствие, что образ операции над операндами в одной ГЧС равен операции над образами этих же операндов в другой ГЧС [7]. Это означает, что вычисления можно делать в любой изоморфной ГЧС. Результат при этом будет одинаковым при переводе данных и результатов из одной ГЧС в другую.

Две изоморфные ГЧС подобны относительно определяющих их операций, но могут иметь и отличия, весьма важные для разработчиков рациональных вычислительных процессов. Таблицы умножения изоморфных ГЧС могут иметь различное число нулевых ячеек: в сильнозаполненной ГЧС — мало нулей, в слабозаполненной — много. Поэтому оперирование с гиперкомплексными числами в сильнозаполненной ГЧС сопряжено с необходимостью выполнения большего числа операций над вещественными числами, чем в слабозаполненной [8].

Опыт разработки математических моделей с применением ГЧС свидетельствует о необходимости применения обоих видов ГЧС: сильнозаполненных — для идентификации моделей, слабозаполненных — для интенсификации процесса моделирования [9—11]. Следовательно, для успешного использования методов ГЧС в математическом моделировании необходимо иметь множество пар изоморфных ГЧС различной размерности и типов. Значительным препятствием при этом являются трудности установления изоморфизма (или отсутствия его) двух ГЧС.

Создание таких алгоритмов решения систем квадратичных уравнений изоморфизма пары ГЧС, которые значительно упрощали бы их решение, представляется весьма актуальной задачей.

Система уравнений изоморфизма ГЧС. Гиперкомплексные числовые системы Γ_1 и Γ_2 называются изоморфными, $\Gamma_1 \simeq \Gamma_2$, если существует такое взаимно однозначное отображение L пространства Γ_1 на пространство Γ_2, что выполняются следующие свойства:

$$L(a+b)=L(a)+L(b), \tag{1}$$

$$L(a\times b)=L(a)\times L(b), \tag{2}$$

где $a, b\in \Gamma_1$, $L(a), L(b)\in \Gamma_2$. Операции умножения в левой и правой частях (2) различаются в соответствии со структурными константами систем Γ_1 и Γ_2. Из (2) следует, что Γ_1 и Γ_2 — линейные пространства с базисами соответственно $e=\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ и $f=\{f_1, f_2, ..., f_n\}$. Поэтому между ними можно установить взаимно однозначное линейное соответствие с вещественной матрицей A [7, 8]:

$$\begin{aligned} e_1 &= \alpha_{11}f_1+\alpha_{12}f_2+...+\alpha_{1n}f_n,\\ e_2 &= \alpha_{21}f_1+\alpha_{22}f_2+...+\alpha_{2n}f_n,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ e_n &= \alpha_{n1}f_1+\alpha_{n2}f_2+...+\alpha_{nn}f_n. \end{aligned} \tag{3}$$

ISSN 0204–3572. Electronic Modeling. 2017. V. 39. № 1

При этом детерминант матрицы A отличен от нуля, $\|A\|\neq 0$, поскольку преобразование (3) имеет обратное преобразование A^{-1}.

Как вытекает из теории линейных пространств, для каждой пары линейно независимых базисов можно найти взаимно однозначное линейное преобразование (3), которое переводит один базис в другой, и наоборот. Но выполнение требования (2), которое сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений, одновременно с требованием (1) не всегда возможно. Действительно, если

$$a=\sum_{i=1}^{n}a_i e_i,\ \ b=\sum_{i=1}^{n}b_i e_i,\ \ ab=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_i b_j \gamma_{ij}^{k} e_k,$$

то

$$L(ab)=L\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_i b_j \gamma_{ij}^{k} e_k\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ij}^{k}a_i b_j L(e_k).$$

Однако, как следует из (3), $L(e_k)=\sum_{s=1}^{n}\alpha_{ks}f_s$. Поэтому

$$L(ab)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{ks}\gamma_{ij}^{k}a_i b_j f_s. \tag{4}$$

В то же время,

$$L(a)\times L(b)=\sum_{i=1}^{n}a_i L(e_i^1)\sum_{j=1}^{n}b_j L(e_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}a_i f_k\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{js}b_j f_s=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{y=1}^{n}\alpha_{ik}\alpha_{js}\gamma_{ks}^{y}a_i b_j f_y. \tag{5}$$

Приравнивая в правых частях (4) и (5) выражения для одинаковых значений $a_i b_j e_r^1$, получаем n^3 нелинейных алгебраических уравнений от n^2 неизвестных α_{ij}:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{ks}\gamma_{ij}^{k}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\alpha_{ik}\alpha_{js}\gamma_{ks}^{r},\quad i,j,k\in 1,\ldots,n. \tag{6}$$

Эта система переопределена. Она всегда имеет тривиальное решение: $\alpha_{ij}=0,\ i,j=1,\ldots,n$. Однако при выполнении условия $\|A\|\neq 0$ нетривиальных вещественных решений может не существовать. Поэтому, если существует хотя бы одно нетривиальное вещественное решение, то две ГЧС, Γ_1 и Γ_2, являются изоморфными, если таких решений не существует, то они не изоморфны.

Решение таких систем связано со значительными трудностями даже при использовании систем аналитических вычислений Maple, Mathematica и др. При использовании системы Maple успешно решаются системы уравнений для $n = 3$, но уже при $n = 4$ время решения занимает много часов, а в некоторых случаях вообще не удается получить решение. В связи с этим весьма актуальной является разработка таких методов установления изоморфизма между ГЧС, которые не требуют решения квадратичных систем типа (6), или хотя бы упрощают их решение. Значительного прогресса в этом направлении можно добиться с помощью представлений экспоненциальных функций в ГЧС.

Представления экспоненциальных функций в ГЧС. Рассмотрим основные особенности одного из универсальных методов построения экспоненты с помощью ассоциированной системы линейных дифференциальных уравнений [4, 12—14]. Пусть X и M — гиперкомплексные числа:

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad M = \sum_{i=1}^{n} m_i e_i,$$

а $\overline{X} = (x_1, ..., x_n)^T$ и $\overline{M} = (m_1, ..., m_n)^T$ — вектор-столбцы, составленные из компонентов гиперкомплексных чисел. Представление экспоненты в ГЧС $\Gamma(e, n)$ от числа $M \in \Gamma(e, n)$, которое обозначим $\mathrm{Exp}(M)$, есть частное решение обыкновенного гиперкомплексного линейного дифференциального уравнения

$$\dot{X} = MX \tag{7}$$

при начальном условии $\mathrm{Exp}(0) = \varepsilon$, где $\Gamma(e, n)$ — ГЧС размерности n с базисом e и единичным элементом ε [4]. Дифференцирование в (7) предполагается по скалярному аргументу.

Для решения уравнения (7) его необходимо представить в векторно-матричной форме. При этом $\overline{\dot{X}} = (\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)^T$, а вектор-столбец $\overline{MX}$, полученный из гиперкомплексного числа MX, представим в виде произведения некоторой матрицы М размером $n \times n$, элементы которой есть линейные комбинации компонентов гиперкомплексного числа M, на вектор-столбец $\overline{X}$, т.е. $\overline{MX} = \mathrm{M}\overline{X}$. Тогда гиперкомплексное уравнение (7) превратится в систему из n уравнений, называемую ассоциированной системой линейных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\overline{X}} = \mathrm{M}\overline{X}. \tag{8}$$

Далее находим характеристические числа $\lambda_1, ..., \lambda_n$ матрицы М, т.е. решаем характеристическое уравнение $\mathrm{M} - \lambda E = 0$. Таким образом, характеристические числа $\lambda_1, ..., \lambda_n$ зависят от гиперкомплексного числа M. Затем строим общее решение, зависящее от n^2 произвольных постоянных, из которых $n^2 - n$ линейно зависимы от n свободных переменных. Для получения этих линейных зависимостей необходимо решить систему линейных уравнений [1, 3], после чего можно получить общие решения (8), зависящие от n произвольных постоянных — $\overline{X} = (t, C_1, ..., C_n)$, значения которых устанавливаются с помощью начального условия $\mathrm{Exp}(0) = \varepsilon$. Компоненты вектор-столбца решения $\overline{X}$ и будут компонентами экспоненты от гиперкомплексного числа M:

$$\mathrm{Exp}(M) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i e_i .$$

Метод построения представлений экспоненты от гиперкомплексного переменного с помощью ассоциированной системы линейных дифференциальных уравнений легко формализуется для построения алгоритмов и программ в системах символьных вычислений. Примеры построения представлений приведены в работе [4, гл. 8].

Нормализованная форма представления экспоненты. В общем случае множество корней $\lambda_1, ..., \lambda_n$ характеристического уравнения $\mathrm{M} - \lambda E = 0$ состоит из n корней и, как следует из теории линейных дифференциальных уравнений, может быть разбито на следующие подмножества:

1. *Подмножество однократных вещественных корней* $\lambda_i \in R$. В представлении экспоненты им соответствуют слагаемые вида $x_i = \overline{x}_i \cdot e_i = C_i e^{\lambda_i} e_i$.

2. *Подмножество сопряженных пар комплексных корней* $\lambda_i, \lambda_{i+1} = \overline{\lambda}_i \in C$. Обычно при решении систем линейных дифференциальных уравнений для пары комплексно сопряженных корней частное решение имеет вид $x = e^{\mathrm{Re}(\lambda t)}(C_1 \cos(\mathrm{Im}(\lambda)\, t) + C_2 \sin(\mathrm{Im}(\lambda)\, t))$. В данном случае для записи решения не будем применять формулу Эйлера и представление вещественной экспоненты через гиперболические функции $e^{\varphi} = \mathrm{ch}\,\varphi + \mathrm{sh}\,\varphi$, так как это значительно усложняет структуру формулы представления и затрудняет ее анализ. Вместо этого для пары комплексно-сопряженных корней компоненты представления записываем в виде двух слагаемых: $x_i = \overline{x}_i \cdot e_i = C_i e^{\lambda_i} e_i$, $x_{i+1} = \overline{x}_{i+1} \cdot e_{i+1} = \overline{C}_i e^{\overline{\lambda}_i} e_{i+1}$, где произвольные константы не вещественные, а комплексные.

3. *Подмножество вещественных кратных корней.* Пусть кратность одного из наборов вещественных кратных корней равна s: $\lambda_{i+1} = \lambda_{i+2} = \ldots$ $\ldots = \lambda_{i+s}$. Тогда, как следует из теории линейных дифференциальных уравнений, этой совокупности корней будут соответствовать s компонентов общего решения вида

$$x_{i+j} = \overline{x}_{i+j} e_{i+j} = (P_0^j + P_1^j + \ldots + P_s^j)\, e^{\lambda_{i+j}} e_{i+j}, \;\; j = 1, \ldots, s,$$

где P_k^j — полином k-й степени от переменных $m_1,...,m_n$. Вид этих полиномов определяется из определяющего уравнения ассоциированной системы линейных дифференциальных уравнений.

4. *Подмножество кратных пар комплексно-сопряженных корней*. Пусть кратность одного из наборов кратных пар комплексно-сопряженных корней равна s. Тогда всего в этом наборе будет $2s$ корней: $\lambda_{i+1} = =\lambda_{i+3} = ... = \lambda_{i+2s-1}$, $\lambda_{i+2} = ... = \lambda_{i+2s} = \overline{\lambda}_{i+1}$. Этой совокупности корней соответствуют $2s$ компонентов общего решения вида

$$x_{i+j} = \bar{x}_{i+j} e_{i+j} = (P_0^j + P_1^j + ... + P_s^j)\, e^{\lambda_{i+j}} e_{i+j},$$

$$x_{i+j+1} = \bar{x}_{i+j+1} e_{i+j+1} = (\overline{P}_0^j + \overline{P}_1^j + ... + \overline{P}_s^j)\, e^{\overline{\lambda}_{i+j}} e_{i+j+1}, \quad j = 1, 3, ..., 2s-1,$$

где коэффициенты полиномов будут комплексными числами.

Таким образом, представление экспоненты является суммой слагаемых, каждое из которых — одночлен. В случаях 1 и 2 он имеет три сомножителя: вещественная или комплексная произвольная постоянная, экспонента от вещественного или комплексного характеристического корня и базисный элемент. В случаях 3 и 4 он имеет четыре сомножителя. К трем предыдущим сомножителям добавляется полином (s – 1)-й степени с вещественными или комплексными переменными. Такую форму представления экспоненты будем называть нормализованной формой представления.

Влияние оператора изоморфизма на представление экспоненты. Изоморфизм двух ГЧС означает существование такого линейного преобразования базисов, детерминант которого не равен нулю, что для операций сложения и умножения образ результата выполнения этих операций равен результату выполнения операции над операндами. Поэтому любое выражение с конечным числом гиперкомплексных операций преобразуется с помощью этого же линейного преобразования. Представление экспоненты в виде степенного ряда имеет счетное число операций. Однако и в этом случае изоморфное преобразование представления экспоненты от числа в одной ГЧС приведет к представлению экспоненты от образа этого числа в другой ГЧС.

Действительно, пусть даны две изоморфные ГЧС, $\Gamma_1(e,n) \simeq \Gamma_2(f,n)$, и линейное изоморфное преобразование L:

$$\Gamma_1(e,n) \overset{L}{\simeq} \Gamma_2(f,n), \tag{9}$$

$$L: e_k = \sum_{j=1}^{n} l_{kj} f_j, \quad k = 1, ..., n. \tag{10}$$

Число $X=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \Gamma_1(e,n)$ при переходе к системе $\Gamma_2(f,n)$ с помощью изоморфизма L преобразуется так:

$$X=x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_ne_n \Leftrightarrow x_1(l_{11}f_1+l_{12}f_2+\ldots+l_{1n}f_n)+$$
$$+x_2(l_{21}f_1+l_{22}f_2+\ldots+l_{2n}f_n)+\ldots+x_n(l_{n1}f_1+l_{n2}f_2+\ldots+l_{nn}f_n)=$$
$$=(x_1l_{11}+x_2l_{21}+\ldots+x_nl_{n1})f_1+(x_1l_{12}+x_2l_{22}+\ldots+x_nl_{2n})f_2+\ldots$$
$$\ldots+(x_1l_{1n}+x_2l_{2n}+\ldots+x_nl_{nn})f_n=y_1f_1+\ldots+y_nf_n\in\Gamma_2(f,n),$$

где $y_i=x_1l_{1i}+x_2l_{2i}+\ldots+x_nl_{ni}$. Тогда

$$\overline{Y}=L^T\,\overline{X}. \qquad (11)$$

Компоненты гиперкомплексного числа $Y\in\Gamma_2(f,n)$ (вектор-столбец $\overline{Y}$) получаются умножением слева вектор-столбца $\overline{X}$ на транспонированную матрицу оператора изоморфного преобразования L^T. Значит, если к экспоненте от гиперкомплексного числа $X=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \Gamma_1(e,n)$ применить линейное преобразование изоморфизма L, то получится экспонента от гиперкомплексного числа $Y\in\Gamma_2(f,n)$, являющегося образом числа X:

$$\mathrm{Exp}(X)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{X^k}{k!}\overset{L}{\Leftrightarrow}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{Y^k}{k!}=\mathrm{Exp}(Y)\in\Gamma_2(f,n).$$

Следовательно, подвергая изоморфному преобразованию экспоненту в одной ГЧС, можно получить экспоненту в изоморфной ГЧС от чисел-образов. Это относится и к представлениям экспонент, поскольку при их построении по степенному ряду получаем единственное представление.

Таким образом, если есть две изоморфные системы (9) и оператор изоморфизма (10), то изоморфное преобразование представления экспоненты в одной из ГЧС есть представление экспоненты в другой ГЧС.

Набор корней характеристического уравнения и изоморфизм ГЧС. Рассмотрим случай, когда ГЧС $\Gamma_1(e,n)$ является прямой суммой k числовых систем Γ_{1i}:

$$\Gamma_1=\bigoplus_{i=1}^{k}\Gamma_{1i}.$$

Как показано выше, нормализованная форма представления ее экспоненты состоит из нормализованных форм представлений экспонент каждой из входящих подсистем, т.е. число слагаемых равно числу корней характеристического уравнения, которое равно, в свою очередь, размерности всей

ГЧС. Каждое слагаемое определяется, прежде всего, одним из корней характеристического уравнения.

Перейдем с помощью линейного преобразования базиса e от системы $\Gamma_1(e,n)$ к изоморфной ей системе $\Gamma_2(f,n)$. Рассмотрим, как изменятся при этом корни характеристического уравнения, входящие в слагаемые экспоненты системы $\Gamma_1(e,n)$. Поскольку эти корни являются функциями от компонентов числа $\overline{M}$, они будут изменяться согласно (11), т.е. умножением слева вектор-столбца $\overline{M}$ на транспонированную матрицу оператора изоморфного преобразования L^T. Следовательно, корни характеристического уравнения преобразуются линейно, а это значит, что их тип не изменяется: различные вещественные корни переходят в различные вещественные, различные комплексные — в различные комплексные, одинаковые корни — в одинаковые, вещественные не могут преобразоваться в комплексные, и наоборот.

Действительно, характеристическое уравнение $\mathrm{M}-\lambda E=0$ можно представить в виде $(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)=0$, где λ_i, $i=1,\ldots,n$, — корни характеристического уравнения. Поскольку они зависят от компонентов $\overline{M}$, тип их линейного преобразования не меняется. Это означает, что нормальная форма экспоненты системы $\Gamma_2(f,n)$ имеет такую же структуру, как экспонента в системе $\Gamma_1(e,n)$. Если базис системы $\Gamma_1(e,n)$ преобразовать с помощью другого линейного преобразования, то получится система $\Gamma_3(g,n)$, изоморфная $\Gamma_1(e,n)$: $\Gamma_3(g,n)\simeq\Gamma_1(e,n)$. Ввиду транзитивности отношения изоморфизма получаем $\Gamma_3(g,n)\simeq\Gamma_2(f,n)$.

Таким образом, преобразуя с помощью всевозможных невырожденных линейных преобразований какой-либо базис, которому соответствует фиксированный набор корней характеристического уравнения, можно получить весь класс изоморфизмов. Следовательно, данному классу изоморфизмов будет соответствовать один и только один набор корней характеристического уравнения.

К сожалению, обратное утверждение неверно. Как следует из [8], одному и тому же набору корней могут соответствовать различные неизоморфные ГЧС. Это может произойти в том случае, когда в составе корней характеристического уравнения есть кратные вещественные или (и) комплексные корни кратности, больше двух. Корням такой кратности соответствуют несколько классов изоморфизмов неразложимых ГЧС [4], а кратности два соответствует только один класс изоморфизмов системы дуальных чисел D, таблица умножения которых имеет вид

D	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2
e_2	e_2	0

.

Кратности три соответствуют два класса изоморфизмов. Их таблицы умножения имеют вид

Γ_{31}	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	0	0
e_3	e_3	0	0

,

Γ_{32}	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	e_3	0
e_3	e_3	0	0

.

В обеих ГЧС характеристические уравнения имеют трехкратные корни $\lambda_{1,2,3} = m_1$. Кратности четыре соответствуют шесть классов изоморфизмов. Их таблицы умножения имеют следующий вид:

Γ_{41}	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	e_4	0	0
e_4	e_4	$-e_3$	0	0

,

Γ_{42}	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	0	0	0
e_3	e_3	0	0	0
e_4	e_4	0	0	0

,

Γ_{43}	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	e_3	0	0
e_3	e_3	0	0	0
e_4	e_4	0	0	0

,

Γ_{44}	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	e_4	0	0
e_3	e_3	0	e_4	0
e_4	e_4	0	0	0

,

Γ_{45}	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	e_4	0	0
e_3	e_3	0	$-e_4$	0
e_4	e_4	0	0	0

,

Γ_{46}	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	e_4	e_4	0
e_3	e_3	e_4	0	0
e_4	e_4	0	0	0

.

В ГЧС Γ_{41} характеристическое уравнение имеет двукратную пару комплексно-сопряженных корней: $\lambda_{1,2} = m_1 \pm i\, m_2$, $\lambda_{3,4} = m_1 \pm i\, m_2$. Остальные ГЧС имеют вещественные четырехкратные корни $\lambda_{1,2,3,4} = m_1$. Поэтому можно утверждать, что система Γ_{41} не изоморфна ни одной из остальных ГЧС. Однако изоморфизм систем $\Gamma_{42}, \Gamma_{43}, \Gamma_{44}, \Gamma_{45}, \Gamma_{46}$ невозможно определить только по характеристическим корням. Их неизоморфность установлена посредством решения систем уравнений (6), для чего потребовалось много времени.

Пример. Рассмотрим такую пару ГЧС — бикомплексную систему $C \oplus C\,(e,4)$ и систему квадриплексных чисел $K\,(f\,,4)$, — таблицы умножения которых имеют вид

$C \oplus C$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	0	0
e_2	e_2	$-e_1$	0	0
e_3	0	0	e_3	e_4
e_4	0	0	e_4	$-e_3$

,

$K\,(f,4)$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	e_4	$-e_1$	$-e_2$
e_4	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1

,

и определим их изоморфность. Будем считать, что оператор изоморфизма имеет общий вид

$$L:\begin{cases} e_1 = x_{11} f_1 + x_{12} f_2 + x_{13} f_3 + x_{14} f_4, e_3 = x_{31} f_1 + x_{32} f_2 + x_{33} f_3 + x_{34} f_4, \\ e_2 = x_{21} f_1 + x_{22} f_2 + x_{23} f_3 + x_{24} f_4, e_4 = x_{41} f_1 + x_{42} f_2 + x_{43} f_3 + x_{44} f_4. \end{cases} \tag{12}$$

Поскольку единичные элементы этих систем — соответственно $\varepsilon_{C\oplus C} = e_1 + e_3$ и $\varepsilon_K = f_1$, первое уравнение системы (12) можно представить в виде $e_1 + e_3 = f_1$, что несколько упростило бы задачу. Однако для подтверждения универсальности метода не будем использовать эту упрощающую предварительную информацию.

Для решения задачи традиционным методом необходимо составить систему (6), которая в данном случае будет состоять из 24 квадратичных уравнений [1]:

$$\begin{aligned}
&x_{21}^2 - x_{22}^2 = -1,\ \ 2x_{21}x_{22} = 0,\ \ x_{21}x_{31} - x_{22}x_{32} = x_{41},\ x_{22}x_{31} + x_{21}x_{32} = x_{42},\\
&x_{23}^2 - x_{24}^2 = -1,\ \ 2x_{23}x_{24} = 0,\ \ x_{23}x_{33} - x_{24}x_{34} = x_{43},\ x_{23}x_{34} + x_{24}x_{33} = x_{44},\\
&x_{31}^2 - x_{32}^2 = -1,\ \ 2x_{31}x_{32} = 0,\ \ x_{21}x_{41} - x_{22}x_{42} = -x_{31},\ x_{22}x_{41} + x_{21}x_{42} = -x_{32},\\
&x_{33}^2 - x_{34}^2 = -1,\ \ 2x_{33}x_{34} = 0,\ \ x_{23}x_{43} - x_{24}x_{44} = -x_{33},\ x_{23}x_{44} + x_{24}x_{43} = -x_{34},\\
&x_{41}^2 - x_{42}^2 = 1,\ \ \ \ 2x_{41}x_{42} = 0,\ \ x_{31}x_{41} - x_{32}x_{42} = -x_{21},\ x_{32}x_{41} + x_{31}x_{42} = -x_{22},\\
&x_{43}^2 - x_{44}^2 = 1,\ \ \ \ 2x_{43}x_{44} = 0,\ \ x_{33}x_{43} - x_{32}x_{44} = -x_{23},\ x_{33}x_{44} + x_{34}x_{43} = -x_{24}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Следует заметить, что при этом учтена зависимость между единичными элементами. В противном случае число уравнений в системе (13) увеличилось бы до 40. Как видим, уравнения квадратичной системы (13) имеют непростую структуру, а при их решении возникает множество вариантов. При использовании системы символьных вычислений Maple система (13) имеет восемь решений, удовлетворяющих условию $\|A\|\neq 0$. Поэтому можно сделать вывод о том, что рассматриваемые системы $C\oplus C\,(e,4)$ и $K\,(f\,,4)$ изоморфны.

Приведем одно из невырожденных решений системы (13):

$$x_{11}=1,\ x_{12}=0,\ x_{13}=1,\ x_{14}=0,\ x_{21}=0,\ x_{22}=-1,\ x_{23}=0,\ x_{24}=1,$$

$$x_{31}=0,\ x_{32}=-1,\ x_{33}=0,\ x_{34}=-1,\ x_{41}=-1,\ x_{42}=0,\ x_{43}=1,\ x_{44}=0.$$

Прямой и обратный операторы изоморфизма принимают вид

$$L\!:\begin{cases} f_1=e_1+e_3,\, f_3=-e_2-e_4, \\ f_2=-e_2+e_4,\, f_4=-e_1+e_3, \end{cases} \quad L^{-1}\!:\begin{cases} e_1=\frac{1}{2}f_1-\frac{1}{2}f_4,\, e_2=-\frac{1}{2}f_2-\frac{1}{2}f_3, \\ e_3=\frac{1}{2}f_1+\frac{1}{2}f_4,\, e_4=\frac{1}{2}f_2-\frac{1}{2}f_3. \end{cases} \tag{14}$$

Решим эту же задачу с помощью представлений экспонент. Пусть

$$M=\sum_{j=1}^{4} m_j e_j \in C\oplus C,\quad N=\sum_{j=1}^{4} n_j f_j \in K.$$

Тогда, как показано в [4],

$$\mathrm{Exp}(N)=\frac{1}{2}e^{n_1}[(e^{-n_4}\cos(n_2+n_3)+e^{n_4}\cos(-n_2+n_3))f_1+$$

$$+(e^{-n_4}\sin(n_2+n_3)-e^{n_4}\sin(-n_2+n_3))f_2+$$

$$+(e^{-n_4}\sin(n_2+n_3)+e^{n_4}\sin(-n_2+n_3))f_3+$$

$$+(-e^{-n_4}\cos(n_2+n_3)+e^{n_4}\cos(-n_2+n_3))f_4],$$

$$\mathrm{Exp}(M)=e^{m_1}(\cos m_2e_1+\sin m_2e_2)+e^{m_3}(\cos m_4e_3+\sin m_4e_4)\,.$$

Приведем эти представления к нормализованной форме, для чего вместо тригонометрических функций подставим их выражения через экспоненты с мнимыми показателями по формуле Эйлера и сделаем перегруппировку слагаемых. В результате получаем одинаковые выражения, но с разными константами и характеристическими корнями:

$$\mathrm{Exp}(K)=C_1e^{\lambda_1}+\overline{C}_1e^{\lambda_1}+C_2e^{\lambda_2}+\overline{C}_2e^{\lambda_2},$$

где для системы $C\oplus C\,(e,4)$ — $K=N$, $C_1=\frac{1}{2}(e_1-ie_2)$, $C_2=\frac{1}{2}(e_3-ie_4)$, $\lambda_1=$ $=\mu_1=m_1+im_2$, $\lambda_2=\mu_2=m_3+im_4$, а для системы $K\,(f\,,4)$ — $K=M$, $C_1=$

$$=\frac{1}{4}(f_1-if_2-if_3-f_4), C_2=\frac{1}{4}(f_1+if_2-if_3+f_4), \lambda_1=v_1=m_1-m_4+i(m_3+m_2),$$

$\lambda_2=v_2=m_1+m_4+i(m_3-m_2)$.

Тот факт, что представления экспонент в обеих ГЧС имеют один тип набора корней характеристических уравнений, позволяет сделать вывод об изоморфизме систем $C\oplus C(e,4)$ и $K(f,4)$, не прибегая при этом к решению громоздкой квадратичной системы (13).

Данный подход позволяет получить и явный вид линейного преобразования (12). Построим закон преобразования чисел при изоморфном переходе. Из соотношения

$$M=\sum_{j=1}^{4}m_j e_j \overset{L}{\Leftrightarrow} \sum_{j=1}^{4}n_j f_j=N$$

следует

$$n_i=\sum_{j=1}^{4}m_j x_{ij}, \quad i=1,\dots,4. \tag{15}$$

Искомое преобразование L должно переводить представление в системе $C\oplus C(e,4)$ в представление в системе $K(f,4)$:

$$\frac{1}{2}[(e_1-ie_2)e^{\mu_1}+(e_1+ie_2)e^{\bar{\mu}_1}+(e_3-ie_4)e^{\mu_2}+\frac{1}{2}(e_3+ie_4)e^{\bar{\mu}_2}] \overset{L}{\Leftrightarrow}$$
$$\overset{L}{\Leftrightarrow}\frac{1}{4}[(f_1-if_2-if_3-f_4)e^{v_1}+(f_1+if_2+if_3-f_4)e^{\bar{v}_1}+$$
$$+(f_1+if_2-if_3+f_4)e^{v_2}+(f_1-if_2+if_3+f_4)e^{\bar{v}_2}]. \tag{16}$$

Подставим (12) в левую часть (16):

$$\frac{1}{2}(x_{11}f_1+x_{12}f_2+x_{13}f_3+x_{14}f_4-i(x_{21}f_1+x_{22}f_2+x_{23}f_3+x_{24}f_4))e^{\mu_1}+$$
$$+\frac{1}{2}(x_{11}f_1+x_{12}f_2+x_{13}f_3+x_{14}f_4+i(x_{21}f_1+x_{22}f_2+x_{23}f_3+x_{24}f_4))e^{\bar{\mu}_1}+$$
$$+\frac{1}{2}(x_{31}f_1+x_{32}f_2+x_{33}f_3+x_{34}f_4-i(x_{41}f_1+x_{42}f_2+x_{43}f_3+x_{44}f_4))e^{\mu_2}+$$
$$+\frac{1}{2}(x_{31}f_1+x_{32}f_2+x_{33}f_3+x_{34}f_4+i(x_{41}f_1+x_{42}f_2+x_{43}f_3+x_{44}f_4))e^{\bar{\mu}_2}\overset{L}{\Leftrightarrow}$$
$$\overset{L}{\Leftrightarrow}\frac{1}{4}(f_1-if_2-if_3-f_4)e^{v_1}+\frac{1}{4}(f_1+if_2+if_3-f_4)e^{\bar{v}_1}+$$
$$+\frac{1}{4}(f_1+if_2-if_3+f_4)e^{v_2}+\frac{1}{4}(f_1-if_2+if_3+f_4)e^{\bar{v}_2}. \tag{17}$$

ISSN 0204–3572. Electronic Modeling. 2017. V. 39. № 1

Поскольку соответствие (17) должно выполняться для любых значений корней μ и ν, найти значения x_{ij} можно методом неопределенных коэффициентов относительно экспонент, комбинируя их различными способами. При этом получаем различные преобразования, в том числе и вырожденные (не удовлетворяющие условию $\|A\| \neq 0$), что свидетельствует о недопустимости данного способа комбинирования.

Выберем такой способ комбинирования коэффициентов:

$$\mu_1 \Leftrightarrow \nu_1,\ \bar{\mu}_1 \Leftrightarrow \bar{\nu}_1,\ \mu_2 \Leftrightarrow \nu_2,\ \bar{\mu}_2 \Leftrightarrow \bar{\nu}_2. \tag{18}$$

Это соответствие позволяет получить систему четырех уравнений, из которой методом неопределенных коэффициентов относительно базисных элементов и мнимой единицы получаем систему из 16 простых линейных уравнений:

$$\begin{gathered} 2x_{11} - 2ix_{21} = 1,\ 2x_{12} - 2ix_{22} = -i,\ 2x_{13} - 2ix_{23} = -i,\ 2x_{14} - 2ix_{24} = -1, \\ 2x_{11} + 2ix_{21} = 1,\ 2x_{12} + 2ix_{22} = i,\ 2x_{13} + 2ix_{23} = i,\ 2x_{14} + 2ix_{24} = 1, \\ 2x_{31} - 2ix_{41} = 1,\ 2x_{32} - 2ix_{42} = i,\ 2x_{33} - 2ix_{43} = -i,\ 2x_{34} - 2ix_{44} = 1, \\ 2x_{31} + 2ix_{41} = 1,\ 2x_{32} + 2ix_{42} = -i,\ 2x_{33} + 2ix_{43} = i,\ 2x_{34} + 2ix_{44} = 1. \end{gathered} \tag{19}$$

Решение системы (19) имеет вид

$$\begin{gathered} x_{11} = \frac{1}{2},\ x_{12} = 0,\ x_{13} = 0,\ x_{14} = -\frac{1}{2},\ x_{21} = 0,\ x_{22} = \frac{1}{2},\ x_{23} = \frac{1}{2},\ x_{24} = 0, \\ x_{31} = \frac{1}{2},\ x_{32} = 0,\ x_{33} = 0,\ x_{34} = \frac{1}{2},\ x_{41} = 0,\ x_{42} = -\frac{1}{2},\ x_{43} = \frac{1}{2},\ x_{44} = 0, \end{gathered}$$

а оператор изоморфизма —

$$L: \begin{cases} e_1 = \frac{1}{2}(f_1 - f_4),\ e_2 = \frac{1}{2}(f_2 + f_3), \\ e_3 = \frac{1}{2}(f_1 + f_4),\ e_4 = \frac{1}{2}(-f_2 + f_3). \end{cases} \tag{20}$$

Отличие (20) от (14) объясняется тем, что оператор изоморфизма может быть неединственным. Реализация конкретного вида оператора зависит от способа комбинирования корней (18) при составлении системы (19). Легко убедиться в том, что полученный оператор переводит систему квадриплексных чисел $K(f, 4)$ в систему бикомплексных чисел $C \oplus C\,(e, 4)$. Так, например,

$$e_3 e_4 = \frac{1}{4}(-f_2 + f_3 + f_3 - f_2) = \frac{1}{2}(-f_2 + f_3) = e_4,$$

что соответствует таблице умножения Кели системы $C \oplus C\ (e, 4)$. Так же легко убедиться с помощью (15), что оператор (20) выполняет соответствие (18).

Выводы

Таким образом, разработанный метод исследования изоморфности ГЧС посредством анализа представлений экспоненциальных функций в этих системах при однократных корнях характеристического уравнения ГЧС позволяет значительно повысить эффективность алгоритмов решения систем уравнений изоморфизма, так как отпадает необходимость решения громоздких систем квадратичных уравнений. В то же время, наличие многократных корней характеристических уравнений требует дополнительных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Блейхут Р.* Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. — М. : Мир, 1989. — 449 с.
2. *Нуссбаумер Г.* Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. — М.: Радио и связь, 1985. — 248 с.
3. *Кантор И.Л.* Гиперкомплексные числа. / И.Л. Кантор, А.С. Солодовников. — М. : Наука, 1973. — 144 с.
4. *Синьков М.В.* Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения / М.В. Синьков, Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова — Киев: НАН України, Ін-т проблем реєстрації інформації, 2010. — 389 с.
5. *Синьков М.В.* Гіперкомплексні числові системи: основи теорії, практичні використання, бібліографія / М.В. Синьков, Ю.Є. Боярінова, Я.О. Каліновський, Синькова Т.В., Федоренко О.В. — Препр. — Київ: НАН України, Ін-т пробл. реєстрації інформації, 2009. — 44 с.
6. *Chaitin-Chatelin F., Meskauskas T., Zaoui A.* Computation with Hypercomplex Numbers // GERFACS Technical Report TR/PA/00/69 // On line: http://www.gerfacs.fr (2000).
7. *Курош А.Г.* Лекции по общей алгебре. — М. : Наука, 1973. — 400 с.
8. *Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е.* Высокоразмерные изоморфные гиперкомплексные числовые системы и их использование для повышения эффективности вычислений. — Київ: Инфодрук, 2012. — 183с.
9. *Toyoshima H.* Computationally Efficient Implementation of Hypercomplex Digital Filters. // IEICE Trans. Fundamentals. — 2002. — E85-A, 8. — P. 1870—1876.
10. *Синьков М.В., Каліновський Я.О., Боярінова Ю.Є. та ін.* Дослідження та використання гіперкомплексних числових систем в задачах динаміки, кінематики та кодування інформації застосування // Пріоритети наукової співпраці ДФФД і БРФФД. — Київ: Бібліотека Держфонду фундаментальних досліджень, 2007. — С. 21—34.
11. *Калиновский Я.А., Ландэ Д.В., Бояринова Ю.Е., Хицко Я.В.* Гиперкомплексные числовые системы и быстрые алгоритмы цифровой обработки информации. — Киев: ИПРИ НАН Украины, 2014. — 130 с.
12. *Каліновський Я.О.* Методи комп'ютерного моделювання та обчислень з використанням гіперкомплексних числових систем : Дис. … д-ра техн. наук. — Київ, 2007. — 417 с.

13. *Синьков М.В., Калиновский Я.А., Роенко Н.В.* Building nonlinear functions in quaternion and other hypercomplex number systems for the solution of applied mecanics problem // Proc. of the First Int. Conf. «On parallel processing and appl. Math.» — Poland, 1994. — P. 170—177.
14. *Калиновский Я.А., Роенко Н.В., Синьков М.В.* Методы построения нелинейностей в расширениях комплексных чисел // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 4. — С. 178—181.

REFERENCES

1. Bleykhut, R.E. (1989), *Bystrye algoritmy tsifrovoi obrabotki signalov* [Fast algorithms for digital signal processing], Mir, Moscow, Russia.
2. Nussbaumer, G. (1985), *Bystroe preobrazovanie Furie i algoritmy vychisleniya svyortok* [Fast Fourier transform and convolution computation algorithm], Radio i Svyaz, Moscow, Russia.
3. Kantor, I.L. and Soldovnikov, A.S. (1973), *Giperkompleksnye chisla* [Hypercomplex numbers], Nauka, Moscow, Russia.
4. Sinkov, M.V., Kalinovsky, Ya.A. and Boyarinova, Yu.E. (2010), *Konechnomernye giperkompleksnye chislovye sistemy. Osnovy teorii. Primeneniya* [Finite-dimensional hypercomplex number systems. Fundamentals of the theory. Applications], Infodruk , Kyiv, Ukraine.
5. Sinkov, M.V., Kalinovsky, Ya.A. and Boyarinova, Yu.E. (2009), *Giperkompleksni chislovi systemy: osnovy teorii, praktychni vykorystannya, bibliografiya* [Hypercomplex numerical systems: basic theory, practical application, references], Infodruk, Kyiv, Ukraine.
6. Chaitin-Chatelin, F., Meskauskas, T. and Zaoui, A. (2000), Computation with hypercomplex numbers, GERFACS Technical Report TR/PA/00/69, available at: http://www.gerfacs.fr.
7. Kurosh, A.G. (1973), *Lektsii po obshchey algebre* [Lectures on general algebra], Nauka, Moscow, Russia.
8. Kalinovsky, Ya.A. and Boyarinova, Yu.E. (2012), *Vysokorazmernye izomorfnye giperkompleksnye chislovye sistemy i ikh ispolzovanie dlya povysheniya efektivnosti vychisleniy* [High-dimensional isomorphic hypercomplex number systems and their use for efficiency increase of calculations], Infodruk, Kyiv, Ukraine.
9. Toyoshima, H. (2002), "Computationally efficient implementation of hypercomplex digital filters", *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol. E85-A, no. 8, pp. 1870-1876.
10. Sinkov, M.V., Kalinovsky, Ya.A. and Boyarinova, Yu.E. (2007), *Doslidzhennia ta vykorystannia giperkompleksnych chyslovych system v zadachach dynamiky, kinematyky ta koduvannia informatsii zastosuvannia* [Research and use of hypercomplex number systems in problems of dynamics, kinematics and coding of application information], *Priorytety naukovoyi spivpraci DFFD i BRFFD*, Biblioteka Derzhfondu fundamentalnych doslidzhen, pp. 21-34.
11. Kalinovsky, Ya.A., Lande, D.V., Boyarinova, Yu.E. and Khitsko, I. V. (2014), *Giperkompleksnye chyslovye systemy i bystrye algoritmy tsifrovoy obrabotki informatsii* [Hypercomplex number systems and fast algorithms for digital processing of information], IPRI NAN Ukrainy, Kyiv, Ukraine.
12. Kalinovsky, Ya.A. (2007), "Methods of computer modeling and calculations using hypercomplex number systems", Dissertation of Dr. Sci. (Tech.), IRP NAN Ukrainy, Kyiv, Ukraine.
13. Sinkov, M.V., Kalinovsky, Ya.A. and Roenko, N.V. (1994), "Building nonlinear functions in quaternion and other hypercomplex number systems for the solution of applied mecanics problem", *Proc. of the First Int. Conf. on Parallel Processing and Appl. Math*, Poland, pp. 170-177.
14. Kalinovsky, Ya.A., Roenko, N.V. and Sinkov, M.V. (1996), "Methods for constructing nonlinear extensions of complex numbers", *Kibernetika i sistemnyi analiz*, no. 4, pp. 178-181.

Ya.A. Kalinovsky

EFFICIENT ALGORITHMS FOR SOLVING EQUATIONS
OF ISOMORPHIC HYPERCOMPLEX DIGITAL SYSTEMS
WITH THE HELP OF PRESENTED EXPONENTS

This paper presents a method for constructing isomorphic hypercomplex digital systems with the help of analysis of presentation of exponential functions in these systems. It is shown that such an approach increases considerably the efficiency of algorithms for solving the sets of equations of isomorphism.

K e y w o r d s: hypercomplex digital system, isomorphism, exponent, a set of equations of isomorphism, isomorphism operator.

Поступила 30.08.16;
после доработки 21.12.16

КАЛИНОВСКИЙ Яков Александрович, д-р техн. наук, ст. науч. сотр. Ин-та проблем регистрации информации НАН Украины. В 1965 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — теория гиперкомплексных числовых систем и их применение в математическом моделировании.