
УДК 621.3.018.61(045)

В.Т. Чемерис, канд. техн. наук, **И.А. Бородий**
Национальный авиационный университет Украины
(Украина, 03680, Киев, пр-т Космонавта Комарова, 1,
тел. (044) 4067840, e-mail: vchemer@voliacable.com; miko2010@ukr.net)

Упрощенный способ осреднения параметров слоистой периодической среды для волнового уравнения

Определены эквивалентные параметры слоистой периодической среды, состоящей из чередующихся слоев ферромагнетика и немагнитного диэлектрика, что необходимо для моделирования волновых процессов установления нестационарного поля в мелкошихтованных пакетах. Эквивалентная среда обладает трансверсально-изотропными свойствами в результате перемешивания электрофизических параметров смежных слоев. С помощью процедур осреднения частичных магнитных потоков отдельных слоев по площади сечения элементарной ячейки пакета получены эквивалентные значения коэффициента диффузии и скорости распространения электромагнитного поля, которые могут быть использованы при решении волнового уравнения для изотропной среды, являющейся эквивалентом исходной слоисто-периодической среды.

К л ю ч е в ы е с л о в а: мелкошихтованный магнитный сердечник, периодическая структура, поперечное сечение, элементарная ячейка, магнитные потоки, процедуры усреднения, распространение волны.

Визначено еквівалентні параметри багат шарового періодичного середовища, в якому шари ферромагнетика чергуються з шарами немагнітного діелектрика, що потрібно для моделювання хвильових процесів встановлення нестационарного поля в дрібношихтованих пакетах. Еквівалентне середовище має трансверсально-ізотропні властивості внаслідок перемішування електрофізичних параметрів суміжних шарів. За допомогою процедур осереднення часткових магнітних потоків окремих шарів по площі перерізу елементарної комірки пакету одержано еквівалентні значення коефіцієнта дифузії та швидкості поширення електромагнітного поля, які можуть бути використані при розв'язанні хвильового рівняння для ізотропного середовища, еквівалентного вихідному багат шаровому періодичному середовищу.

К л ю ч о в і с л о в а: дрібношихтоване магнітне осердя, періодична структура, поперечний перетин, елементарна комірка, магнітні потоки, процедури осереднення, поширення хвилі.

В работе [1] выполнено численное исследование волновых процессов с импульсным включением поля в мелкошихтованных сердечниках импульс-

© В.Т. Чемерис, И.А. Бородий, 2017

ных устройств при условии, что эквивалентные параметры многослойной среды (электропроводность, магнитная и диэлектрическая проницаемость) заранее известны. Однако процедура нахождения таких эквивалентных параметров не рассматривалась в связи с тем, что простые и адекватные методы их определения пока недостаточно разработаны, а строгие математические методы гомогенизации многослойной среды являются трудоемкими и сложными для практического применения [2].

Наиболее изучены в настоящее время методы гомогенизации уравнений Максвелла для гармонических полей в средах с периодическим чередованием магнитных и немагнитных слоев [3—5]. При анализе процессов диффузии поля, когда волновые свойства среды не проявляются вследствие малой скорости изменения поля или относительно высоких потерь энергии на перемагничивание и джоулево тепло в слоях ферромагнетика, процедура гомогенизации слоистого пакета реализуется относительно просто [6]. Однако при необходимости учесть волновой характер распространения поля задача усложняется [7], в особенности при импульсном характере поля. Обзор методов гомогенизации неоднородных сред можно найти в работах [8, 9].

Выполнено определение эквивалентных параметров изотропной среды, моделирующей многослойную среду мелкошихтованного магнитного сердечника при анализе волновых процессов распространения поля. Данный подход основан на вычислении суммарного магнитного потока, связанного с элементарной ячейкой среды, как суммы магнитных потоков, пронизывающих каждый слой в отдельности, и осреднении этого потока по площади поперечного сечения элементарной ячейки.

Расчетная схема представлена на рис. 1. Слоистая среда состоит из слоев ферромагнетика 2, перемежающихся со слоями немагнитного изоляционного материала 1. Параметры каждого слоя заданы: σ_1 и σ_2 — коэффициенты электропроводности, ε_1 и ε_2 — диэлектрическая постоянная, индексы соответствуют нумерации слоев. Толщины слоев Δx_1 и Δx_2 достаточно малы (мелкослоистая среда) и незначительно превышают элементарные отрезки dx или dy координатных осей.

Выделяя элементарную ячейку среды с размерами $a \times dy$, где $a = \Delta x_1 + \Delta x_2$, будем считать, что z -составляющая индукции магнитного поля B_z распределена однородно в пределах поперечного сечения каждого слоя, входящего в данную ячейку. Далее будем оперировать величиной векторного магнитного потенциала $A(x, y)$, который в данной задаче имеет две компоненты (вдоль осей x, y).

Для площадей, по которым распределен магнитный поток в пределах каждого участка ячейки, используем обозначения $S_1 = \Delta x_1 dy$, $S_2 = \Delta x_2 dy$.

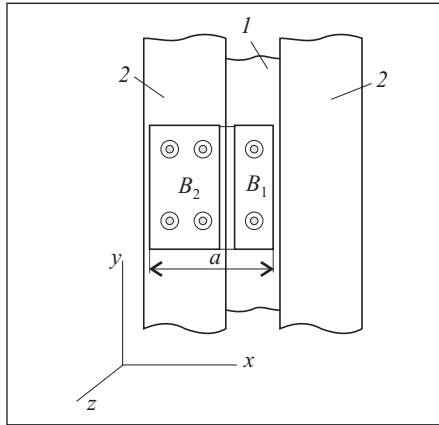


Рис. 1

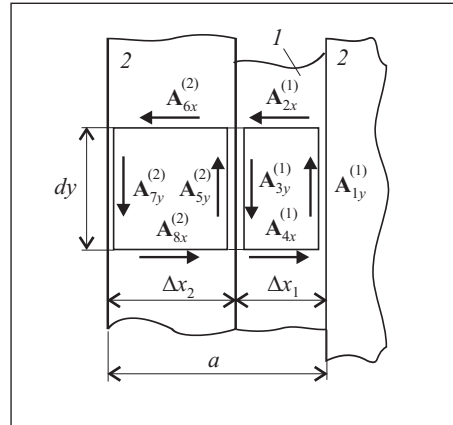


Рис. 2

При этом потоки $\Delta\Phi_1 = B_1 S_1$ и $\Delta\Phi_2 = B_2 S_2$ можно определить с помощью векторного магнитного потенциала соответствующей зоны:

$$\Delta\Phi_1 = \oint_{l_1} \mathbf{A}_1 d\mathbf{l} = B_1 S_1,$$

$$\Delta\Phi_2 = \oint_{l_2} \mathbf{A}_2 d\mathbf{l} = B_2 S_2,$$

где прямоугольные контуры l_1 и l_2 соответствуют частичным зонам рассматриваемой ячейки среды (см. рис. 1). Суммарный магнитный поток, связанный со всей ячейкой, равен сумме этих частичных потоков: $\Delta\Phi_0 = \Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2 = B_0 S_0$, где B_0 — индукция магнитного поля, усредненная по всей площади сечения ячейки, $S_0 = S_1 + S_2$. Далее проведем осреднение частичных магнитных потоков $\Delta\Phi_1$ и $\Delta\Phi_2$ по всей площади сечения ячейки S_0 . Для сохранения величины этих потоков индукция в них должна быть уменьшена соответственно увеличению площади. Тогда для суммарного потока справедливо выражение $\Phi_1 = (\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2) S_0$, где $\alpha_1 = S_1 / S_0$, $\alpha_2 = S_2 / S_0$. В итоге суммарный поток определяем с помощью значений магнитного потенциала в частичных зонах ячейки:

$$\Phi_0 = \left(\alpha_1 \oint_{l_1} \mathbf{A}_1 d\mathbf{l} + \alpha_2 \oint_{l_2} \mathbf{A}_2 d\mathbf{l} \right) S_0. \quad (1)$$

Представляется возможным перейти от локальных значений потенциала в отдельных зонах ячейки к единому значению потенциала A_0 ,

справедливному для всей площади ячейки, т.е. положить $\Phi_0 = \oint_L \mathbf{A}_0 d\mathbf{l}$, где

контур L охватывает оба частичных контура, l_1 и l_2 . Для этого рассмотрим детальнее схему вычисления контурных интегралов (рис. 2), определяющих и частичные потоки, и общий поток, где значения потенциала в зоне 1 (изоляционный слой) имеют верхний индекс (1), а значения потенциала в зоне 2 (слой ферромагнетика) имеют верхний индекс (2). Значения потенциала вдоль сторон контуров интегрирования пронумерованы по порядку с указанием принадлежности к координатной оси. Поскольку толщины слоев Δx_1 и Δx_2 , несмотря на их малость, могут превышать длину элементарного отрезка оси dx , на участках контуров, параллельных оси x , выполняем интегрирование, а на участках, параллельных оси y , вклад каждой стороны в контурный интеграл находим простым умножением локального значения y -составляющей векторного потенциала на длину отрезка dy .

Магнитный поток, проходящий через зону 1 рассматриваемой ячейки, имеет вид

$$\Delta\Phi_1 = \oint_{l_1} \mathbf{A}^{(1)} d\mathbf{l} = A_{1y}^{(1)} dy - \int_{\Delta x_1} A_{2x}^{(1)} dx - A_{3y}^{(1)} dy + \int_{\Delta x_1} A_{4x}^{(1)} dx,$$

магнитный поток, проходящий через зону 2, —

$$\Delta\Phi_2 = \oint_{l_2} \mathbf{A}^{(2)} d\mathbf{l} = A_{5y}^{(2)} dy - \int_{\Delta x_2} A_{6x}^{(2)} dx - A_{7y}^{(2)} dy + \int_{\Delta x_2} A_{8x}^{(2)} dx.$$

Магнитным потоком, проходящим сквозь промежуточный контур на границе слоев 1 и 2, можно пренебречь ввиду малости ширины этого контура, поэтому $A_{5y}^{(2)} = -A_{3y}^{(1)}$. С учетом этого суммарный магнитный поток, проходящий через всю площадь сечения ячейки S_0 , будет (без осреднения слагаемых)

$$\Phi_0 = \Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2 = (A_{1y}^{(1)} - A_{7y}^{(2)}) dy - \left(\int_{\Delta x_1} A_{2x}^{(1)} dx + \int_{\Delta x_2} A_{6x}^{(2)} dx \right) + \left(\int_{\Delta x_1} A_{4x}^{(1)} dx + \int_{\Delta x_2} A_{8x}^{(2)} dx \right) = \oint_L \mathbf{A}_0 d\mathbf{l}.$$

Сумму интегралов в скобках можно рассматривать как результат сквозного интегрирования текущих значений векторного потенциала по интервалу длины $a = \Delta x_1 + \Delta x_2$. Вводя средние значения x -составляющей потенциала по длине отрезков длины Δx_1 и Δx_2 , можно записать

$$\int_{\Delta x_1} A_{2x}^{(1)} dx + \int_{\Delta x_2} A_{6x}^{(2)} dx = \Delta x_1 A'_{x\text{cp}}^{(1)} + \Delta x_2 A'_{x\text{cp}}^{(2)} = a A'_{x\text{cp}}^{(0)}, \quad (2)$$

$$\int_{\Delta x_1} A_{4x}^{(1)} dx + \int_{\Delta x_2} A_{8x}^{(2)} dx = \Delta x_1 A_{x \text{ cp}}^{(1)} + \Delta x_2 A_{x \text{ cp}}^{(2)} = a A_{x \text{ cp}}^{(0)}, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} A_{x \text{ cp}}^{(1)} &= \frac{1}{\Delta x_1} \int_{\Delta x_1} A_{2x}^{(1)} dx; \quad A_{x \text{ cp}}^{(1)} = \frac{1}{\Delta x_1} \int_{\Delta x_1} A_{4x}^{(1)} dx; \\ A_{x \text{ cp}}^{(2)} &= \frac{1}{\Delta x_2} \int_{\Delta x_2} A_{6x}^{(2)} dx; \quad A_{x \text{ cp}}^{(2)} = \frac{1}{\Delta x_2} \int_{\Delta x_2} A_{8x}^{(2)} dx; \\ A_{x \text{ cp}}^{(0)} &= \frac{1}{a} \int_a A_{0x} dx \Big|_{y+dy=\text{const}}; \quad A_{x \text{ cp}}^{(0)} = \frac{1}{a} \int_a A_{0x} dx \Big|_{y=\text{const}}. \end{aligned}$$

Разности значений усредненного векторного потенциала на противоположных сторонах контура интегрирования L вычисляем через его производные по координатам:

$$\begin{aligned} (A_{1y}^{(1)} - A_{7y}^{(2)}) dy &= a \frac{\Delta A_{y \text{ cp}}^{(0)}}{\Delta x} dy \approx a \frac{\partial A_{y \text{ cp}}^{(0)}}{\partial x} dy, \\ a (A_{x \text{ cp}}^{(0)} - A_{x \text{ cp}}^{(0)}) &= a \frac{\partial A_{x \text{ cp}}^{(0)}}{\partial y} dy. \end{aligned}$$

В итоге суммарный магнитный поток, пронизывающий площадь сечения ячейки с размерами $a \times dy$, ввиду отсутствия составляющих магнитной индукции вдоль осей x и y можно выразить через производные усредненного по площади сечения ячейки векторного магнитного потенциала:

$$\Phi_0 = B_0 S = a dy \left(\frac{\partial A_{x \text{ cp}}^{(0)}}{\partial y} - \frac{\partial A_{y \text{ cp}}^{(0)}}{\partial x} \right) = S_0 \cdot \text{rot}_z \mathbf{A}_{\text{cp}}^{(0)} = S_0 \cdot |\text{rot} \mathbf{A}_{\text{cp}}^{(0)}|. \quad (4)$$

Для контурных интегралов в выражении (1) справедливы следующие соотношения:

$$\oint_l \mathbf{A}_1 d\mathbf{l} = \iint_{S_1} B_1 ds = B_{1 \text{ cp}} S_1, \quad \oint_{l_2} \mathbf{A}_2 d\mathbf{l} = \iint_{S_2} B_2 ds = B_{2 \text{ cp}} S_2,$$

где $B_{1 \text{ cp}}$ и $B_{2 \text{ cp}}$ — значения магнитной индукции, усредненные соответственно по площадям S_1 и S_2 . После пересчета этих магнитных потоков на всю площадь S_0 с помощью коэффициентов $\alpha_1 = S_1 / S_0$ и $\alpha_2 = S_2 / S_0$ получаем снижение индукции. При переходе к определению этих магнит-

ных потоков через значения потенциала, усредненные по всей площади S_0 (фактически усреднение выполняется по оси x , так как по оси y среда обладает изотропностью в каждом слое), необходимо учесть, что теперь контурные интегралы следует вычислять по контуру L , имеющему больший размер вдоль оси x , а в качестве подынтегральных выражений использовать x -составляющие усредненного потенциала, которые согласно (2) и (3) имеют вид

$$A_{x\text{cp}}^{(1)} = \frac{\Delta x_1}{a} A_{x\text{cp}}^{(0)}, \quad A_{x\text{cp}}^{(2)} = \frac{\Delta x_2}{a} A_{x\text{cp}}^{(0)},$$

где $\Delta x_1/a = \alpha_1$, $\Delta x_2/a = \alpha_2$.

Производные от составляющих потенциала вдоль оси y при осреднении в поперечном направлении претерпевают аналогичные изменения. Поэтому, используя локальные значения потенциала, усредненные на интервале оси x , длина которого равна ширине ячейки $a = \Delta x_1 + \Delta x_2$, преобразуем выражение (1) к виду

$$\Phi_0 = \left(\alpha_1^2 \oint_L \mathbf{A}_{\text{cp}}^{(0)} \Big|_{1\text{эф}} d\mathbf{l} + \alpha_2^2 \oint_L \mathbf{A}_{\text{cp}}^{(0)} \Big|_{2\text{эф}} d\mathbf{l} \right) S_0 = \alpha_1^2 \Phi_0^{(1)} + \alpha_2^2 \Phi_0^{(2)},$$

где аналогично (4) составляющие суммарного потока, принадлежащие слоям 1 и 2 , зависят от эффективных, т.е. связанных с потоками, распределенными по всей площади ячейки, значений усредненного потенциала и индукции в этих слоях:

$$\Phi_0^{(1)} = \oint_L \mathbf{A}_{\text{cp}}^{(0)} \Big|_{1\text{эф}} d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{B}_{1\text{эф}} ds = \mathbf{B}_{1\text{эф}} S_0,$$

$$\Phi_0^{(2)} = \oint_L \mathbf{A}_{\text{cp}}^{(0)} \Big|_{2\text{эф}} d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{B}_{2\text{эф}} ds = \mathbf{B}_{2\text{эф}} S_0,$$

где $\mathbf{B}_{1\text{эф}} = \text{rot} \mathbf{A}_{\text{cp}}^{(0)} \Big|_{1\text{эф}}$, $\mathbf{B}_{2\text{эф}} = \text{rot} \mathbf{A}_{\text{cp}}^{(0)} \Big|_{2\text{эф}}$. Теперь суммарный магнитный поток в сечении элементарной ячейки можно записать в виде

$$\Phi_0 = (\alpha_1^2 \mathbf{B}_{1\text{эф}} + \alpha_2^2 \mathbf{B}_{2\text{эф}}) \cdot S_0. \quad (5)$$

Приравнивая полученные соотношения (4) и (5), можно сформулировать уравнение для расчета поля в слоистой среде как в сплошной среде с некоторыми эквивалентными параметрами. В каждой частичной зоне среды рассматриваемой ячейки векторный магнитный потенциал связан с

токами, протекающими в данной зоне, а именно: $\nabla^2 \mathbf{A}_1 = -\mu_1(\mathbf{j}_{\sigma 1} + \mathbf{j}_{D1})$, $\nabla^2 \mathbf{A}_2 = -\mu_2(\mathbf{j}_{\sigma 2} + \mathbf{j}_{D2})$, где $\mathbf{j}_{\sigma 1}$ и $\mathbf{j}_{\sigma 2}$ — токи проводимости,

$$\mathbf{j}_{\sigma 1} = -\sigma_1 \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t}, \quad \mathbf{j}_{\sigma 2} = -\sigma_2 \frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial t};$$

\mathbf{j}_{D1} и \mathbf{j}_{D2} — токи смещения,

$$\mathbf{j}_{D1} = -\varepsilon_1 \frac{\partial^2 \mathbf{A}_1}{\partial t^2}, \quad \mathbf{j}_{D2} = -\varepsilon_2 \frac{\partial^2 \mathbf{A}_2}{\partial t^2}.$$

Распределяя магнитные потоки зон 1 и 2 на всю площадь рассматриваемой ячейки и вводя усредненные по ширине этой зоны значения векторного потенциала, считаем токи в зонах 1 и 2 распределенными по всей ширине ячейки и зависящими от производных по времени усредненного потенциала A_0 вместо производных от A_1 и A_2 . С учетом этого согласно (4) и (5) получаем

$$\mathbf{B}_0 = \alpha_1^2 \mathbf{B}_{1\text{эф}} + \alpha_2^2 \mathbf{B}_{2\text{эф}},$$

или

$$\text{rot} \mathbf{A}_{\text{cp}}^{(0)} = \alpha_1^2 \text{rot} \mathbf{A}_{\text{cp}}^{(0)} \Big|_{1\text{эф}} + \alpha_2^2 \text{rot} \mathbf{A}_{\text{cp}}^{(0)} \Big|_{2\text{эф}}. \quad (6)$$

Выполним над уравнением (6) операцию rot:

$$\nabla^2 \mathbf{A}_{\text{cp}}^{(0)} = \alpha_1^2 \nabla^2 \mathbf{A}_{\text{cp}}^{(0)} \Big|_{1\text{эф}} + \alpha_2^2 \nabla^2 \mathbf{A}_{\text{cp}}^{(0)} \Big|_{2\text{эф}}. \quad (7)$$

Учитывая, что составляющие потенциала в правой части могут быть определены через токи, существующие в этих зонах, запишем

$$\nabla^2 \mathbf{A}_{\text{cp}}^{(0)} \Big|_{1\text{эф}} = \mu_1 \left(\sigma_1 \frac{\partial \mathbf{A}_{\text{cp}}^{(0)}}{\partial t} + \varepsilon_1 \frac{\partial^2 \mathbf{A}_{\text{cp}}^{(0)}}{\partial t^2} \right), \quad (8)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A}_{\text{cp}}^{(0)} \Big|_{2\text{эф}} = \mu_2 \left(\sigma_2 \frac{\partial \mathbf{A}_{\text{cp}}^{(0)}}{\partial t} + \varepsilon_2 \frac{\partial^2 \mathbf{A}_{\text{cp}}^{(0)}}{\partial t^2} \right).$$

Из (7) и (8) получаем векторное уравнение, в котором вместо реальных значений потенциала использованы значения потенциала $\mathbf{A}_{\text{cp}}^{(0)}(x, y)$. Его компоненты $\mathbf{A}_{x\text{cp}}^{(0)}$ и $\mathbf{A}_{y\text{cp}}^{(0)}$ усреднены по площади локальной элементарной ячейки среды. Это уравнение описывает распределение потенциала в плоскости xu по всему сечению слоистого пакета:

$$\nabla^2 \mathbf{A}_{\text{cp}}^{(0)} = [\alpha_1^2 \mu_1 \sigma_1 + \alpha_2^2 \mu_2 \sigma_2] \frac{\partial \mathbf{A}_{\text{cp}}^{(0)}}{\partial t} + [\alpha_1^2 \mu_1 \varepsilon_1 + \alpha_2^2 \mu_2 \varepsilon_2] \frac{\partial^2 \mathbf{A}_{\text{cp}}^{(0)}}{\partial t^2}, \quad (9)$$

или

$$\nabla^2 \mathbf{A}_{\text{cp}}^{(0)} = \frac{1}{D} \frac{\partial \mathbf{A}_{\text{cp}}^{(0)}}{\partial t} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_{\text{cp}}^{(0)}}{\partial t^2},$$

где D — эквивалентный коэффициент диффузии поля,

$$D = \frac{1}{\mu_3 \sigma_3} = \frac{1}{\mu_1 \sigma_1 (1 - k_f)^2 + k_f^2 \mu_2 \sigma_2};$$

v^2 — квадрат эквивалентной фазовой скорости распространения электромагнитных волн,

$$v^2 = \frac{1}{\mu_3 \varepsilon_3} = [\mu_1 \varepsilon_1 (1 - k_f)^2 + k_f^2 \mu_2 \varepsilon_2]^{-1},$$

откуда

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1 (1 - k_f)^2 + k_f^2 \mu_2 \varepsilon_2}}.$$

В качестве характерного параметра слоистой среды введен коэффициент заполнения пакета ферромагнетиком $k_f = \Delta x_2 / a = \alpha_2$, тогда $\alpha_1 = \Delta x_1 / a = 1 - \alpha_2 = 1 - k_f$.

Уравнение (9) не отражает свойства структурной анизотропии слоисто-периодической среды, оно лишь позволяет анализировать диффузионные и волновые процессы в модели среды, которая представляет собой результат перемешивания слоев до однородного состояния. Уравнение (9) следует решать отдельно для составляющих векторного потенциала по осям x и y . Различие в этих решениях определяется отличием граничных условий. Модуль итогового значения потенциала составляет $A_{\text{cp}}^{(0)}(x, y) = \sqrt{(A_{x \text{cp}}^{(0)})^2 + (A_{y \text{cp}}^{(0)})^2}$.

Выводы

Предложенный упрощенный метод усреднения электромагнитных параметров слоисто-периодической среды для волнового уравнения основан на осреднении локальных магнитных потоков смежных слоев среды по площади сечения элементарной ячейки пакета. Полученные результаты не дают возможности найти в отдельности эквивалентные значения магнитной проницаемости и диэлектрической постоянной, однако позволяют определить эквивалентные значения коэффициента диффузии поля и фазовой скорости распространения электромагнитных волн в изотропной среде, моделирующей данную слоистую среду. Использование этих эквивалентных параметров делает реальной задачу исследования распределения

магнитного поля по сечению пакета при быстрых изменениях поля на его границах с использованием конечно-элементной модели волнового уравнения (например, входящей в состав программного пакета Comsol [10]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чемерис В.Т., Бородий И.А. Моделирование волновых процессов в мелкошихтованных сердечниках силовых элементов импульсных устройств // Электрон. моделирование. — 2014. — 36, № 2. — С. 107—111.
2. Зобнин А.И., Кудрявцев Б.А., Партон В.З. Уравнения Максвелла для неоднородной среды с периодической структурой // Изв. АН Армянской ССР. Механика. — 1990. — 43, — № 1 — С. 19—26.
3. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний /Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 472 с.
4. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических структурах. Математические задачи механики композиционных материалов. — М.: Наука, Физматлит, 1964. — 352 с.
5. Бардзокас Д.И., Зобнин А.И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 376 с.
6. El Feddi M., Ren Z., Razeq A., Bossavit A. Homogenization technique for Maxwell equations in periodic structures // IEEE Trans. on Magnetics. — 1997. — Vol. 33, No. 2. — P. 1382—1385.
7. Alessandro Magni, Cinzia Beatrice, Oriano Bottauscio et al. Magnetization process in thin laminations up to 1 GHz // Ibid. — 2012. — Vol. 48, No. 4. — P. 1363—1366.
8. Shelukhin V.V., Terentev S.A. Frequency dispersion of dielectric permittivity and electric conductivity of rocks via two-scale homogenization of the Maxwell equations // Progress in Electromagnetics Research B. — 2009. — Vol. 14. — P. 175—202.
9. Weinan E, Bjorn Engquist, Xiantao Li et al. The Heterogeneous Multiscale Method: A Review. — [Электронный ресурс]. Режим доступа: web.math.princeton.edu/multiscale/review.pdf.
10. COMSOL Multiphysics. The platform for physics based modeling and simulation. — [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://www.comsol.com/comsol-multiphysics>.

Поступила 08.02.17

REFERENCES

1. Chemerys, V.T. and Borodiy, I.A. (2014), “Simulation of wave processes in the fine laminated cores of power elements of the pulsed devices” , *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 36, no. 2, pp. 107-111.
2. Zobnin, A.I., Kudryavtsev, B.A. and Parton, V.Z. (1990), “Maxwell equations for non-uniform medium of periodic structure” , *Izvestiya Akademii Nauk Armyanskoy SSR*, Vol. 43, no. 1, pp. 19-26.
3. Sanchez-Palencia, E. (1980), *Non-homogeneous media and vibration theory*, Springer-Verlag, New York, USA.
4. Bakhvalov, N.S. and Panasenko, G.P. (1964), *Osredneniye processov v periodicheskikh strukturakh. Matematicheskiye zadachi mehaniki kompozitsionnykh materialov* [Averaging of processes in periodic structures. Mathematical problems of mechanics of composite materials], Nauka, Fizmatlit, Moscow, USSR.

5. Bardzokas, D.I. and Zobnin, A.I. (2003), *Matematicheskoye modelirovaniye fizicheskikh processov v kompozitsionnykh materialakh periodicheskoy struktury* [Mathematical simulation of physical processes in composite materials of periodic structure], Editorial URSS, Moscow, Russia.
6. El Feddi, M., Ren, Z., Razeq, A. and Bossavit, A. (1997), "Homogenization technique for Maxwell equations in periodic structures", *IEEE Trans. on Magnetism*, Vol. 33, no. 2, pp. 1382-1385.
7. Magni, A., Cinzia, B., Bottauscio, O. and et al. (2012), "Magnetization process in thin laminations up to 1 GHz", *IEEE Trans. on Magnetism*, Vol. 48, no. 4, pp. 1363-1366.
8. Shelukhin, V.V. and Terentev, S.A. (2009), "Frequency dispersion of dielectric permittivity and electric conductivity of rocks via two-scale homogenization of the Maxwell equations", *Progress in Electromagnetics Research B*, Vol. 14, pp. 175-202.
9. Weinan, E., Engquist, B., Li, X., Wei, Q., and Vanden-Eijnden, E. The heterogeneous multiscale method: Review, available at: web.math.princeton.edu/multiscale/review.pdf.
10. COMSOL Multiphysics. The platform for physics based modeling and simulation, available at: <https://www.comsol.com/comsol-multiphysics>.

Received 08.02.17

V.T. Chemerys, I.A. Borodiy

SIMPLIFIED METHOD OF AVERAGING PARAMETERS OF MULTI-LAYER PERIODIC MEDIUM FOR THE WAVE EQUATION

Equivalent parameters have been determined of multilayer periodic medium, consisting of alternating layers of ferromagnetic and non-magnetic dielectric that is necessary for simulation of wave processes of non-stationary electromagnetic field propagation in the cross section of thin-laminated magnetic cores. The medium of core is considered as composite with periodic positions of ferromagnetic layers and non-ferromagnetic insulating layers. As a result of layers properties averaging the medium acquires the transversal-isotropic properties. Application of procedures for averaging of partial magnetic fluxes of adjacent layers along the cross section of elementary cell of the core gave a possibility to obtain the equivalent meanings of diffusion coefficient and wave propagation velocity of electromagnetic field which can be used for solution of the wave equation for the isotropic medium which is a model of original multi-layer periodic structure.

Keywords: thin-laminated magnetic core, periodic structure, cross section, elementary cell, magnetic fluxes, averaging procedures, wave propagation.

ЧЕМЕРИС Владимир Терентьевич, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., доцент кафедры теоретической и прикладной физики Национального авиационного университета Украины. В 1962 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — импульсное электро-механическое преобразование энергии, физика импульсных электродинамических систем.

БОРОДИЙ Ирина Алексеевна, преподаватель физики, ассистент кафедры теоретической и прикладной физики Национального авиационного университета Украины. В 2001 г. окончила Национальный педагогический университет им. Драгоманова (г. Киев). Область научных исследований — электромагнитные процессы в силовых элементах импульсной техники.