

---

УДК 536.24

**В.И. Гаврыш**, д-р техн. наук, **Р.Б. Тушницкий**, канд. техн. наук,  
**В.Я. Крайовский**, канд. техн. наук, **Е.В. Левус**, канд. техн. наук  
Национальный университет «Львовская политехника»  
(Украина, 79013, Львов, ул. С. Бандеры, 12,  
тел. (032) 2582578, e-mail: ikni.pz@gmail.com)

## **Исследование температурных полей в элементах микроэлектронных устройств слоистой структуры со сквозными включениями**

Рассмотрена краевая осесимметрическая задача теплопроводности для изотропного кусочно-однородного слоя со сквозным инородным включением цилиндрической формы, нагреваемым тепловым потоком, сосредоточенным на одной из его граничных поверхностей. Коэффициент теплопроводности для всей системы как единого целого описан с помощью асимметричных единичных функций. Получено уравнение теплопроводности с разрывными и сингулярными коэффициентами для рассматриваемой конструкции. После кусочно-линейной аппроксимации температуры на боковой поверхности включения и поверхностях сопряжения элементов слоя применено интегральное преобразование Хенкеля и построено численно-аналитическое решение исходной задачи. Рассчитано и проанализировано температурное поле в конструкции «слой-включение» (материал слоя — керамика ВК94-I, материал включения — серебро).

*К л ю ч е в ы е с л о в а: температура, изотропный кусочно-однородный слой, теплопроводность, сквозное инородное включение, идеальный тепловой контакт, тепловой поток.*

Розглянуто крайову осесиметричну задачу теплопровідності для ізотропного кусково-однорідного шару з наскрізним чужорідним включенням циліндричної форми, який нагрівається тепловим потоком, зосередженим на одній із його межових поверхонь. Коефіцієнт теплопровідності для всієї системи як єдиного цілого виражено за допомогою асиметричних одиничних функцій. Отримано рівняння теплопровідності з розривними та сингулярними коефіцієнтами для розглядуваної конструкції. Після кусково-лінійної апроксимації температури на боковій поверхні включення та поверхнях спряження елементів шару застосовано інтегральне перетворення Ганкеля та побудовано аналітично-числовий розв'язок вихідної задачі. Розраховано та проаналізовано температурне поле в конструкції «шар-включення» (матеріал шару — кераміка ВК94-I, матеріал включення — срібло).

*К л ю ч о в і с л о в а: температура, изотропный кусково-однородный шар, теплопроводность, наскрізне чужорідне включення, идеальный тепловой контакт, тепловой поток.*

При создании микроэлектронных устройств особое значение имеют композитные материалы, разработка которых является одной из ведущих

© В.И. Гаврыш, Р.Б. Тушницкий, В.Я. Крайовский, Е.В. Левус, 2017

проблем современного материаловедения. Появление новых композитных материалов с улучшенными эксплуатационными физико-механическими свойствами будет способствовать созданию новых технологий в авиационной, космической, судостроительной, энергетической, электронной отраслях, машиностроении и транспорте. Среди композитных материалов важное место занимают слоистые пленочные материалы, которые широко применяют в конструкциях микроэлектронных устройств, в частности в интегральных сенсорах для мониторинга температуры и влажности, световых элементах для динамических светодиодных подсветок, в селективных оптических фильтрах, которые определяют эффективность и надежность оптической техники. Поскольку в процессе эксплуатации устройств отдельные их элементы подвергаются различным температурным воздействиям, важным является определение температурных полей. Это позволяет создавать математические модели процесса теплопроводности и на их основе решать краевые задачи математической физики, так как экспериментальные измерения здесь практически невозможны.

К определению теплового состояния однородных и неоднородных конструкций обращено внимание многих исследователей [1—8]. В работе [9] сформулирована задача стационарной теплопроводности для слоистых пластин постоянной и переменной толщины в пространственной постановке. Методом начальных функций трехмерная задача сведена к двумерной. Для пластины со слоями переменной толщины получена система уравнений с переменными коэффициентами. Проанализированы полученные двумерные краевые задачи. Для пластин с однородными слоями постоянной толщины построено решение в аналитической форме. Показано, что это решение совпадает с решением, полученным методом разделения переменных.

Некоторые исследования температурных режимов для узлов и отдельных элементов микроэлектронных устройств, имеющих кусочно-однородную структуру, выполнены ранее [10—14]. В работах [15, 16] приведены общие уравнения теплопроводности для неоднородных тел.

Сформулируем краевую осесимметричную задачу теплопроводности и построим численно-аналитическое решение для конструкций, описываемых изотропным кусочно-однородным слоем со сквозным инородным включением цилиндрической формы, который нагревается тепловым потоком.

**Объект исследования и его математическая модель.** Рассмотрим изотропный относительно теплофизических параметров кусочно-однородный слой, который состоит из  $n$  разнородных элементов с различными геометрическими и теплофизическими параметрами, отнесенный к цилиндрической системе координат  $(Or\varphi z)$  с началом на одной из его гра-

нических поверхностей, и содержит сквозное инородное включение с радиусом  $R$ . На поверхностях сопряжения разнородных элементов слоя

$$K_i = \{(r, \varphi, z_i) : r > R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, i = \overline{1, n-1}\},$$

$$K_R = \{(R, \varphi, z) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq z_n\}$$

существует идеальный тепловой контакт  $t_i = t_{i+1}$ ,  $\lambda_i \frac{\partial t_i}{\partial z} = \lambda_{i+1} \frac{\partial t_{i+1}}{\partial z}$  при  $z = z_i$  ( $i = \overline{1, n-1}$ );  $t_0 = t_i$ ,  $\lambda_0 \frac{\partial t_0}{\partial r} = \lambda_i \frac{\partial t_i}{\partial r}$  ( $i = \overline{1, n}$ ) при  $r = R$  (0 — для включения,  $i$  — для  $i$ -го элемента слоя). В области  $\Omega_0 = \{(r, \varphi, 0) : r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$  граничной поверхности  $K_0 = \{(r, \varphi, 0) : r < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$  слоя система нагревается тепловым потоком, поверхностная плотность которого  $q_0 = \text{const}$ , а другая часть этой поверхности слоя и граничная поверхность  $K_n = \{(r, \varphi, z_n) : r < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$  являются теплоизолированными (рис. 1). В приведенной структуре определим распределение температуры  $t(r, z)$  по пространственным координатам, решив уравнение теплопроводности [15, 16]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \lambda(r, z) \frac{\partial \theta}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \lambda(r, z) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] = 0 \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$\theta|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow \infty} = \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=z_n} = 0, \quad \lambda_0 \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0} = -q_0 S_-(R-r), \quad (2)$$

где  $\lambda(r, z)$  — коэффициент теплопроводности кусочно-однородного слоя,

$$\lambda(r, z) = \sum_{i=1}^n [\lambda_i + (\lambda_0 - \lambda_i) S_-(R-r)] N(z, z_{i-1}); \quad (3)$$

$\lambda_i$  и  $\lambda_0$  — коэффициенты теплопроводности материалов  $i$ -го элемента слоя и включения;  $\theta(r, z) = t(r, z) - t_c$  — избыточная температура;  $z_0 = 0$ ;  $N(z, z_{i-1}) = S_-(z - z_{i-1}) - S_+(z - z_i)$ ;  $t_c$  — температура окружающей среды;  $S_{\pm}(\zeta)$  — асимметричные единичные функции [17],

$$S_{\pm}(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta > 0, \\ 0,5 \mp 0,5, & \zeta = 0, \\ 0, & \zeta < 0. \end{cases}$$

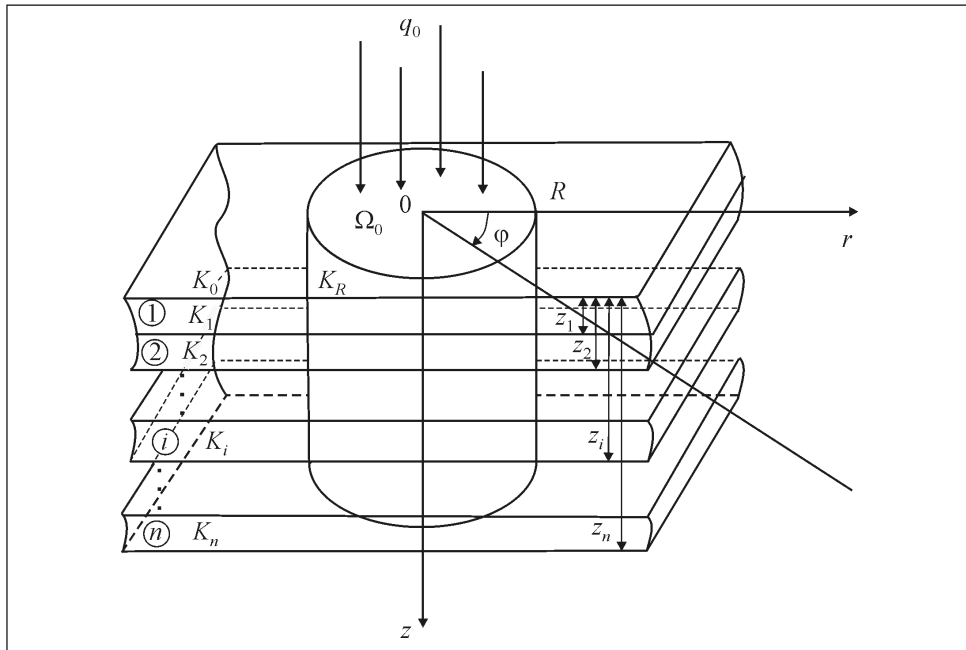


Рис. 1. Изотропный кусочно-однородный слой с инородным сквозным цилиндрическим включением, нагреваемый тепловым потоком

Введем функцию

$$T = \lambda(r, z) \theta(r, z) \quad (4)$$

и продифференцируем ее по переменным  $r$  и  $z$  с учетом (3). В результате получим

$$\begin{aligned} \lambda(r, z) \frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial r} + \theta|_{r=R} \delta_+(r-R) \sum_{i=1}^n (\lambda_0 - \lambda_i) N(z, z_{i-1}), \\ \lambda(r, z) \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z} - \sum_{i=1}^{n-1} [\lambda_i + (\lambda_0 - \lambda_i) S_-(R-r)] \times \\ \times [\theta|_{z=z_{i-1}} \delta_-(z - z_{i-1}) - \theta|_{z=z_i} \delta_+(z - z_{i-1})]. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $\delta_{\pm}(\zeta) = \frac{dS_{\pm}(\zeta)}{d\zeta}$  — асимметричные дельта-функции Дирака [17].

Подставив выражения (5) в соотношение (1), приходим к дифференциаль-

ному уравнению в частных производных с разрывными и сингулярными коэффициентами:

$$\Delta T + \frac{R}{r} \theta|_{r=R} \delta'_+(r-R) \sum_{i=1}^n (\lambda_0 - \lambda_i) N(z, z_{i-1}, z_i) - \sum_{i=1}^{n-1} [\lambda_i + (\lambda_0 - \lambda_i) S_-(R-r)] [\theta|_{z=z_{i-1}} \delta'_-(z-z_{i-1}) - \theta|_{z=z_i} \delta'_+(z-z_{i-1})] = 0, \quad (6)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа в цилиндрической системе координат,

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

**Численно-аналитическое решение.** Аппроксимируем функции  $\theta(R, z)$ ,  $\theta(r, z_i)$  в виде

$$\begin{aligned} \theta(R, z) &= \theta_1^{(iR)} + \sum_{k=1}^{m-1} (\theta_{k+1}^{(iR)} - \theta_k^{(iR)}) S_-(z - z_k^{(i)*}), \\ \theta(r, z_i) &= \theta_1^{(z_i)} + \sum_{l=1}^{p-1} (\theta_{l+1}^{(z_i)} - \theta_l^{(z_i)}) S_-(r - r_l), \quad r \in ]R; r^* [; \\ \theta(r, z_i) &= \theta_1^{(z_i)} + \sum_{l=1}^{t-1} (\theta_{l+1}^{(z_i)} - \theta_l^{(z_i)}) S_-(r - r_l), \quad r \in [0; R], \end{aligned} \quad (7)$$

где  $z_k^{(i)*} \in ]z_{i-1}; z_i [$ ,  $z_1^{(i)*} \leq z_2^{(i)*} \leq \dots \leq z_{m-1}^{(i)*}$ ;  $r_l \in ]0, r^* [$ ,  $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_{p-1}$ ,  $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_{t-1}$ ,  $m, p, t$  — число разбиений интервалов соответственно  $]z_{i-1}; z_i [$ ,  $]R; r^* [$ ,  $[0; R]$ ;  $\theta_k^{(iR)}$  ( $k=1, m$ ),  $\theta_l^{(z_i)}$  ( $l=1, p+t$ ),  $i=1, n$  — неизвестные аппроксимирующие значения температуры;  $r^*$  — значение радиальной координаты, в которой температура  $t(r, z)$  практически равна  $t_c$ .

Подставив выражения (7) в уравнение (6), получим

$$\begin{aligned} \Delta T &= -\frac{R}{r} \delta'_+(r-R) \sum_{i=1}^n (\lambda_0 - \lambda_i) \left[ \theta_1^{(iR)} N(z, z_{i-1}, z_i) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{m-1} (\theta_{k+1}^{(iR)} - \theta_k^{(iR)}) N(z, z_k^{(i)*}, z_i) \right] + \\ &+ \sum_{i=1}^n \left\{ \left[ \lambda_i \left( \theta_1^{(z_{i-1})} + \sum_{l=1}^{p-1} (\theta_{l+1}^{(z_{i-1})} - \theta_l^{(z_{i-1})}) S_-(r - r_l) \right) + (\lambda_0 - \lambda_i) (\theta_1^{(z_{i-1})} S_-(R-r) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{l=1}^{t-1} (\theta_{l+1}^{(z_{i-1})} - \theta_l^{(z_{i-1})}) S_-(r - r_l) \right) \right] \delta'_-(z - z_{i-1}) - \right. \end{aligned}$$

$$-\left[ \lambda_i \left( \theta_1^{(z_i)} + \sum_{l=1}^{p-1} (\theta_{l+1}^{(z_i)} - \theta_l^{(z_i)}) S_-(r-r_l) \right) + (\lambda_0 - \lambda_i) \left( \theta_1^{(z_i)} S_-(R-r) + \sum_{l=1}^{t-1} (\theta_{l+1}^{(z_i)} - \theta_l^{(z_i)}) S_-(r-r_l) \right) \right] \delta'_+(z-z_{i-1}), \quad (8)$$

где  $N(z, z_k^{(i)*}, z_i) = S_-(z-z_k^{(i)*}) - S_+(z-z_i)$ . Применив интегральное преобразование Хенкеля по координате  $r$  к уравнению (8) и краевым условиям (2) с учетом соотношения (4), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{T}}{dz^2} - \xi^2 \bar{T} = & \frac{1}{\xi} \sum_{i=1}^n \left\{ \left[ \lambda_i \left( \theta_1^{(z_{i-1})} \delta_+(\xi) + \sum_{l=1}^{p-1} (\theta_{l+1}^{(z_{i-1})} - \theta_l^{(z_{i-1})}) (\delta_+(\xi) - r_l J_1(r_l \xi)) \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + (\lambda_0 - \lambda_i) (\theta_1^{(z_{i-1})} R J_1(R \xi) + \sum_{l=1}^{t-1} (\theta_{l+1}^{(z_{i-1})} - \theta_l^{(z_{i-1})}) (\delta_+(\xi) - r_l J_1(r_l \xi)) \right) \right] \times \\ & \times \delta'_-(z-z_{i-1}) - \left[ \lambda_i \left( \theta_1^{(z_i)} \delta_+(\xi) + \sum_{l=1}^{p-1} (\theta_{l+1}^{(z_i)} - \theta_l^{(z_i)}) (\delta_+(\xi) - r_l J_1(r_l \xi)) \right) + \right. \\ & \left. + (\lambda_0 - \lambda_i) \left( \theta_1^{(z_i)} R J_1(R \xi) + \sum_{l=1}^{t-1} (\theta_{l+1}^{(z_i)} - \theta_l^{(z_i)}) (\delta_+(\xi) - r_l J_1(r_l \xi)) \right) \right] \delta'_+(z-z_{i-1}) \Big\} - \\ & - R \xi J_1(R \xi) \sum_{i=1}^n (\lambda_0 - \lambda_i) \left[ \theta_1^{(iR)} N(z, z_{i-1}, z_i) + \sum_{k=1}^{m-1} (\theta_{k+1}^{(iR)} - \theta_k^{(iR)}) N(z, z_k^{(i)*}, z_i) \right], \quad (9) \end{aligned}$$

и краевым условиям

$$\left. \frac{d\bar{T}}{dz} \right|_{z=0} = -\frac{q_0 R}{\xi} J_1(R \xi), \quad \left. \frac{d\bar{T}}{dz} \right|_{z=z_n} = 0, \quad (10)$$

где  $\bar{T}(\xi, z)$  — трансформанта функции  $T(r, z)$ ,

$$\bar{T}(\xi, z) = \int_0^\infty r J_0(r \xi) T(r, z) dr;$$

$\xi$  — параметр интегрального преобразования Хенкеля;  $J_\nu(\zeta)$  — функция Бесселя первого рода  $\nu$ -го порядка.

Решив уравнение (9) методом вариации постоянных, получаем его общее решение:

$$\begin{aligned} \bar{T} = & c_1 e^{\xi z} + c_2 e^{-\xi z} + \\ & + \frac{1}{\xi} \sum_{i=1}^n \left\{ \left[ \lambda_i \left( \theta_1^{(z_{i-1})} \delta_+(\xi) + \sum_{l=1}^{p-1} (\theta_{l+1}^{(z_{i-1})} - \theta_l^{(z_{i-1})}) (\delta_+(\xi) - r_l J_1(r_l \xi)) \right) + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +(\lambda_0 - \lambda_i) \left( \theta_1^{(z_{i-1})} R J_1(R\xi) + \sum_{l=1}^{t-1} (\theta_{l+1}^{(z_{i-1})} - \theta_l^{(z_{i-1})}) (\delta_+(\xi) - r_l J_1(r_l \xi)) \right) \Bigg] \times \\
 & \quad \times ch\xi(z - z_{i-1}) S_-(z - z_{i-1}) - \\
 & - \left[ \lambda_i \left( \theta_1^{(z_i)} \delta_+(\xi) + \sum_{l=1}^{p-1} (\theta_{l+1}^{(z_i)} - \theta_l^{(z_i)}) (\delta_+(\xi) - r_l J_1(r_l \xi)) \right) + (\lambda_0 - \lambda_i) \times \right. \\
 & \times \left. \left( \theta_1^{(z_i)} R J_1(R\xi) + \sum_{l=1}^{t-1} (\theta_{l+1}^{(z_i)} - \theta_l^{(z_i)}) (\delta_+(\xi) - r_l J_1(r_l \xi)) \right) \right] ch\xi(z - z_i) S_+(z - z_i) \Bigg\} - \\
 & - \frac{R}{\xi} J_1(R\xi) \sum_{i=1}^n (\lambda_0 - \lambda_i) \left\{ \theta_1^{(iR)} [ch\xi(z - z_{i-1}) S_-(z - z_{i-1}) - \right. \\
 & \quad - ch\xi(z - z_i) S_+(z - z_i) - N(z, z_{i-1}, z_i)] + \\
 & \quad + \sum_{k=1}^{m-1} (\theta_{k+1}^{(iR)} - \theta_k^{(iR)}) [ch\xi(z - z_k^{(i)*}) S_-(z - z_k^{(i)*}) - \\
 & \quad \left. - ch\xi(z - z_i) S_+(z - z_i) - N(z, z_k^{(i)*}, z_i)] \right\}. \tag{11}
 \end{aligned}$$

Здесь  $c_1, c_2$  — постоянные интегрирования.

С учетом краевых условий (10), используя соотношение (11), найдем постоянные интегрирования  $c_1, c_2$ , после чего частичное решение задачи (9), (10) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \bar{T} = & \frac{1}{\xi} \sum_{i=1}^n \left\{ \left[ \lambda_i \left( \theta_1^{(z_{i-1})} \delta_+(\xi) + \sum_{l=1}^{p-1} (\theta_{l+1}^{(z_{i-1})} - \theta_l^{(z_{i-1})}) (\delta_+(\xi) - r_l J_1(r_l \xi)) \right) + \right. \right. \\
 & + (\lambda_0 - \lambda_i) \left( \theta_1^{(z_{i-1})} R J_1(R\xi) + \sum_{l=1}^{t-1} (\theta_{l+1}^{(z_{i-1})} - \theta_l^{(z_{i-1})}) (\delta_+(\xi) - r_l J_1(r_l \xi)) \right) \Bigg] \times \\
 & \quad \times \left[ ch\xi(z - z_{i-1}) S_-(z - z_{i-1}) - \frac{ch\xi z}{sh\xi z_n} sh\xi(z_n - z_{i-1}) \right] - \\
 & \quad - \left[ \lambda_i \left( \theta_1^{(z_i)} \delta_+(\xi) + \sum_{l=1}^{p-1} (\theta_{l+1}^{(z_i)} - \theta_l^{(z_i)}) (\delta_+(\xi) - r_l J_1(r_l \xi)) \right) - \right. \\
 & \quad - (\lambda_0 - \lambda_i) \left( \theta_1^{(z_i)} R J_1(R\xi) + \sum_{l=1}^{t-1} (\theta_{l+1}^{(z_i)} - \theta_l^{(z_i)}) (\delta_+(\xi) - r_l J_1(r_l \xi)) \right) \Bigg] \Bigg\} - \\
 & \quad \times \left[ ch\xi(z - z_i) S_+(z - z_i) - \frac{ch\xi z}{sh\xi z_n} sh\xi(z_n - z_i) \right] \Bigg\} - \frac{R}{\xi} J_1(R\xi) \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left\{ \sum_{i=1}^n (\lambda_0 - \lambda_i) [\theta_1^{(iR)} ((ch\xi(z - z_{i-1}) S_-(z - z_{i-1}) - ch\xi(z - z_i) S_+(z - z_i) - \right. \\
 & \quad \left. - N(z, z_{i-1}, z_i)) - \frac{ch\xi z}{sh\xi z_n} (sh\xi(z_n - z_i) - sh\xi(z_n - z_{i-1})) \right\} + \\
 & + \sum_{k=1}^{m-1} (\theta_{k+1}^{(iR)} - \theta_k^{(iR)}) ((ch\xi(z - z_k^{(i)*}) S_-(z - z_k^{(i)*}) - ch\xi(z - z_i) S_+(z - z_i) - \\
 & \quad \left. - N(z, z_k^{(i)*}, z_i)) - \frac{ch\xi z}{sh\xi z_n} (sh\xi(z_n - z_i) - sh\xi(z_n - z_k^{(i)*})) \right\} - \frac{q_0}{\xi} \frac{ch\xi(z - z_n)}{sh\xi z_n} \Big\}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Применив к выражению (12) обратное интегральное преобразование Хенкеля, получим окончательное решение краевой задачи (1), (2) в виде

$$T(r, z) = \int_0^{\infty} \xi \bar{T}(\xi, z) J_0(r\xi) d\xi. \tag{13}$$

Неизвестные аппроксимирующие значения  $\theta_k^{(iR)}$  ( $k = \overline{1, m}$ ),  $\theta_l^{(z_i)}$  ( $l = \overline{1, p+t}$ ),  $i = \overline{1, n}$  температуры находим, решив систему  $n(m+p+t)$  линейных алгебраических уравнений, полученную из выражения (13).

Итак, искомое температурное поле в кусочно-однородном слое со сквозным включением цилиндрической формы описано формулой (13), из которой получаем значение температуры в произвольной точке кусочно-однородного слоя (в его разнородных элементах, в области включения и на поверхностях сопряжения разнородных элементов).

**Анализ полученных результатов.** Выполнен численный анализ безразмерной температуры  $T^* = \lambda_0 \theta / (q_0 R)$  в слое высотой  $2l$  со сквозным включением для таких исходных данных: материал слоя — керамика ВК94-1 ( $\lambda_1 = 13,4$  Вт/(м · С°)), материал включения — серебро ( $\lambda_0 = 419$  Вт/(м · С°)),  $n = 10$  — число разбиений интервала  $]-l; l[$ ;  $L = l/R = 1$ .

Зависимость безразмерной температуры  $T^*$  от безразмерных радиальной  $\rho = r/R$  и аксиальной  $Z = z/R$  координат представлена на рис. 2. Заметим, что максимальная температура достигается в области сосредоточенного теплового потока.

На рис. 3 представлено изменение безразмерной температуры  $T^*$  в зависимости от безразмерных координат  $Z$  и  $\rho$ . Поведение кривых свидетельствует о соответствии математической модели реальному физическому процессу, так как на поверхности  $K_R$  включения наблюдаем выполнение условий идеального теплового контакта (отсутствует скачок температуры).



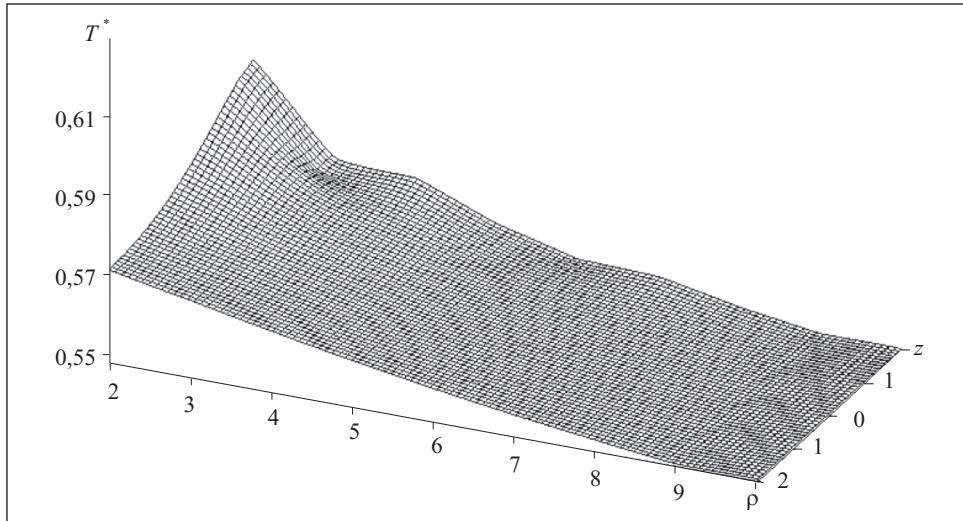


Рис. 2. Зависимость безразмерной температуры  $T^*$  от безразмерных координат  $\rho$  и  $Z$

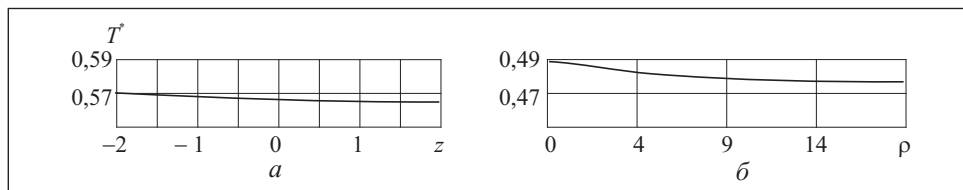


Рис. 3. Зависимость безразмерной температуры  $T^*$  от безразмерных координат  $Z$  при  $\rho = 0$  (а) и  $\rho$  при  $Z = 0$  (б)

Число разбиений  $n = 10$  интервала  $]-l; l[$  [ для приведенных теплофизических (коэффициент теплопроводности для материалов слоя и включения) и геометрических (радиус и высота включения, толщина слоя) параметров структуры позволяет выполнить вычисления с точностью  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

## Выводы

С помощью аппарата обобщенных функций получено уравнение теплопроводности с разрывными и сингулярными коэффициентами (6). Введенная для построения этого уравнения функция (4) дала возможность обойтись без дифференцирования несуществующей операции произведения двух обобщенных функций. Предложенная кусочно-линейная аппроксимация функции температуры на поверхностях сопряжения инородных элементов кусочно-однородного слоя позволила применить интегральное преобразование Хенкеля для получения численно-аналитического реше-

ния (13) краевой задачи теплопроводности (1), (2). Разработанный алгоритм и программные средства для получения численных результатов температурного поля в произвольной точке рассматриваемой конструкции позволяют прогнозировать режимы работы отдельных элементов сложных электронных систем, а также дают возможность идентифицировать неизвестные параметры, способствовать повышению их термостойкости и увеличению срока эксплуатации.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Carpinteri A., Paggi M.* Thermoelastic mismatch in nonhomogeneous beams // *J. Eng. Math.* — 2008. — Vol. 61, No. 2—4. — P. 371—384.
2. *Noda N.* Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties // *Appl. Mech. Rev.* — 1991. — Vol. 44. — P. 383—397.
3. *Otao Y., Tanigawa O., Ishimaru O.* Optimization of material composition of functionality graded plate for thermal stress relaxation using a genetic algorithm // *J. Therm. Stresses.* — 2000. — Vol. 23. — P. 257—271.
4. *Tanigawa Y., Akai T., Kawamura R.* Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties // *Ibid.* — 1996. — Vol. 19, No. 1. — P. 77—102.
5. *Tanigawa Y., Otao Y.* Transient thermoelastic analysis of functionally graded plate with temperature-dependent material properties taking into account the thermal radiation // *Nihon Kikai Gakkai Nenji Taikai Koen Ronbunshu.* — 2002. — Vol. 2. — P. 133—134.
6. *Yangian Xu, Daihui Tu.* Analysis of steady thermal stress in a ZrO<sub>2</sub>/FGM/Ti-6Al-4V composite ECBF plate with temperature-dependent material properties by NFEM // *WASE Int. Conf. on Informa. Eng.* — 2009. — Vol. 2, № 2. — P. 433—436.
7. *Беляев М.М., Рядно О.А.* Математичні методи теплопровідності. /Навч. посібник. — Київ: Вища школа, 1992. — 415 с.
8. *Назаров С.А., Свирс Г.Х., Слуцкий А.С.* Задача теплопроводности для тонкой пластины с контрастными стержневыми включениями // *Вест. Санкт-Петербургского университета. Сер. 1: Математика, механика, астрономия.* — 2009. — № 4. — С. 44—54.
9. *Немировский Ю.В., Янковский А.П.* Решение стационарной задачи теплопроводности слоистых анизотропных неоднородных пластин методом начальных функций. // *Мат. методы та фіз.-мех. поля.* — 2008. — **51**, № 2. — С. 222—238.
10. *Havrysh V.I., Kosach A.I.* Boundary-value problem of heat conduction for a piecewise homogeneous with foreign inclusion // *Materials Science.* — 2012. — Vol. 47, No. 6. — P. 773—782.
11. *Гаврыш В.І., Федасюк Д.В.* Моделювання температурних режимів у кусково-однорідних структурах. — Львів: В-во Нац. ун-ту «Львівська політехніка», 2012. — 176 с.
12. *Havrysh V.I.* Nonlinear boundary-value problem of heat conduction for a layered plate with // *Materials Science.* — 2015. — Vol. 51, No. 3. — P. 331—339.
13. *Гаврыш В.И.* Моделирование температурных режимов в неоднородных элементах электронных устройств со сквозными инородными включениями // *Электрон. моделирование.* — 2015. — **37**, № 4. — С. 109—118.
14. *Гаврыш В.І.* Дослідження температурних полів у термочутливому шарі з наскрізним включенням // *Фізико-хімічна механіка матеріалів.* — 2016. — **52**, № 4. — С. 63—68.
15. *Коляно Ю.М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. — Киев: Наук. думка, 1992. — 280 с.

16. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. — М.: Наука, 1984. — 368 с.
17. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1977. — 720 с.

Поступила 21.11.16;  
после доработки 30.12.16

#### REFERENCES

1. Carpinteri, A. and Paggi, M. (2008), "Thermoelastic mismatch in nonhomogeneous beams", *J. Eng. Math*, Vol. 61, no. 2-4, pp. 371-384.
2. Noda, N. (1991), "Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties", *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 44, pp. 383-397.
3. Otao, Y., Tanigawa, O. and Ishimaru, O. (2000), "Optimization of material composition of functionality graded plate for thermal stress relaxation using a genetic algorithm", *J. Therm. Stresses*, Vol. 23, pp. 257-271.
4. Tanigawa, Y., Akai, T. and Kawamura, R. (1996), "Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties", *J. Therm. Stresses*, Vol. 19, no. 1, pp. 77-102.
5. Tanigawa, Y. and Otao, Y. (2002), "Transient thermoelastic analysis of functionally graded plate with temperature-dependent material properties taking into account the thermal radiation", *Nihon Kikai Gakkai Nenji Taikai Koen Ronbunshu*, Vol. 2, pp. 133-134.
6. Yangian, Xu and Daihui, Tu. (2009), "Analysis of steady thermal stress in a ZrO<sub>2</sub>/FGM/Ti-6Al-4V composite ECBF plate with temperature-dependent material properties by NFEM", *2009-WASE Int. Conf. on Informa. Eng.*, Vol. 2, no. 2, pp. 433-436.
7. Byelyayev, M.M. and Ryadno, O.A. (1992), *Matematychni metody teploprovodnosti* [Mathematical methods of heat conduction], Vyscha shkola, Kyiv, Ukraine.
8. Nazarov, S.A., Svyrs, H.Kh. and Slutskiy, A.S. (2009), "A heat conduction problem for thin plate with contrast road-shaped inclusions", *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta, Ser. I: Matematika, mekhanika, astronomiya*, no. 4, pp. 44-54.
9. Nemyrovskyy, Yu.V. and Yankovskyy, A.P. (2008), "Solution of steady-state problem of heat conduction of layered anisotropic non-homogeneous plates by means of initial functional method", *Matematychni metody ta fizyko-mekhanichni polya*, Vol. 51, no. 2, pp. 222-238.
10. Havrysh, V.I. and Kosach, A.I. (2012), "Boundary-value problem of heat conduction for a piecewise homogeneous with foreign inclusion", *Materials Science*, Vol. 47, no. 6, pp. 773-782.
11. Havrysh, V.I. and Fedasyuk, D.V. (2012), *Modelyuvannya temperaturnykh rezhymiv u kuskovo-odnorodnykh strukturakh* [Modeling of temperature conditions in piecewise-homogeneous structures], Vydavnytstvo Natsionalnoho universytetu "Lvivska politekhnika", Lviv, Ukraine.
12. Havrysh, V.I. (2015), "Nonlinear boundary-value problem of heat conduction for a layered plate with", *Materials Science*, Vol. 51, no. 3, pp. 331-339.
13. Havrysh, V.I. (2015), "Modeling of temperature regimes in non-homogeneous elements of electronic devices with through foreign inclusions", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 37, no. 4, pp. 109-118.
14. Havrysh, V.I. (2016), "Investigation of temperature fields in a thermosensitive layer with a through inclusion", *Fizyko-khimichna mekhanika materialiv*, Vol. 52, no. 4, pp. 63-68.
15. Kolyano, Yu.M. (1992), *Metody teploprovodnosti i termouprugosti neodnorodnogo tela* [Methods of heat conduction and thermoelasticity of inhomogeneous body], Naukova dumka, Kiev, Ukraine.

16. Podstrigach, Ya.S. and Lomakin, V.A. and Kolyano, Yu.M. (1984), *Termouprugost tel neodnorodnoi struktury* [Thermoelasticity of bodies with inhomogeneous structure], Nauka, Moscow, Russia.
17. Korn, G. and Korn, T. (1977), *Spravochnik po matematike dlja nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Reference book for scientific workers and engineers], Nauka, Moscow, Russia.

Received 21.11.16;  
After revision 30.12.16

*V.I. Havrysh, R.B. Tushnytskyy, V.Ya. Krayovskyy, Ye.V. Levus*

#### INVESTIGATION OF TEMPERATURE FIELDS IN MICROELECTRONIC DEVICES OF LAYERED STRUCTURE WITH THROUGH INCLUSIONS

The paper deals with an axially symmetric boundary value problem of heat conduction for isotropic piecewise-homogeneous layer with a through cylinder-shaped inclusion heated at one of its boundary surfaces by concentrated heat flow. Having expressed the heat conductivity factor for the whole system as an indivisible entity with a help of a unit function, we obtained the heat conduction equation with discontinuous and singular coefficients for the considered structure. Having made piecewise-linear approximation of temperature at the lateral surface of the inclusion and at the surfaces of conjugation of the layer's elements, and then having applied Hankel's transformation, and analytical-numerical solution of the problem is obtained. The temperature field in a "layer-inclusion" (the material of layer is silicon, the material of the inclusion is silver) structure has been calculated and analyzed.

*Key words: temperature, isotropic piecewise-homogeneous layer, heat conduction, through foreign inclusion, perfect thermal contact, heat flow.*

*ГАВРЬШ Василий Иванович, д-р техн. наук, доцент, профессор кафедры программного обеспечения Национального университета «Львовская политехника». В 1982 г. окончил Львовский государственный университет им. И. Франко. Область научных исследований — моделирование процессов теплопроводности в телах кусочно-однородной структуры и разработка методов решения линейных и нелинейных граничных задач теплопроводности.*

*ТУШНИЦКИЙ Руслан Богданович, канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры программного обеспечения Национального университета «Львовская политехника». В 2006 г. окончил Львовский национальный университет им. И. Франко. Область научных исследований — моделирование процессов теплопроводности, обработка изображений, параллельные вычисления.*

*КРАЙОВСКИЙ Владимир Ярославович, канд. техн. наук, доцент Национального университета «Львовская политехника». В 1989 г. окончил Львовский политехнический институт. Область научных исследований — физико-технологические основы разработки чувствительных элементов термопреобразователей с использованием интерметаллических полупроводников.*

*ЛЕВУС Евгения Васильевна, канд. техн. наук, доцент, доцент Национального университета «Львовская политехника». В 1996 г. окончила Львовский госуниверситет им. И. Франко. Область научных исследований — математическое обеспечение для систем автоматизированного проектирования микроэлектронных устройств.*