doi:https://doi.org/10.15407/emodel.40.03.033

УДК 519.682.1

С.В. Листровой, д-р техн. наук
Украинский госуниверситет железнодорожного транспорта
(Украина, 61050, Харьков, пл. Фейербаха, 7,
тел. (050) 9355042, e-mail: om1sergeyvladimirovih@gmail.com),
Е.С. Листровая, канд. техн. наук
Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского
(Украина, 61070, Харьков, ул. Чкалова, 17,
e-mail: listravkina@gmail.com)

Обоснование гипотезы о четырех красках

Дано обоснование машинного доказательства гипотезы о четырех красках, выполненного группой математиков, возглавляемой К. Аппелем и В. Хейкеном [1].

Ключевые слова: хроматическое число, триангуляция, плотность графа.

Раскраска плоских триангуляций имеет важное значение в теории дискретной математики, а также при решении задач синтеза и анализа интегральных схем и их проектировании [2]. Проблема раскраски плоских триангуляций тесно связана с проблемой о четырех красках. В связи с проблемой четырех красок Г. Биргоф поставил вопрос: какими свойствами должны обладать минимальные плоские графы, вершины которых нельзя правильно раскрасить четырьмя цветами? Такие графы назвали неприводимыми. Затем были изучены графы, названные приводимыми конфигурациями, которые не являются, подграфами неприводимых графов.

В 1969 г. Х. Хееш [3] свел проблему четырех красок к исследованию большого, но конечного, множества U так называемых неустранимых конфигураций, представляющих собой плоские триангуляции, гранями которых являются треугольники, а внешней гранью — многоугольник. Он показал, что для любого максимально плоского графа G найдется подграф $\overline{G}$, изоморфный некоторой конфигурации из U и такой, что если граф $\overline{G}$ является 4-раскрашиваемым, то 4-раскрашиваемым будет и граф G. Позже число неустранимых конфигураций было уменьшено до 1482, а в 1976 г. коллективу математиков, возглавляемому К. Аппелем и В. Хейкеном, удалось правильно раскрасить все графы из множества U четырьмя цветами, затратив на это приблизительно 2000 ч работы мощной ЭВМ, что позволило заявить о доказательстве гипотезы о четырех красках [1]. Тем не менее, трудно согласиться с таким доказательством, поскольку и сведение общего случая к неустранимым конфигурациям, и раскраску последних очень сложно повторить.

Предлагается обоснование того, что все неустранимые конфигурации, представляющие собой плоские триангуляции, могут быть раскрашены четырьмя красками, и для этого нет необходимости все их перебирать.

Основные понятия и определения. Триангуляция — это плоский граф, все грани которого являются треугольниками, а внешняя грань — многоугольник. Пусть $G(V, E)$ — граф, k — натуральное число.

Определение 1. Функция **c**: $V \to \{1, \ldots, k\}$ называется правильной k-раскраской графа, если для любых смежных вершин $v_i, v_j \in V$ справедливо неравенство $c(v_i) \neq c(v_j)$.

Определение 2. Наименьшее число k, при котором существует правильная k-раскраска графа G, называется хроматическим числом графа G.

Хроматическое число обозначаем через $\chi(G)$. Раскраска с таким числом красок называется оптимальной. Понятие хроматического числа тесно связано с понятием плотности графа $\varphi(G)$. Под плотностью графа понимают размер $\beta_{\max}$ максимальной клики $Q_i^{\max}$, содержащейся в данном графе G [4].

Обоснование гипотезы. Рассмотрим основные элементы, из которых состоят плоские триангуляции. Любую триангуляцию можно представить в виде различных объединений графов K_3 и графов K_4 и их различных комбинаций, которые в общем случае могут объединяться по одному общему ребру и иметь одну общую вершину. Различные комбинации объединений представлены на рис. 1. Нетрудно видеть, что $\chi(G_1) = \chi(G_3) = 4$, а $\chi(G_2) = 3$. Произвольные триангуляции могут быть расширены не только посредством объединения графов K_3 и K_4, но и в результате добавления в каждую треугольную грань вершин $\{x_i\}$ присоединений их с вершинами треугольной грани, в которую они помещены.

Рассмотрим, как влияет добавление вершин $\{x_i\}$ на хроматическое число графа на примере графа G_1. Новая триангуляция, полученная из графа G_1 добавлением множества вершин $\{x_i\} = \{6, 7, 8, 9\}$, будет иметь вид, представленный на рис. 2. Поскольку граф G_1 имеет хроматическое число $\chi(G_1) = 4$, все вершины треугольников $\{1, 2, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 5\}$ могут быть окрашены в три различных цвета. Следовательно, все добавленные вершины $\{x_i\} = \{6, 7, 8, 9\}$ в каждом треугольнике можно покрасить соответственно в четвертый цвет, не нарушая правильность

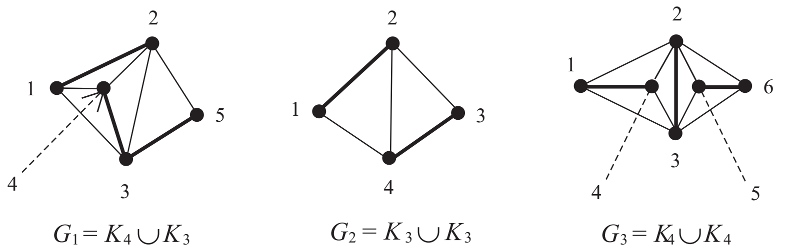


Рис. 1. Комбинации объединений графов K_3 и K_4

раскраски триангуляции. Ясно, что если во все треугольники триангуляции, изображенной на рис. 2, добавить в каждую треугольную грань вершины $\{x_i\}$, соединяя их с вершинами треугольной грани, в которую они помещаются, то получим новую триангуляцию в виде графа G большей размерности, имеющей тоже самое хроматическое число $\chi(G) = 4$. При этом можно получить триангуляцию произвольной размерности, хроматическое число которой не будет меняться и не будет превышать четырех. Такие рассуждения можно применить и для графов G_2 и G_3. Следовательно, операция добавления вершин $\{x_i\}$ в произвольную триангуляцию, заданную в виде графа G, приводит к новой триангуляции G' с хроматическим числом $\chi(G) \le 4$.

Таким образом, если из произвольной триангуляции, заданной в виде графа G, удалить все вершины $\{x_i\}$, получим триангуляцию G' с хроматическим числом $\chi(G) \le 4$. Тогда вопрос раскраски произвольной триангуляции четырьмя красками можно рассматривать только для триангуляций, образованных из одних треугольников, так как если триангуляция G' окрашивается четырьмя красками, то добавление вершин $\{x_i\}$ не изменит хроматическое число триангуляции, получаемой в результате добавления вершин. Поэтому далее рассмотрим возможности раскраски четырьмя красками триангуляций, состоящих только из треугольников и соответственно не содержащих графов K_4.

Начнем с триангуляций, не содержащих графов K_4, формирующихся на основе подграфов триангуляций, называемых колесами W_n [5]. Каждое колесо имеет вершину i, которую назовем центром колеса. Вершины, с которыми соединен центр i, называют окружением вершины i, а ребра, соединяющие центр колеса i с вершинами окружения,— спицами (рис. 3).

Следует заметить, что $W_3 = K_4$, а $|W_n| = n+1$. Рассмотрим два колеса с четным числом вершин в окружении центра и нечетным числом вершин окружения. Ясно, что если окружение имеет четное число вершин, то вершины окружения могут быть окрашены двумя красками, а колесо полностью — тремя красками. Если же число вершин в окружении колеса —

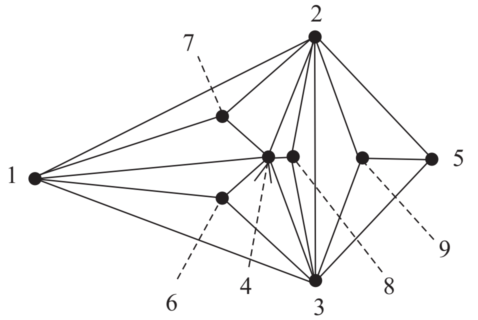


Рис. 2. Триангуляция, полученная из графа G_1 добавлением множества вершин $\{x_i\} = \{6, 7, 8, 9\}$

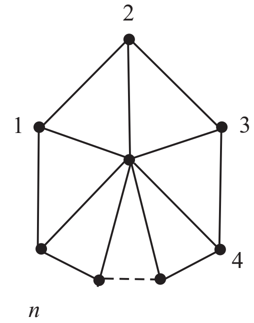


Рис. 3. Колесо W_n

нечетное, то окружение колеса всегда окрашивается тремя красками, а полное колесо — четырьмя красками, и, следовательно, хроматическое число произвольного колеса $\chi\,(W_n) \le 4$.

Рассмотрим процедуру наращивания колеса до максимально плоской конфигурации без мультиребер посредством подсоединения к нему треугольника.

Процедура ***B***

Шаг 1. Выбираем ребро $(i, j) \in W_n$ и соединяем вершины i и j с новой вершиной $k \notin W_n$, т.е. подсоединяем треугольник (i, j, k) к колесу W_n и переходим к выполнению следующего шага.

Шаг 2. Соединяем вершину k с вершиной $s \in W_n$, с которой вершина k может образовать треугольную грань, и переходим к выполнению следующего шага.

Шаг 3. Проверяем, есть ли еще вершины $p \in W_n$, с которыми вершина k может образовать треугольную грань, не образовывая мультиребер с учетом уже построенных новых ребер из вершины k. Если есть, то переходим к выполнению шага 2, иначе процедура заканчивает работу, так как максимально плоская триангуляция G_n^*, не содержащая мультиребер, построена посредством подсоединения треугольника (i, j, k).

Пример реализации процедуры ***B*** для построения максимально плоской триангуляции G_7 без мультиребер на основе колеса W_5 представлен на рис. 4. Триангуляцию G_7 можно представить в виде объединения графов, приведенных на рис. 5. Как видим, хроматическое число при подсоединении треугольника и дополнении триангуляции до максимально полной с использованием процедуры ***B*** не изменяется. Дальнейшее разрастание триангуляции возможно при подсоединении очередного треугольника с использованием процедуры ***B***.

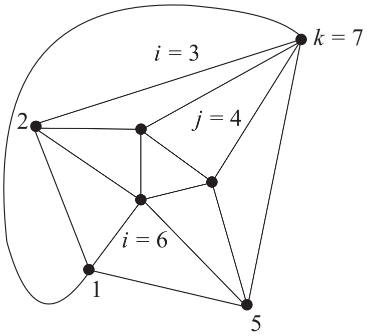


Рис. 4. Триангуляция G_7

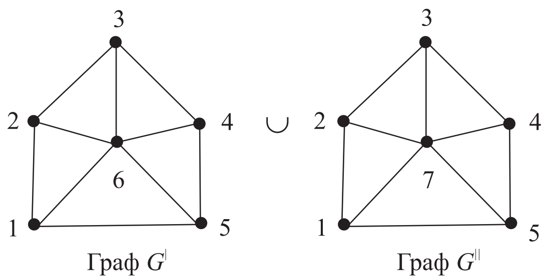
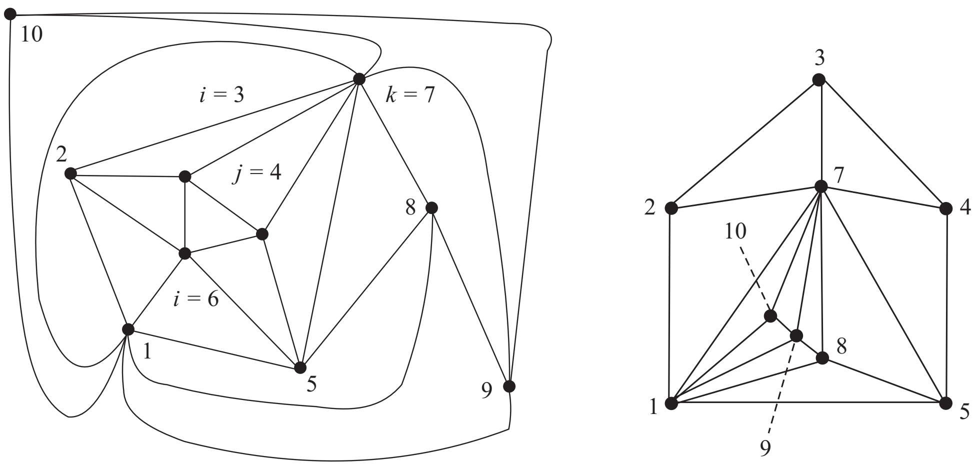


Рис. 5. Представление G_7 в виде объединения графов $G_7^{|} \cup G_7^{|}$



а *б*

Рис. 6. Триангуляция G_{10}

Результат такого процесса формирования триангуляции G_{10} с последовательным подсоединением треугольников с вершинами 8, 9, 10 представлен на рис. 6, *а*. Это эквивалентно появлению в треугольных гранях графа $G^{||}$ центров 8, 9, 10, соединенных с вершинами каждой грани (рис. 6, *б*). Поскольку уже установлено, что наличие этих центров не изменяет хроматического числа триангуляции, их можно удалить вместе с инцидентными им ребрами. Если построение триангуляции осуществляется на основе произвольного колеса с использованием процедуры ***B***, то ее хроматическое число не будет превышать четырех.

Рассмотрим возможность расширения триангуляций посредством объединения различных колес, которое может происходить по одному ребру (i, j) или нескольким ребрам. Например, в случае объединения колес

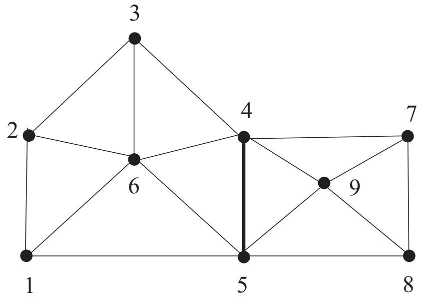


Рис. 7. Объединение колес W_5 и W_4 по ребру (4, 5)

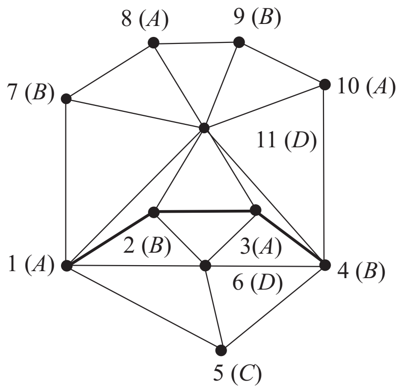


Рис. 8. Объединение колес W_5 и W_8 по ребрам (1, 2,); (2, 3); (3, 4): в скобках у каждой вершины указаны цвета окраски

W_4 и W_5 по ребру (4, 5) (рис. 7) ребро (i, j), по которому осуществляется объединение, будет принадлежать одновременно двум циклам, образованным на вершинах окружения центров, как одного, так и другого колеса.

На рис. 7 такими циклами являются циклы (1, 2, 3, 4, 5) и (4, 7, 8, 5). Ясно, что если центры объединяемых колес окрасить в один цвет, а раскраску начать с концевых вершин, принадлежащих объединению, то в колесе с нечетным числом вершин понадобится три краски, а с четным числом вершин — две краски, с учетом краски для центров колес понадобится не более четырех красок. При этом раскраска будет всегда оставаться правильной независимо от того, какой цикл начинаем красить первым, важно, чтобы раскраска начиналась либо с вершины 4 либо с вершины 5.

Так, при объединении колес, приведенных на рис. 7, вершины, являющиеся центрами колес 6 и 9, можно сразу покрасить в один цвет D, а вершины окружения одного из колес, например колеса W_4 с центром 9, начинаем красить с вершины 4 или 5. Пусть при этом вершина 4 получит краску A, тогда вершина 7 получит краску B, вершина 8 — краску A, вершина 5 — краску B. Если, продолжать раскраску второго цикла с вершины 4, то вершина 3 получит краску B, вершина 2 — краску A и вершина 1 — краску C.

Таким образом, объединение произвольных колес по ребру дает триангуляцию с хроматическим числом, не превышающим четырех. Если в паре объединенных колес есть колесо с нечетным числом в окружении центра одного из колес, то хроматическое число не превысит четырех независимо от того, какое число колес будет объединено и какого они будут размера.

Аналогичная ситуация возникает, когда объединение колес происходит по нескольким ребрам (рис. 8). В этом случае пересекаются два колеса W_5 с центром 6 и колесо W_8 с центром 11. Объединение происходит по ребрам (1, 2,), (2, 3), (3, 4), которые на рис. 8 выделены полужирными линиями. Если раскраску центров колес осуществить в один цвет, например цвет D, а раскраску циклов, образующих окружение центров колес, начинать с концевых вершин 1 или 4 пересечения, то понадобится четыре краски, поскольку есть колесо W_5.

Ясно, что если наращивать триангуляцию посредством объединения с другими колесами, в которых объединение будет происходить по нескольким ребрам, то хроматическое число такой триангуляции $\chi(G) \leq 4$. Хроматическое число триангуляции будет $\chi(G) \leq 3$ только в том случае, если в ней не содержится колесо с окружением из нечетного числа вершин. Если триангуляция не содержит колес, то она всегда может быть достроена до колеса или объединения нескольких колес.

Итак, если рассматривается произвольный граф, все грани которого кроме внешней, являющейся многоугольником, есть треугольники, то такой граф может быть преобразован посредством подсоединения треугольников с помощью процедуры ***B*** в максимально плоское колесо без мультиребер и объединения колес. Если в графе отсутствуют колеса, он всегда может быть дополнен до колеса или объединения нескольких колес. При этом получаем новый граф, представляющий собой плоскую триангуляцию и содержащий в себе исходную триангуляцию в виде подграфа, которая гарантировано имеет хроматическое число, не превышающее четырех красок. Следовательно, и все неустранимые конфигурации из множества U, представляющие собой плоские триангуляции, которые раскрашивала группа К. Аппеля, тоже имеют хроматическое число $\chi(G) \leq 4$, что и требовалось показать.

Выводы

Таким образом, все неустранимые конфигурации, представляющие собой плоские триангуляции, могут быть раскрашены четырьмя красками, и для этого нет необходимости все их перебирать.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Appel K., Haken W.* Every Planar Map Four Colorable contemporary Mathematics // Amer. Math. Soc.,1989, Vol. 98, 308 p.
2. *Берж К.* Теория графов и её применение. М.: ИЛ, 1962.
3. *Heesch H.* Untersuchungen zum Vierfarbenproblem, Hochschilskriptum 810/a/b/Bibliographisches Institut, Mannheim 1969.
4. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973. 2-е изд. М.: УРСС, 2003.
5. *Емеличев В.Б., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И.* Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.

Получена 19.12.17

REFERENCES

1. Appel, K. and Haken, W. (1989), Every planar map four colorable contemporary mathematics, (R. I.): Amer. Math. Soc., Vol. 89.
2. Berge, K. (1962), *Teoriya grafov i yeyo primenenie* [The theory of graphs and its application], IL, Moscow, USSR.
3. Heesch, H. (1969), Untersuchungen zum Vierfarbenproblem, Hochschilskriptum 810/a/b/ Bibliographisches Institut, Mannheim.
4. Harari, F. (1973), *Teoriya grafov, 2oe izd.* [Theory of graphs, 2nd ed.], Mir, Moscow, USSR.
5. Emelichev, V.B., Melnikov, O.I., Sarvanov, V.I. and Tyshkevich, R.I. (1990), *Lektsii po teorii grafov* [Lectures on graph theory], Nauka, Moscow, USSR.

Received 19.12.17

С.В. Листровий , *О.С. Листрова*

ОБҐРУНТУВАННЯ ГІПОТЕЗИ ПРО ЧОТИРИ ФАРБИ

Дано обґрунтування машинного доказу гіпотези про чотири фарби, який виконано групою математиків, очолюваною К. Аппелем і В. Хейкеном [1].

К л ю ч о в і с л о в а: хроматичне число, тріангуляція, щільність графа.

S.V. Listrovoy, *E.S. Listrovaya*

SUBSTANTIATION OF THE HYPOTHESIS ON FOUR COLORS

The paper provides a substantiation of the machine proof of the hypothesis of four colors conducted by a group of mathematicians headed by K. Appel and V. Heiken [1].

K e y w o r d s: chromatic number, triangulation, graph density.

ЛИСТРОВОЙ Сергей Владимирович , д-р техн. наук, профессор Украинского государственного университета железнодорожного транспорта (г. Харьков). В 1972 г. окончил Харьковское высшее военное командно-инженерное училище. Область научных исследований — задачи дискретной оптимизации и теории графов и их приложения к анализу вычислительных систем и сетей.

ЛИСТРОВАЯ Елена Сергеевна, канд. техн. наук, доцент кафедры экономики и маркетинга Национального аэрокосмического университета им. Н.Е.Жуковского (г. Харьков), который окончила в 1998 г. Область научных исследований — применение информационных систем в экономической сфере деятельности.