doi:https://doi.org/10.15407/emodel.40.04.019

УДК 532.546:519.63

С.О. Гусейнзаде, канд. физ.-мат. наук
Азербайджанский государственный университет
нефти и промышленности
(Азербайджан, AZ 1010, Баку, пр-т Азадлыг, 20,
тел. (994 50 3407029), e-mail: sevilhuseynzade@gmail.com

Восстановление давления на границе пласта на основе решения обратной задачи

Предложен численный метод решения обратной задачи определения условия на внешней границе пласта на основе информации, полученной из скважины. Рассмотрено прямолинейно-параллельное течение однофазной жидкости в прямоугольном пласте, описываемое линейным параболическим уравнением. Начальное состояние пласта, давление и расход жидкости на галерее эксплуатационных скважин заданы, а давление на внешней границе пласта не известно. В качестве параметров регуляризации приняты возмущение и дискретный шаг по времени. Данная задача относится к классу граничных обратных задач. После применения метода нелокального возмущения граничных условий и дискретизации для решения полученной системы разностных уравнений задача сведена к двум разностным задачам и одному линейному уравнению относительно приближенного значения давления на границе пласта. На основе предложенного вычислительного алгоритма проведены численные расчеты для модельных задач.

Ключевые слова: нефтяной пласт, прямолинейно-параллельное течение, граничная обратная задача, метод нелокального возмущения, разностный метод.

Известно, что компьютерное гидродинамическое моделирование является одним из основных инструментов, применяемых как при проектировании систем разработки, так и в период эксплуатации нефтяных месторождений. Для моделирования процессов, происходящих при разработке продуктивных пластовых систем, используется система уравнений, включающая в себя дифференциальные уравнения непрерывности фаз, закон фильтрации и уравнения состояния жидкостей и пористой среды [1]. При этом геометрическая конфигурация пласта, а также свойства породы и жидкостей считаются известными. Для однозначного определения полей давления и скоростей фильтрации система уравнений дополняется начальными и граничными условиями, описывающими начальное состояние пласта и его взаимодействие с окружающей средой.

Обычно граничные условия задаются относительно давления или расхода жидкостей (или их комбинации) на скважинах и на внешней границе пласта. Однако при исследовании математических моделей реальных процессов фильтрации в нефтяных пластах возникает ряд трудностей, связанных с дополнительной информацией, в частности граничным условием на внешней границе пласта. Как известно, процессы, происходящие на внешней границе пласта при разработке, не доступны для непосредственного наблюдения. Основными источниками информации о процессах, происходящих в пласте при разработке, являются эксплуатационные скважины, где возможны непосредственные измерения давления и расхода фаз. Этим обусловлена необходимость определения полей давления и скоростей фильтрации в процессе разработки пласта только на основании информации, полученной из скважины.

Постановка задачи и метод решения. Будем рассматривать деформируемый, неоднородный, горизонтально расположенный нефтеносный пласт протяженностью L, постоянной толщины и ширины, ограниченный сверху и снизу непроницаемыми плоскостями. В сечении пласта $x=0$ расположена галерея эксплуатационных скважин. Пусть в момент времени $t=0$ вводится в эксплуатацию галерея эксплуатационных скважин и в пласте возникает упругий режим разработки. Под воздействием потенциальной энергии упругой деформации нефти и пласта происходит прямолинейно-параллельное течение однофазной жидкости (нефти) к галерее скважин.

Математическую модель нестационарного прямолинейно-параллельного течения нефти в пласте можно представить в следующем виде [2,3]:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}\right), \tag{1}$$

где $\lambda(x)=k(x)/\mu\beta^{*}$; $P(x,t)$ — давление в пласте; $k(x)$ — абсолютная проницаемость пласта; μ — вязкость нефти; β^{*} — коэффициент упругоемкости пласта.

Начальное и граничные условия для (1) запишем в виде

$$P(x,0)=\varphi(x), \tag{2}$$

$$P(0,t)=P_w(t), \tag{3}$$

$$P(l,t)=v(t). \tag{4}$$

Поскольку процессы, происходящие на контуре пласта, не доступны для непосредственного измерения, давление на контуре пласта $v(t)$ считается неизвестным и подлежит определению наряду с функцией $P(x,t)$. Однако для корректной постановки задачи взамен граничного условия на контуре пласта необходимо ставить дополнительное условие. Предположим, что на эксплуатационной галерее скважин кроме давления известна также скорость течения жидкости. Тогда дополнительное условие для уравнения (1) можно представить в виде

$$\frac{k}{\mu}\frac{\partial P(0,t)}{\partial x}=q(t). \tag{5}$$

Таким образом, задача состоит в определении функций $P(x,t)$ и $v(t)$ при выполнении условий (1)—(5) и относится к классу граничных обратных задач [4—8]. Для решения данной задачи используем метод нелокального возмущения граничных условий [9—13], согласно которому граничное условие (3) заменим нелокальным:

$$P(0,t)+\alpha P(l,t)=P_w(t), \tag{6}$$

где α — параметр возмущения. Уравнение (1) и условия (2)—(5) представим в безразмерной форме. Следует заметить, что представление уравнения в безразмерной форме позволяет выбрать такой диапазон изменения безразмерных переменных, который дает возможность улучшить обусловленность задачи.

Введем следующие безразмерные величины:

$$\bar{x}=x/l,\ \bar{P}=P/P_0,\ \bar{k}=k/k_0,\ \bar{t}=t/t^*,\ \overline{\beta^*}=\beta^*/\beta_0^*,\ \bar{\mu}=\mu/\mu_0,$$

где $l, P_0, k_0, \beta_0^*, \mu_0, t^*$ — размерные величины, $t^*=\dfrac{l^2\mu_0\beta_0^*}{k_0}$. Тогда, опустив черточки над безразмерными переменными, задачу (1), (2), (4)—(6) запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}\right), \tag{7}$$

$$P(x,0)=\varphi(x), \tag{8}$$

$$P(0,t)+\alpha P(1,t)=P_w(t), \tag{9}$$

$$P(1,t)=v(t), \tag{10}$$

$$\frac{k}{\mu}\frac{\partial P(0,t)}{\partial x}=q(t). \tag{11}$$

Методы численного решения граничных обратных задач (7)—(11) исследованы в [9—13].

Для решения полученной задачи (7)—(11) сначала построим ее дискретный аналог, для чего введем равномерную сетку, $\overline{\omega}=\{(x_i, t_j): x_i = i\Delta x,\ i=\overline{0,n};\ t_j = j\Delta t,\ j=\overline{0,m}\}$, с шагами $\Delta x = 1/n$ по переменной x и $\Delta t = T/m$ по переменной t. Дискретный аналог задачи (7)—(11) на сетке $\overline{\omega}$ представим в виде

$$\frac{P_i^j - P_i^{j-1}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x}\left(\lambda_{i+1/2}\frac{P_{i+1}^j - P_i^j}{\Delta x} - \lambda_{i-1/2}\frac{P_i^j - P_{i-1}^j}{\Delta x}\right),\ i=\overline{1,n-1};\ j=\overline{1,m}, \quad (12)$$

$$P_i^0 = \varphi(x_i),\ \ i=\overline{0,n}, \quad (13)$$

$$P_0^j + \alpha P_n^j = P_w^j,\ \ j=\overline{0,m}, \quad (14)$$

$$P_n^j = v^j,\ \ j=\overline{0,m}, \quad (15)$$

$$\frac{k}{\mu}\frac{P_1^j - P_0^j}{\Delta x} = q^j,\ \ j=\overline{0,m}, \quad (16)$$

где $P_i^j \approx P(x_i, t_j)$; $P_w^j = P_w(t_j)$; $q^j = q(t_j)$; $v^j \approx v(t_j)$; $\lambda_{i\pm 1/2} = \lambda(x_i \pm \Delta x/2)$. Решение полученной системы разностных уравнений при каждом фиксированном значении j представим в следующем виде:

$$P_i^j = s_i^j + v^j z_i,\ i=\overline{0,n}, \quad (17)$$

где s_i^j и z_i — неизвестные переменные. Подставив (17) в (12), получим

$$\frac{s_i^j + v^j z_i - P_i^{j-1}}{\Delta t} =$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\left(\lambda_{i+\frac{1}{2}}\frac{s_{i+1}^j + v^j z_{i+1} - s_i^j + v^j z_i}{\Delta x} - \lambda_{i-\frac{1}{2}}\frac{s_i^j + v^j z_i - s_{i-1}^j + v^j z_{i-1}}{\Delta x}\right),$$

или

$$\left[\frac{s_i^j - P_i^{j-1}}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta x}\left(\lambda_{i+\frac{1}{2}}\frac{s_{i+1}^j - s_i^j}{\Delta x} - \lambda_{i-\frac{1}{2}}\frac{s_i^j - s_{i-1}^j}{\Delta x}\right)\right] +$$

$$+ v^j\left[\frac{z_i}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta x}\left(\lambda_{i+\frac{1}{2}}\frac{z_{i+1} - z_i}{\Delta x} - \lambda_{i-\frac{1}{2}}\frac{z_i - z_{i-1}}{\Delta x}\right)\right] = 0.$$

Соотношение (17) подставим также в (15), (16) и получим

$$s_n^j + v^j z_n = v^j,$$

$$\frac{k}{\mu}\frac{s_1^j - s_0^j}{\Delta x} + \frac{k}{\mu}\, v^j\,\frac{z_1 - z_0}{\Delta x} = q^j.$$

Из полученных соотношений можно составить следующие разностные задачи относительно переменных s_i^j и z_i, где $i=\overline{0,n}$:

$$\frac{z_i}{\Delta t}-\frac{1}{\Delta x}\left(\lambda_{i+\frac{1}{2}}\frac{z_{i+1}-z_i}{\Delta x}-\lambda_{i-\frac{1}{2}}\frac{z_i-z_{i-1}}{\Delta x}\right)=0\,,\quad i=\overline{1,n}, \tag{18}$$

$$\frac{z_1-z_0}{\Delta x}=0, \tag{19}$$

$$z_n=1, \tag{20}$$

$$\frac{s_i^j-P_i^{j-1}}{\Delta t}-\frac{1}{\Delta x}\left(\lambda_{i+\frac{1}{2}}\frac{s_{i+1}^j-s_i^j}{\Delta x}-\lambda_{i-\frac{1}{2}}\frac{s_i^j-s_{i-1}^j}{\Delta x}\right)=0\,,\quad i=\overline{1,n-1},\quad j=\overline{1,m}, \tag{21}$$

$$\frac{k}{\mu}\frac{s_1^j-s_0^j}{\Delta\, x}=q^j\,,\quad j=\overline{1,m}\,, \tag{22}$$

$$s_n^j=0,\quad j=\overline{1,m}\,. \tag{23}$$

Теперь, подставив соотношение (17) в (14), получим $s_0^j+v^j z_0+\alpha v^j=P_w^j$, откуда можно определить:

$$v^j=\frac{P_w^j-s_0^j}{z_0+\alpha}. \tag{24}$$

Таким образом, алгоритм решения поставленной обратной задачи следующий:

1. Принимаем $j=1$ ($P_i^0=\varphi\,(x_i)$ — известно).

2. Решаем разностную задачу (18)—(20), т.е. определяем переменные z_i, $i=\overline{0,n}$.

3. Решаем разностную задачу (21)—(23), т.е. определяем переменные s_i^j, $i=\overline{0,n}$.

4. По формуле (24) определяем приближенное значение искомой функции $v\,(t)$ при $t=t_j$.

5. По формуле (17) определяем приближенные значения искомой функции $P\,(x,t)$, т.е. P_i^j, $i=\overline{0,n}$.

6. Принимаем $j=j+1$ и переходим к п. 3.

Процесс продолжается до тех пор, пока не будет выполнено условие $j\le M$. Предложенный численный метод позволяет найти распределение давления в пласте, включая границу, в любой момент времени.

Результаты численных расчетов. Для подтверждения эффективности разработанного метода был проведен следующий вычислительный

Таблица 1

t	Точное значение $v(t)$	Вычисленное значение $v(t)$ при $\Delta t = 1$	
		$\alpha = 0{,}001$	$\alpha = 0{,}01$
1	10,282	10,223	9,721
3	10,824	10,801	10,625
5	11,301	11,274	11,049
7	11,673	11,64	11,365
9	11,913	11,875	11,565
11	12	11,959	11,632
13	11,928	11,887	11,562
15	11,702	11,664	11,359
17	11,34	11,307	11,04
19	10,872	10,846	10,631
21	10,335	10,316	10,163
23	9,77	9,76	9,674
25	9,224	9,222	9,203
27	8,74	8,746	8,788
29	8,356	8,369	8,462

эксперимент . Для заданной функции $v(t)$ решалась прямая задача (7), (8), (10), (11). Найденная зависимость $P_w(t) = P(0,t)$ была принята как точные данные для численного решения обратной задачи по восстановлению $v(t)$. Расчеты выполнены на пространственно-временной сетке с шагами $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta t = 0{,}2$, $\Delta t = 1$. Было проведено две серии численных экспериментов при $\mu = 3$, $\beta^* = 1$, $k = 0{,}5$, $q = 0{,}2$, $\varphi = 10$, $v = 10 + 2\sin 3t$ (все данные представлены в безразмерном виде).

Первая серия экспериментов проводилась для двух значений: $\alpha = 0{,}01$ и $\alpha = 0{,}001$ при заданном значении $\Delta t = 1$. Из табл. 1 видно, что при $\alpha = 0{,}01$ максимальная относительная погрешность восстановления искомой функции не превышает 3 %, а при $\alpha = 0{,}001$ — 0,4 %. Следовательно, использование малых значений α позволяет восстанавливать значение искомой функции с высокой точностью.

Вторая серия численных экспериментов проводилась при заданном значении $\alpha = 0{,}001$ для двух значений: $\Delta t = 0{,}2$ и $\Delta t = 1$. Из табл. 2 видно, что при использовании малых шагов по времени только на начальном этапе вычисления (см. первые четыре строки в третьем столбце) наблюдаются определенные отклонения от точного решения. Этот факт свидетельствует

Таблица 2

t	Точное значение $v(t)$	Вычисленное значение $v(t)$ при $\alpha = 0{,}001$	
		$\Delta t = 0{,}2$	$\Delta t = 1$
0,2	11,129	9,97	
0,4	11,864	13,456	
0,6	11,948	11,377	
0,8	11,351	11,076	
1,00	10,282	10,62	10,223
2,00	9,441	9,385	9,457
3,00	10,824	10,84	10,801
4,00	8,926	8,89	8,93
5,00	11,301	11,32	11,274
6,00	8,498	8,458	8,508
7,00	11,673	11,693	11,64
8,00	8,188	8,149	8,204
9,00	11,913	11,93	11,875
10,00	8,023	7,988	8,04
11,00	12,000	12,013	11,959
12,00	8,016	7,986	8,037
13,00	11,928	11,936	11,887
14,00	8,167	8,142	8,186
15,00	11,702	11,701	11,664

о том, что на начальном этапе разработки пласта данные, полученные из скважины, не несут полезной информации о процессе, происходящем на границе пласта. Однако с течением времени решение определяется с высокой точностью и при этом максимальная относительная погрешность не превышает 0,5 %.

Выводы

Таким образом, моделирование задачи нестационарного однофазного течения в пласте позволяет только на основе информации, полученной из скважины, определять в любой момент времени распределение давления в пласте, включая границу. Анализ результатов численных расчетов свидетельствует о том, что предложенный подход можно использовать при исследовании упругого режима разработки нефтяных пластов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Басниев К.С., Дмитриев Н.М., Розенберг Г.Д.* Нефтегазовая гидромеханика. М.: Ижевский ин-т компьютерных исследований, 2005, 544 с.
2. *Каневская Р.Д.* Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов. М.: Ижевский ин-т компьютерных исследований, 2002, 148 с.
3. *Азиз Х., Сеттари Э.* Математическое моделирование пластовых систем. М.: Ижевский ин-т компьютерных исследований, 2004, 416 с.
4. *Алифанов О.М.* Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988, 280 с.
5. *Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988.
6. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986, 284 с.
7. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное изд-во, 2009, 457 с.
8. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Изд-во ЛКИ, 2009, 480 с.
9. *Япарова Н.М.* Численное моделирование решений обратной граничной задачи теплопроводности // Вест. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование, 2013, **6**, Вып. 3, с. 112—124.
10. *Сабитов К.Б.* Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. М.: Наука, 2016, 272 с.
11. *Короткий А.И., Стародубцева Ю.В.* Моделирование прямых и обратных граничных задач для стационарных моделей тепломассопереноса. Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2015, 168 с.
12. *Вержбицкий М.А.* Обратные задачи об определении граничных режимов// Вест. Югорского университета, 2017, Вып. 3 (46), с. 51—59.
13. *Kerimov N.B., Ismailov M.I.* An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions // J. of Mathematical Analysis and Applications, — 2012, № 2 (396), p. 546—554.

Получена 06.06.18

REFERENCES

1. Basniev, K.S., Dmitriev, N.M. and Rosenberg, G.D. (2005), *Neftegazovaya gidromekhanika* [Oil and gas hydromechanics], Izhevsky institut kompyuternykh issledovaniy, Moscow, Russia.
2. Kanevskaya, R.D. (2002), *Matematicheskoe modelirovanie gidrodinamicheskikh protsessov razrabotki mestorozhdeniy uglevodorodov* [Mathematical modeling of hydrodynamic processes in hydrocarbon field development], Izhevsky institut kompyuternykh issledovaniy, Moscow, Russia.
3. Aziz, Kh. and E. Settari, E. (2004), *Matematicheskoe modelirovanie plastovykh system* [Mathematical modeling of reservoir systems], Izhevsky institut kompyuternykh issledovaniy, Moscow, Russia.
4. Alifanov, O.M. (1988), *Obratnyie zadachi teploobmena* [Inverse heat transfer problems], Mashinostroenie, Moscow, USSR.
5. Alifanov, O.M., Artyukhin, E.A. and Rumyantsev, S.V. (1988), *Ekstremalnyie metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Extreme methods for solution of incorrect problems], Nauka, Moscow, Russia.

6. Tikhonov A.N. and Arsenin, V.Ya. (1986), *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for solution of incorrect problems], Nauka, Moscow, Russia.
7. Kabanikhin, S.I. (2009), *Obratnyie i nekorrektnyie zadachi* [Inverse and incorrect problems], Sibirskoe nauchnoye izdatelstvo, Novosibirsk, Russia.
8. Samarskiy, A.A. and Vabischevich, P.N. (2009), *Chislennyie metody resheniya obratnykh zadach matematicheskoi fiziki* [Numerical methods for solution of inverse problems of mathematical physics], Izdatelstvo LKI, Moscow, Russia.
9. Yaparova, N.M. (2013), "Numerical modeling of solutions of the inverse boundary value problem of heat conductivity", *Vestnik YuUrGU. Seriya Matematicheskoye modelirovanie i programmirovanie*, Vol. 6, Iss. 3, pp. 112-124.
10. Sabitov, K.B. (2016), *Pryamye i obratnye zadachi dlya uravneniy smeshannogo parabolo-giperbolicheskogo tipa* [Direct and inverse problems for the equations of mixed parabolic-hyperbolic type], Nauka, Moscow, Russia.
11. Korotky, A.I. and Starodubtseva, Yu.V. (2015), *Modelirovanie pryamykh i obratnykh granichnykh zadach dlya statsionarnykh modelei teplomassoperenosa* [Simulation of direct and inverse boundary value problems for stationary models of heat and mass transfer], Izdatelstvo Uralskogo Universiteta, Ekaterinburg, Russia.
12. Verzhbitsky, M.A. (2017), "Inverse problems on the definition of boundary regimes", *Vestnik Yugorskogo Universiteta*, Vol. 46, Iss. 3, pp. 51-59.
13. Kerimov, N.B. and Ismailov, M.I. (2012), An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 396, no. 2, pp. 546-554.

Received 06.06.18

С.О. Гусейзаде

ПОНОВЛЕННЯ ТИСКУ НА ГРАНИЦІ ПЛАСТА
НА ОСНОВІ РОЗВ'ЯЗКУ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ

Запропоновано числовий метод розв'язку оберненої задачі визначення умов на зовнішній границі пласта на основі інформації, отриманої із свердловини. Розглянуто прямолінійно-паралельну течію однофазної рідини в прямокутному пласті, яка описується параболічним рівнянням. Початковий стан пласта, тиск і витрати рідини на галереї експлуатаційних свердловин задано, а тиск на зовнішній границі пласта невідомий. Параметрами регуляризації прийнято збурення і дискретний крок за часом. Розглянута задача належить класу граничних обернених задач. Після застосування метода нелокального збурення граничних умов і дискретизації для розв'язку отриманої системи різницевих рівнянь задачу приведено до двох різницевих задач і одного лінійного рівняння відносно наближеного значення тиску на границі пласта. На основі запропонованого обчислювального алгоритму проведено числові розрахунки для модельних задач.

Ключові слова: нафтяний пласт, прямолінійно-паралельна течія, гранична обернена задача, метод нелокального збурення, різницевий метод.

S.O. Huseynzade

RESTORATION OF PRESSURE AT THE POOL BOUNDARY BASED
ON THE SOLUTION OF INVERSE PROBLEM

A numerical method has been proposed to solve the inverse problem of determining conditions on the outer pool boundary based on information obtained from the hole. The rectilinear-parallel flow of a single-phase fluid in a rectangular pool described by a linear parabolic equation is considered. The initial state of the pool, as well as the pressure and flow rate of liquid in the gallery of production wells are considered to be set, and the pressure on the outer boundary of the pool is unknown. This problem belongs to the class of boundary inverse problems. First, the nonlocal perturbation method of the boundary condition is applied. After that, the problem is discretized and a special representation is proposed to solve the resulting system of difference equations. As a result, the problem is reduced to two difference problems and one linear equation with respect to the approximate value of pressure at the boundary of the pool. On the basis of the proposed computational algorithm, numerical calculations for model problems are carried out.

K e y w o r d s: oil pool, rectilinear-parallel flow, boundary inverse problem, nonlocal perturbation method, difference method.

ГУСЕЙНЗАДЕ Севиль Октай кызы, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры общей и прикладной математики Азербайджанского государственного университета нефти и промышленности. В 1977 г. окончила Бакинский госуниверситет. Область научных исследований — математическое моделирование, численные методы.