doi:https://doi.org/10.15407/emodel.40.05.027

УДК 004.942

Я.А. Калиновский[1], д-р техн. наук,
Ю.Е. Бояринова[1,2], канд. техн. наук,
Я.В. Хицко[2], канд. техн. наук, **А.С. Сукало**[3]

[1] Ин-т проблем регистрации информации НАН Украины
(Украина, 03113, Киев, ул. Н. Шпака, 2,
тел. (044) 4542138; e-mail: kalinovsky@i.ua),
[2] Национальный технический университет Украины
«КПИ им. Игоря Сикорского»
(Украина, 03113, Киев, пр-т Победы, 37)
[3] Национальный университет водного хозяйства и природопользования
(Украина, 33028, Ровно, ул. Соборная, 11)

Использование методов генерации изоморфных гиперкомплексных числовых систем для повышения эффективности умножения гиперкомплексных чисел

Предложен метод умножения гиперкомплексных чисел, обеспечивающий значительное уменьшение объема вещественных операций. Метод заключается в переходе к слабозаполненным изоморфным гиперкомплексным числовым системам (ГЧС), в которых для гиперкомплексного умножения требуется меньшее число вещественных умножений. Синтезированы такие пары изоморфных ГЧС, а также выражения для операторов изоморфизма. Разаработанный метод целесообразно использовать для построения быстрых алгоритмов линейной свертки.

Ключевые слова: гиперкомплексная числовая система, линейная свертка, изоморфизм, умножение, комплексные числа, двойные числа.

Линейная свертка дискретных сигналов является наиболее общей вычислительной задачей в области цифровой обработки сигналов. Радиолокационные системы, системы звуковой локации, обработка сейсмической информации, неразрушающий контроль и компьютерная томография, обработка изображений — этот далеко неполный перечень областей использования линейной свертки дискретных сигналов дает представление о важности данной задачи.

Поскольку сложность вычисления линейной свертки массивов длиной n есть $O(n^2)$ и она быстро увеличивается с возрастанием n, используются методы «быстрых» вычислений, из которых наиболее распространенными являются следующие:

1. Свертка с использованием быстрого преобразования Фурье (БПФ), имеющая сложность $O(n \log n)$. В основе БПФ [1, 2] лежит декомпозиция исходной задачи большой размерности в большое число задач малой размерности. Поэтому весьма важна разработка таких методов решения задач малой размерности, в которых используется, наименьшее число вещественных операций.

2. Переход к кольцу полиномов [1]. Такой переход целесообразен, так как кольца полиномов хорошо исследованы, и операции в них, особенно умножение, выполняются значительно эффективнее, чем непосредственные вычисления, а для самих переходов требуется минимальный расход вычислительных ресурсов.

В соответствии с теоремой Ш. Винограда для линейной свертки [1] нижняя граница количества вещественных умножений равна $2n-1$, что может быть ориентиром при оценке качества алгоритма. Однако в работе [1] утверждается следующее: «Во многих случаях в качестве меры сложности вычислений берется количество арифметических операций в алгоритме. Хотя и существует грубое соответствие между общей и арифметической сложностью алгоритма, все же практическая ценность вычислительного метода зависит от многих факторов. Эффективность алгоритма определяется не только числом операций, но и такими параметрами, как число перемещений данных, стоимость вспомогательных операций, общая структурная сложность, различные возможности, представляемые используемой вычислительной системой, искусство программиста. Поэтому упорядочение алгоритмов по их действительной эффективности, выраженной временем выполнения, является весьма трудным делом, так что сравнения, основанные лишь на числе арифметических операций, должны быть «взвешены» с учетом факторов, возникающих при конкретных реализациях этих алгоритмов».

Поэтому будем рассматривать использование гиперкомплексных числовых систем (ГЧС) для синтеза алгоритмов линейной одномерной свертки. Следует заметить, что наряду с ГЧС, имеющими общепринятые наименования и обозначения (например, C — система комплексных чисел, H — система кватернионов) используются и такие ГЧС, которые не имеют общепринятых наименований и обозначений. Поэтому будем применять терминологию и обозначения, использованные в работах [4, 5].

Принципы приложения методов ГЧС к вычислению свертки. Как известно, компоненты свертки дискретных сигналов, представляют собой суммы парных произведений компонентов сигнала и ядра свертки. В то же время, произведение двух гиперкомплексных чисел также представляет собой суммы парных произведений компонентов этих чисел. Однако одной этой аналогии недостаточно для построения эффективных алгоритмов свертки по многим причинам. Если дискретный сигнал и ядро имеют длину n, и они представляются n-мерными гиперкомплексными числами в некоторой ГЧС, то:

1) свертка имеет $2n-1$ компонентов, а произведение двух гиперкомплексных чисел имеет n компонентов;

2) в каждом компоненте произведения двух гиперкомплексных чисел по n слагаемых, а в компонентах свертки число слагаемых переменное — от единицы до n.

Кроме того, следует учесть, что при умножении двух гиперкомплексных чисел количество вещественных умножений N может изменяться в зависимости от типа применяемой ГЧС в пределах $n \le N \le n^3$, тогда как в свертке n^2 парных произведений.

Для уменьшения количества вещественных умножений можно воспользоваться изоморфными ГЧС. В соответствии с теоремой Вейерштрасса—Дедекинда [3] коммутативная полупростая алгебра изоморфна прямому произведению полей. Это означает, что для всякой канонической ГЧС [4] существует изоморфная ей ГЧС, представляющая собой прямую сумму систем вещественных и комплексных чисел. Рассмотрим два простых примера.

Пример 1. Двойная $W(e,2)$ и ортодвойная $W_1(f,2)$ ГЧС. Таблицы умножения двойных $W(e,2)$ и ортодвойных $W_1(f,2)$ чисел имеют вид

$$W: e_1e_1 = e_2e_2 = e_1,\ e_1e_2 = e_2,\ W_1: e_1e_1 = e_1,\ e_2e_2 = e_2,\ e_1e_2 = 0.$$

Поскольку здесь и далее используются только коммутативные ГЧС, базисные элементы можно коммутировать.

Для умножения двух чисел в системе $W(e,2)$ необходимо выполнить четыре вещественных умножения и два сложения, тогда как при переходе к изоморфной системе $R \oplus R = W_1(f,2)$ — всего два умножения. Действительно, произведение двух гиперкомплексных чисел в ГЧС $W(e,2)$ имеет вид

$$(a_1e_1 + a_2e_2)(b_1e_1 + b_2e_2) = (a_1b_1 + a_2b_2)e_1 + (a_1b_2 + a_2b_1)e_2, \tag{1}$$

а в ГЧС $R \oplus R = W_1(f,2)$ —

$$(c_1f_1 + c_2f_2)(d_1f_1 + d_2f_2) = c_1d_1f_1 + c_2d_2f_2. \tag{2}$$

Оператор изоморфизма этих систем имеет следующий вид [4, 5]:

$$L: \begin{cases} e_1 = f_1 + f, \\ e_2 = f_1 - f_2. \end{cases} \tag{3}$$

Таким образом, используя изложенное выше, можно наметить путь уменьшения количества умножений при вычислении (1), а именно сомножители в левой части (1) перевести из $W(e,2)$ в $R\oplus R=W_1(f,2)$, используя (3), и перемножить их по формуле (2). Затем с помощью преобразования, обратного к L,

$$L^{-1}:\begin{cases} f_1=(e_1+e_2)/2, \\ f_2=(e_1-e_2)/2, \end{cases} \tag{4}$$

перевести произведение обратно в ГЧС $W(e,2)$. По определению изоморфизма ГЧС оно будет равно правой части (1). Следовательно, для вычисления (1) требуется только два умножения вместо четырех. Заметим, что компоненты правой части (1) есть компоненты круговой свертки 2×2.

Из (3) и (4) видно, что «цена» перехода из $W(e,2)$ в $R\oplus R=W_1(f,2)$ и обратно — шесть сложений и два деления на два. Однако, так как свертка выполняется с одним и тем же ядром, переход для которого выполняется один раз, то сложений требуется четыре. Кроме того, деление на два — это короткая операция по сдвигу регистра и ее можно не учитывать. Как будет показано далее, эти деления также можно выполнить один раз при преобразовании ядра. Значит, при уменьшении числа умножений на два необходимо выполнить дополнительно четыре сложения, что позволяет существенно сэкономить вычислительный ресурс.

Пример 2. ГЧС G_{33} и ортотройная $3R$ и вещественно-комплексная $R\oplus C$ ГЧС. Таблицы умножения этих ГЧС третьей размерности имеют вид

$$G_{33}: e_1e_1=e_1,\, e_2e_2=e_3,\, e_3=e_2,\, e_ie_1=e_i,\, i=1,2,3,$$

$$3R: f_if_i=j_i,\, i=1,2,3;\; f_if_j=0,\, i\neq j,\, i,j=1,2,3,$$

$$R\oplus C: f_1f_1=f_1,\, f_1f_2=f_1f_3=0,\, f_2f_2=f_2,\, f_2f_3=f_3,\, f_3f_3=-f_2.$$

ГЧС G_{33} целесообразно использовать для построения алгоритмов свертки 3×3, так как при умножении двух гиперкомплексных чисел третьей размерности получится девять парных произведений, т.е. ровно столько, сколько нужно для построения компонентов свертки 3×3.Однако для умножения гиперкомплексных чисел в ней требуется также девять вещественных умножений. В соответствии с теоремой Вейерштрасса—Дедекинда [3] изоморфными в системе G_{33} могут быть либо ГЧС $3R$, которая является прямой суммой трех полей вещественных чисел R, либо ГЧС $R\oplus C$, которая является прямой суммой полей вещественных R и комплексных чисел C.

Рассмотрим изоморфизм G_{33} и $3R$. Составим в соответствии с [5] систему уравнений изоморфизма этих ГЧС:

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\alpha_{ks}\gamma_{ij}^{k}=\sum_{k=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\sum_{r=1}^{3}\alpha_{ik}\alpha_{js}\gamma_{ks}^{r},\quad i,j,k\in 1,...,3, \tag{5}$$

где γ_{ks} — структурные константы одной из ГЧС; α_{ks} — искомые коэффициенты линейного оператора изоморфизма ГЧС G_{33} и $3R$. Убедимся, что среди 27 решений системы (5) отсутствуют нетривиальные вещественные решения, т.е. в них либо компоненты комплексные, либо детерминант линейного оператора равен нулю. Это означает, что ГЧС G_{33} и $3R$ неизоморфны.

Рассмотрим изоморфизм G_{33} и $R\oplus C$. Система уравнений (5) имеет 21 решение. В результате одного из них получаем такой оператор изоморфизма:

$$e_1=f_1+f_2,\ e_2=f_1-\frac{1}{2}f_2-\frac{\sqrt{3}}{2}f_2,\ e_2=f_1-\frac{1}{2}f_2+\frac{\sqrt{3}}{2}f_2. \tag{6}$$

Детерминант этого оператора имеет вид $-\frac{3\sqrt{3}}{2}\neq 0$, т.е. это преобразование нетривиально, что означает изоморфизм ГЧС G_{33} и $R\oplus C$. Следует, однако, заметить, что для умножения гиперкомплексных чисел в ГЧС $R\oplus C$ требуется четыре вещественных умножения. Но, как следует из (6), для перехода из ГЧС G_{33} в $R\oplus C$ и обратно требуется также четыре вещественных умножения (напомним, что деление на два — короткая операция). Поэтому умножение двух гиперкомплексных чисел третьей размерности при переходе из ГЧС G_{33} в ГЧС $R\oplus C$ и обратно требует восемь вещественных умножений, т.е. выигрыш составляет всего лишь одно умножение при большом количестве дополнительных сложений.

Более перспективным представляется применение системы триплексных чисел T [4, 5], таблица умножения которой имеет вид

$$T: e_1e_i=e_i,\ i=1,2,3;\ e_2e_2=(e_3-e_1)/2,\ e_2e_3=-e_2,\ e_3e_3=e_1. \tag{7}$$

Эта ГЧС изоморфна ГЧС вещественно комплексных чисел $R\oplus C$. Система уравнений изоморфизма (5) этих ГЧС имеет несколько нетривиальных вещественных решений. Результатом одного из них является такой оператор изоморфизма:

$$L:\begin{cases} e_1=f_1+f_2, \\ e_2=\pm f_3, \\ e_3=f_1-f_2, \end{cases}\qquad L^{-1}:\begin{cases} f_1=(e_1+e_3)/2, \\ f_2=(e_1-e_3)/2, \\ f_3=\pm e_3. \end{cases} \tag{8}$$

Как видно из (8), операторы изоморфизма ГЧС T и $R \oplus C$ не содержат вещественных умножений, а содержат только операции сложения и короткие операции деления на два. Поэтому операцию умножения триплексных чисел можно свести к пяти вещественным умножениям, и даже к четырем, применяя алгоритм умножения комплексных чисел с тремя вещественными умножениями:

$$(a+bi)(c+di)=(a(c-d)+d(a-b))+i(b(c+d)+d(a-b)). \qquad (9)$$

Рассмотренные примеры свидетельствуют о том, что выбор для моделирования системы гиперкомплексных чисел является трудно формализуемым процессом. Однако, в одном важном для приложений случае, когда размерность ГЧС равна 2^n, этот процесс значительно упрощается. Рассмотрим этот процесс подробнее [5].

Методы генерации изоморфных ГЧС. По внешнему виду таблиц умножения двух произвольных ГЧС очень трудно установить, изоморфны они или нет. Обычно используется метод составления для них системы уравнений изоморфизма (7). Преимущество этого метода заключается в том, что обе ГЧС обладают желаемой структурой. Однако, во-первых, они могут оказаться неизоморфными, а, во-вторых, как показывает опыт [4], решение системы типа (7) может быть весьма трудным. Система (7) — это система из n^3 нелинейных квадратичных уравнений с n^2 переменными, т.е. система переопределенная. Здесь n — размерность ГЧС. Если для $n<4$ время решения с применением системы символьных вычислений типа Maple невелико, то для $n \geq 4$ оно становится неприемлемым даже при проведении научных исследований. Разработаны алгоритмы, сокращающие это время [5, 6], но не кардинально.

Другим методом генерации изоморфных ГЧС является изоморфное преобразование базиса исходной ГЧС [5]. Этот метод прост в реализации, но, как правило, в результате получаются неканонические ГЧС и весьма труден подбор оператора изоморфизма, который позволил бы получить нужные по структуре ГЧС. Однако ограниченное применение этот метод находит.

Как показали результаты исследований, наиболее подходящим методом генерации изоморфных ГЧС является основанный на процедуре удвоения Грассмана—Клиффорда метод умножения размерности [5]. Эта процедура фактически означает, что компоненты гиперкомплексного числа для данной ГЧС уже являются не вещественными числами, а числами, принадлежащими к какой-либо ГЧС размерности два или более. В общем случае, если размерность системы равна не только двум, то размерность полученной ГЧС будет не удваиваться по отношению к исходной, а умножаться на размерность той ГЧС, элементами которой будут компоненты исходной ГЧС. Такие процедуры назовем, в отличие от процедур удвоения, процедурами умножения размерности.

Будем обозначать результат применения процедуры умножения размерности системы $\Gamma_1(e,n)$ системой $\Gamma_2(f,m)$ так: $Д(\Gamma_1(e,n), \Gamma_2(f,m))$. При использовании процедуры умножения размерности базис получаемых ГЧС состоит из парных произведений базисных элементов исходных ГЧС. Если первоначальные ГЧС — коммутативны, то и базисные элементы результирующей ГЧС будут коммутативны. Следует заметить, что независимо от порядка расположения ГЧС в операторе умножения размерности полученные базисы являются одинаковыми. Следовательно, будут идентичными и таблицы умножения ГЧС, полученных при перестановке их в операторе умножения размерности. Поэтому [5] можно сформулировать следующие принципы:

1. При использовании процедуры умножения размерности операнды-ГЧС можно коммутировать.

2. Умножение размерности одной и той же ГЧС изоморфными ГЧС приводит к изоморфным ГЧС.

3. При умножении размерности пары изоморфных ГЧС другой парой изоморфных ГЧС получается пара изоморфных ГЧС и существует невырожденное линейное преобразование базисов полученной пары, которое представляет собой произведение линейных преобразований первой пары ГЧС.

Если к одной и той же ГЧС применяются процедуры умножения размерности различными ГЧС, но размерности их одинаковы, то в результате получаются различные ГЧС одинаковой размерности, но, в общем случае, неизоморфные между собой. Если для умножения размерности применяются изоморфные ГЧС, то и результаты после применения процедуры умножения также будут изоморфными между собой.

На основании принципов 1—3 можно построить целый ряд пар изоморфных ГЧС достаточно больших размерностей, а также операторы их изоморфизма.

Построение изоморфных пар ГЧС на основе систем двойных и ортодвойных чисел. Применяя сформулированные выше принципы, на основе ГЧС $W(e,2)$ и $W_1(f,2)$ можно построить изоморфные пары ГЧС размерностей четыре. Пусть

$$\Gamma_1(e,2) = W(e,2) \simeq W_1(f,2) = \Gamma_3(f,2),$$

$$\Gamma_2(g,2) = W(g,2) \simeq W_1(h,2) = \Gamma_4(h,2).$$

Между ГЧС $\Gamma_1(e,2)$ и $\Gamma_3(f,2)$ существуют изоморфные преобразования вида (3) и (4). Тогда между ГЧС $\Gamma_3(g,2)$ и $\Gamma_4(h,2)$ существуют преобразования

$$L_2:\begin{cases} g_1 = h_1 + h_2 \\ g_2 = h_1 - h_2 \end{cases}, \quad L_2^{-1}:\begin{cases} h_1 = (g_1 + g_2)/2, \\ h_2 = (g_1 - g_3)/2. \end{cases} \tag{10}$$

Применим процедуру умножения размерности к системам Γ_1 и Γ_2 (соответственно Γ_3 и Γ_4): $\Gamma_5(eg,4) = Д\,(\Gamma_1(e,2),\ \Gamma_2(g,2)),\ \Gamma_6(fh,4) = Д(\Gamma_3(f,2), \Gamma_4(h,2))$, т.е. ГЧС Γ_5 и Γ_6 уже имеют размерность четыре. Построим таблицы умножения ГЧС Γ_5 и Γ_6. Ввиду коммутативности элементов базиса: $e_i g_j \cdot e_r g_s = e_i e_r \cdot g_j g_s = e_m g_n$, $f_i h_j \cdot f_r h_s = f_i f_r \cdot h_j h_s = f_m h_n$, $i, j, r, s = 1,2$. Если составные элементы базисов переименовать по правилу $e_m g_n = e_{2(m-1)+n}$ и назвать полученные ГЧС Γ_5 и Γ_6 соответственно $W^{(2)}$ и $W_1^{(2)}$, то получим следующие таблицы умножения:

$$\begin{gathered} W^{(2)}: e_1 e_i = e_i,\, e_i e_i = e_1,\, e_i e_{5-i} = e_4,\, i = 1, \ldots, 4,\ e_2 e_4 = e_3,\, e_3 e_4 = e_2, \\ W_1^{(2)}: e_i e_i = e_i,\, i = 1, \ldots, 4,\ e_i e_j = 0, i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, 4. \end{gathered} \tag{11}$$

При этом система $W^{(2)}$ — сильнозаполненная, а система $W_1^{(2)}$ — слабозаполненная. В соответствии с принципом 3 линейное преобразование L_{56}, связывающее базисы $\{eg\}$ и $\{fh\}$ (оператор изоморфизма), имеет вид $L_{56} = L \cdot L_2$, а обратное преобразование— следующий вид: $L_{56}^{-1} = L_{65} = L^{-1} L_2^{-1}$.

Выполнив умножение линейных операторов и применив перенумерацию элементов базисов по правилу (10), получим следующий явный вид оператора изоморфизма систем $W^{(2)}$ и $W_1^{(2)}$ и обратного ему:

$$\begin{aligned} e_1 &= f_1 + f_2 + f_3 + f_4, & f_1 &= (e_1 + e_2 + e_3 + e_4)/4, \\ e_2 &= f_1 - f_2 + f_3 - f_4, & f_2 &= (e_1 - e_2 + e_3 - e_4)/4, \\ e_3 &= f_1 + f_2 - f_3 - f_4, & f_3 &= (e_1 + e_2 - e_3 - e_4)/4, \\ e_4 &= f_1 - f_2 - f_3 + f_4, & f_4 &= (e_1 - e_2 - e_3 + e_4)/4. \end{aligned} \tag{12}$$

В выражениях (11) для упрощения идентификаторам базисных элементов систем $W^{(2)}$ и $W_1^{(2)}$ присвоены значения соответственно e и f.

Таким образом, умножение гиперкомплексных чисел размерности четыре в системе $W_1^{(2)}$ можно упростить, перейдя с помощью (12) из системы $W^{(2)}$ в систему $W_1^{(2)}$, выполнить там умножение согласно (11) и совершить обратный переход по правому столбцу (12) в ГЧС $W_1^{(2)}$. При этом вместо 16 вещественных умножений и 12 сложений потребуется выполнить четыре умножения, 24 сложения и четыре коротких операции сдвига регистров.

Построение изоморфных пар ГЧС на основе систем квадриплексных и ортодвойных чисел. При синтезе структур реверсивных цифровых фильтров с использованием ГЧС [7—10] необходимо применять ГЧС, построенные на основе системы комплексных чисел C. Одной из таких систем является система квадриплексных чисел K, получаемая коммутативным автоудвоением системы комплексных чисел. ГЧС K изоморфна системе бикомплексных чисел $C \oplus C$, являющейся прямой суммой двух систем комплексных чисел C. Таблицы умножения этих ГЧС четвертой размерности [4—6] имеют вид

$$K\colon e_1 e_i = e_i\,, e_i e_{5-i} = e_4\,, i = 1,\ldots,4, e_2 e_2 = e_3 e_3 =$$

$$= -e_1\,, e_4 e_4 = e_1\,, e_2 e_4 = -e_3\,, e_3 e_4 = -e_2,$$

$$C \oplus C: f_1 f_1 = f_1\,, f_2 f_2 = -f_1\,, f_1 f_2 = f_2\,, f_3 f_3 =$$

$$= f_3\,, f_4 f_4 = -f_3\,, f_3 f_4 = f_4,$$

остальные—нули. Изоморфизм этих ГЧС устанавливается фактом наличия нетривиальных решений системы уравнений изоморфизма (5). Прямой и обратный операторы изоморфизма между этими ГЧС представляют собой одно из нетривиальных решений системы (5):

$$L\colon\begin{cases} e_1 = f_1 + f_3\,, \\ e_2 = -f_2 + f_4\,, \\ e_3 = -f_2 - f_4\,, \\ e_4 = -f_1 + f_3\,, \end{cases} \quad L^{-1}\colon\begin{cases} f_1 = (e_1 - e_4)/2, \\ f_2 = (-e_2 - e_3)/2, \\ f_3 = (e_1 + e_4)/2, \\ f_4 = (e_2 - e_3)/2. \end{cases}$$

Таким образом, если при умножении гиперкомплексных чисел в системе K необходимо выполнить 16 вещественных умножений и 12 сложений, то при переходе в ГЧС $C \oplus C$ и использовании алгоритма умножения комплексных чисел (9) необходимо выполнить шесть вещественных умножений, 18 сложений и четыре коротких операции деления на два.

На основе изоморфизмов $K(e,4) \simeq C \oplus C(f,\, 4)$ и $W(g,2) \simeq W_1(h,2)$ можно построить пару изоморфных ГЧС восьмой размерности. Применим процедуру умножения размерности к системам $K(e,4)$, $W(g,2)$ и к системам $C \oplus C(f\,,\, 4)$, $W_1(h,\, 2)$:

$$Д\,(K\,(e,4), W\,(g,2)) = KW\,(eg,8),$$

$$Д(C \oplus C\,(f,\, 4), W_1(h,\, 2)) = CCW(fh,\, 8).$$

Выполнив преобразования, аналогичные описанным выше, получим таблицы умножения для систем KW и CCW:

$$KW: e_1 e_i = e_i, e_i e_{8-i} = e_8, i=1,...,8, e_i e_i = e_1,\ i=1,2,7,8, e_i e_i = -e_1,\ i=3,...,6,$$

$$e_2e_3 = e_4, e_2e_4 = e_3, e_2e_5 = e_6, e_2e_6 = e_5, e_2e_8 = e_7, e_3e_4 = -e_2, e_3e_5 = e_7,$$

$$e_3e_7 = -e_5, e_3e_8 = -e_6, e_4e_6 = e_7, e_4e_7 = -e_6, e_4e_8 = -e_5, e_5e_6 = -e_2,$$

$$e_5e_7 = -e_3, e_5e_8 = -e_4, e_6e_7 = -e_4, e_6e_8 = -e_5, e_7e_8 = e_2;$$

$$CCW: f_1f_1 = f_1, f_1f_3 = f_3, f_2f_2 = f_2, f_2f_4 = f_4, f_3f_1 = f_3, f_3f_3 = -f_1,$$

$$f_4f_2 = f_4, f_4f_4 = -f_2, f_5f_5 = f_5, f_5f_7 = f_7, f_6f_6 = f_6, f_6f_8 = f_8,$$

$$f_7f_5 = f_7, f_7f_7 = -f_5, f_8f_6 = f_8, f_8f_8 = -f_6,$$

остальные—нули. Прямой и обратный операторы изоморфизма между этими ГЧС представляют собой одно из нетривиальных решений системы (5):

$$L: \begin{cases} e_1 = f_1 + f_2 + f_5 + f_6, \\ e_2 = f_1 - f_2 + f_5 - f_6, \\ e_3 = -f_3 - f_4 + f_7 + f_8, \\ e_4 = -f_3 + f_4 + f_7 - f_8, \\ e_5 = -f_3 - f_4 - f_7 - f_8, \\ e_6 = -f_3 + f_4 - f_7 + f_8, \\ e_7 = -f_1 - f_2 + f_5 + f_6, \\ e_8 = -f_1 + f_2 + f_5 - f_6, \end{cases} \quad L^{-1}: \begin{cases} f_1 = (f_1 + f_2 - f_7 - f_8)/4, \\ f_2 = (f_1 - f_2 - f_7 + f_8)/4, \\ f_3 = (-f_3 - f_4 - f_5 - f_6)/4, \\ f_4 = (-f_3 + f_4 - f_5 + f_6)/4, \\ f_5 = (f_1 + f_2 + f_7 + f_8)/4, \\ f_6 = (f_1 - f_2 + f_7 - f_8)/4, \\ f_7 = (f_3 + f_4 - f_5 - f_6)/4, \\ f_8 = (f_3 - f_4 - f_5 + f_6)/4. \end{cases}$$

Таким образом, если при умножении гиперкомплексных чисел в системе KW необходимо выполнить 64 вещественных умножений и 56 сложений, то при переходе в ГЧС CCW необходимо выполнить 16 вещественных умножений, 72 сложения и восемь коротких операции деления на четыре.

Построение изоморфных пар ГЧС отличной от 2^n размерности. Комбинируя при умножении размерности ГЧС различных размерностей, можно получить изоморфные пары ГЧС размерностей, отличных от степени два. Рассмотрим такие пары изоморфных ГЧС: системы триплексных T и вещественно-комплексных $R \oplus C$ чисел и системы двойных W и ортодвойных W_1 чисел: $T \simeq R \oplus C$, $W \simeq W_1$. Выполняем такие процедуры умножения размерности: $Д\,(T\,(e,3),\ W(g,2)) = TW(eg,6)$, $Д\,(R \oplus C\,(f,3), W_1(h,2)) = RCW(fh,6)$.

Получили две изоморфных ГЧС шестой размерности: $TW \simeq RCC$. Выполняя преобразования, аналогичные описанным выше, получаем таблицы умножения для систем TW и RCC:

$$TW: e_1 e_i = e_i, i = 1,\ldots,6, e_i e_i = e_1,\ i = 1,2,5,6, e_i e_i = (e_5 - e_1)/2,\ i = 3,4,$$

$$e_2 e_3 = e_4, e_2 e_4 = e_3, e_2 e_5 = e_6, e_2 e_6 = e_5, e_3 e_4 = (e_6 - e_2)/2,$$

$$e_3 e_5 = -e_3, e_3 e_6 = -e_4, e_4 e_5 = -e_4, e_4 e_6 = -e_3, e_5 e_6 = e_2,$$

$$RCC: f_1 f_1 = f_1, f_2 f_2 = f_2, f_3 f_3 = f_3, f_3 f_5 = f_5, f_4 f_4 = f_4,$$

$$f_4 f_6 = f_6, f_5 f_5 = -f_3, f_6 f_6 = -f_4,$$

остальные—нули. Прямой и обратный операторы изоморфизма между этими ГЧС представляют собой одно из нетривиальных решений системы (5):

$$L: \begin{cases} e_1 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4, \\ e_2 = f_1 - f_2 + f_3 - f_4, \\ e_3 = \pm(f_5 + f_6)/2, \\ e_4 = \pm(f_5 - f_6)/2, \\ e_5 = f_1 + f_2 - f_3 - f_4, \\ e_6 = f_1 - f_2 - f_3 + f_4, \end{cases} \qquad L^{-1}: \begin{cases} f_1 = (e_1 + e_2 + e_3 + e_4)/4, \\ f_2 = (e_1 - e_2 + e_3 - e_4)/4, \\ f_3 = (e_1 + e_2 - e_3 - e_4)/4, \\ f_4 = (e_1 - e_2 - e_3 + e_4)/4, \\ f_5 = \pm(e_3 + e_4)/2, \\ f_6 = \pm(e_3 - e_4)/2. \end{cases}$$

Значит, если при умножении гиперкомплексных чисел в шестимерной ГЧС TW необходимо выполнить 40 вещественных умножений и 30 сложений, то при переходе в ГЧС CCW необходимо выполнить 10 вещественных умножений, 42 сложения и 10 коротких операции деления на четыре.

Выводы

Проведенные исследования показали, что при выполнении нелинейных операций над гиперкомплексными числами с помощью перехода от сильнозаполненной ГЧС к изоморфной слабозаполненной ГЧС, выполнении операций в ней, и обратном переходе значительно сокращается число необходимых вещественных операций и особенно умножений. При использовании гиперкомплексных чисел размерности 2^n количество умножений уменьшается в n раз, а в других случаях— более, чем в $n/2$ раз. Это свидетельствует о целесообразности применения данных алгоритмов при решении задач обработки цифровых сигналов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Блейхут Р.* Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1989, 449 с.
2. *Нуссбаумер Г.* Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. М.: Радио и связь, 1985, 248 с.
3. Дрозд Ю.А., Кириченко В.В. Конечномерные алгебры. Київ: Вища школа, 1980, 192 с.
4. *Синьков М.В., Бояринова Ю.Е., Калиновский Я.А.* Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения. Киев: Инфодрук, 2010, 388 с.
5. *Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е.* Высокоразмерные изоморфные гиперкомплексные числовые системы и их использование для повышения эффективности вычислений. Киев: Инфодрук, 2012, 183 с.
6. *Калиновский Я.А.* Эффективные алгоритмы решения уравнений изоморфизма гиперкомплексных числовых систем с помощью представлений экспонент // Электрон. моделирование, 2017, **39**, №1, с. 75—90.
7. *Toyoshima H.* Computationally Efficient Implementation of Hypercomplex Digital Filters // IEICE Trans. Fundamentals, 2002, E85-A, 8, p. 1870—1876.
8. *Schutte H.D.* Digitalfilter zur Verarbeitung komplexer und hypercomplexer Signale // Dissertation. Paderborn, 1991, 100 s.
9. *Schulz D., Seitz J., LustosadaCosta J.P.* Widely Linear SIMO Filtering for Hypercomplex Numbers / IEEE Information Theory Workshop, 2011, p. 390—394.
10. *Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е., Хицко Я.В.* Оптимизация суммарной параметрической чувствительности реверсивных цифровых фильтров с коэффициентами в неканонических гиперкомплексных числовых системах // Электрон. моделирование, 2015, **37**, № 5, с. 117—126.
11. *Каліновський Я.О.* Розвиток методів теорії гіперкомплексних числових систем для математичного моделювання і комп'ютерних обчислень: Дис. док-ра техн. наук. Київ, 2007, 308 с.
12. *Калиновский Я.А.* Структура гиперкомплексного метода быстрого вычисления линейной свертки дискретных сигналов// Реєстрація, зберігання і обробка даних, 2013, **15**, № 1, с. 31—44.

Получена 12.09.18

REFERENCES

1. Bleichut, R. (1984), *Bystrye algoritmy tsyfrovoy obrabotki signalov* [Rapid algorithms of digital signal processing], Mir, Moscow. USSR.
2. Nussbaumer, G. (1985), *Bystroe preobrazovanie Furie i algoritmy vychisleniya svyortok* [Fast Fourier transform and computation of convolution algorithms], Radio and svyaz, Moscow, USSR.
3. Drozd, Yu.A. and Kirichenko, V.V. (1980), *Konechno-mernye algebry* [Finite-dimensional algebras], Vyshcha shkola, Kiev, USSR.
4. Sinkov, M.V. Boyarinova, Yu.E. and Kalinovsky, Ya.A. (2010), *Konechno-mernye giperkompleksnye chislovye sistemy. Osnovy teorii. Primeneniya.* [Finite-dimensional hypercomplex numerical systems. Fundamentals of the theory. Applications], Infodruk, Kiev, Ukraine.
5. Kalinovsky, Ya.A. and Boyarinova, Yu.E. (2012), *Vysoko-razmernye izomorfmye giperkompleksnye chislovye sistemy i ikh ispolzovanie dlya povysheniya effektivnosti vychislenii* [High-dimensional isomorphic hypercomplex number systems and their use for increasing the efficiency of computations], Infodruk, Kiev, Ukraine.

6. Kalinovsky, Ya.A. (2017), "Effective algorithms for solving the isomorphism equations for hypercomplex number systems using exponential representations", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 39, no. 1, pp. 75-90.
7. Toyoshima, H. (2002), Computationally efficient implementation of hypercomplex digital filters, *IEICE Trans. Fundamentals*, E85-A, 8, pp. 1870-1876.
8. Schutte, H.D. (1991), Digitalfilter zur Verarbeitung komplexer und hypercomplexer Signale, Dissertation. Paderborn, 1991.
9. Schulz, D., Seitz, J. and LustosadaCosta, J.P. (2011), Widely linear SIMO filtering for hypercomplex numbers, *IEEE Information Theory Workshop,* pp. 390-394.
10. Kalinovsky, Ya.A., Boyarinova, Yu.E. and Khitsko, Ya.V. (2015), "Optimization of the total parametric sensitivity of reversible digital filters with coefficients in non-canonical hypercomplex number systems", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 37, no. 5, pp. 117-126.
11. Kalinovsky, Ya.O. (2007), "The development of method in the theory of hypercomplex number systems for mathematical modeling and computing is calculated", Dissertations of Dr Sc. (Tech.), 01.05.02, Kyiv, Ukraine.
12. Kalinovsky, Ya.A. (2013), "Structure of the hypercomplex method for fast calculation of linear convolution of discrete sign", *Reestratsiya, zberigannya i obrobka dannykh,* Vol. 15, no. 1, pp. 31-44.

Received 12.09.18

Я.О. Калиновський, Ю.Є. Бояринова, Я.В. Хицко, А.С. Сукало

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДІВ ГЕНЕРАЦІЇ ІЗОМОРФНИХ ГІПЕРКОМПЛЕКСНИХ ЧИСЛОВИХ СИСТЕМ ДЛЯ ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ МНОЖЕННЯ ГІПЕРКОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

Запропоновано метод множення гіперкомплексних чисел, який забезпечує значне зменшення об'єму речовинних операцій. Метод полягає у переході до слабозаповнених ізоморфних гіперкомплексних числових систем (ГЧС), у яких гіперкомплексне множення потребує меншого числа речовинних множень. Синтезовано такі пари ізоморфних ГЧС, а також вирази для операторів ізоморфізму. Розроблений метод доцільно використовувати для побудови швидких алгоритмів лінійної згортки.

К л ю ч о в і с л о в а: гіперкомплексна числова система, лінійна згортка, ізоморфізм, множення, комплексні числа, подвійні числа.

Ya.A. Kalinovsky, Yu.E. Boyarinova, Ya.V. Khitsko, A.S. Sukalo

USE OF METHODS FOR GENERATING ISOMORPHIC HYPERCOMPLEX NUMBER SYSTEMS TO INCREASE THE EFFICIENCY OF MULTIPLYING HYPERCOMPLEX NUMBERS

The method of multiplication of hypercomplex numbers is proposed, which provides a significant reduction in the volume of real operations. The method consists in the transition to weakly filled isomorphic hypercomplex number systems (HNS) in which a smaller number of real multiplications is required for hypercomplex multiplication. Such pairs of isomorphic HNS, as well as expressions for isomorphism operators, have been synthesized. The developed method should be used to construct fast linear convolutional algorithms.

K e y w o r d s: hypercomplex numerical system, linear convolution, isomorphism, multiplication, complex numbers, double numbers.

КАЛИНОВСКИЙ Яков Александрович, д-р техн. наук, ст. науч. сотр. Ин-та проблем регистрации информации НАН Украины. В 1965 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — теория гиперкомплексных числовых систем и их применение в математическом моделировании.

БОЯРИНОВА Юлия Евгеньевна, канд. техн. наук, ст. науч. сотр. Ин-та проблем регистрации информации НАН Украины, доцент Национального технического университета Украины «Киевский политехнический ин-т», который окончила в 1997 г. Область научных исследований — теория гиперкомплексных числовых систем и их применение в математическом моделировании.

ХИЦКО Яна Владимировна, канд. техн. наук, доцент Национального технического университета Украины «Киевский политехнический ин-т имени Игоря Сикорского», который окончила в 2005 г. Область научных исследований — теория гиперкомплексных числовых систем и их применение в математическом моделировании.

СУКАЛО Алина Сергеевна, ассистент Национального университета водного хозяйства (г. Ровно). В 2013 г. окончила Житомирский госуниверситет. Область научных исследований — математическое моделирование и вычислительные процессы.