doi:https://doi.org/10.15407/emodel.40.06.005

УДК 004.942

Я.А. Калиновский[1], д-р техн. наук, **Ю.Е. Бояринова**[1,2], канд. техн. наук, **Я.В. Хицко**[2], канд. техн. наук, **А.С. Сукало**[3]

[1] Ин-т проблем регистрации информации НАН Украины (Украина, 03113, Киев, ул. Н. Шпака, 2, тел. (044) 4542138; e-mail: kalinovsky@i.ua),

[2] Национальный технический университет Украины «КПИ им. Игоря Сикорского» (Украина, 03113, Киев, пр-т Победы, 37)

[3] Национальный университет водного хозяйства и природопользования (Украина, 33028, Ровно, ул. Соборная, 11)

Последовательное построение алгоритмов линейной свертки с помощью гиперкомплексных числовых систем

Рассмотрен синтез алгоритмов линейной свертки массивов, длина которых не равна 2^n, с помощью методов гиперкомплексных числовых систем (ГЧС). Синтез основан на рекуррентном обрамлении сумм парных произведений отсчетов свертки с последующим применением изоморфных ГЧС. Полученные алгоритмы по числу умножений близки к алгоритмам Винограда.

Ключевые слова: гиперкомплексная числовая система, линейная свертка, изоморфизм, умножение, бикомплексные числа, квадриплексные числа.

Линейная свертка дискретных сигналов с некоторым ядром является наиболее общей и важной вычислительной задачей в области цифровой обработки сигналов. Поскольку эта операция, как правило, выполняется много раз, весьма актуальной является задача синтеза быстрых алгоритмов выполнения линейной свертки.

Пусть дискретный сигнал имеет вид $X=\{x_1,\ x_2,\ ...,\ x_N\}$, а ядро свертки — $Y=\{y_1, y_2, ..., y_N\}$. Тогда их линейная свертка имеет следующий вид [1—3]:

$$C(k)=\sum_{i=1}^{N} x_{k+i}y_i,\ \ k=-(N-1), ..., 0, ..., (N-1), \tag{1}$$

т.е. всего $2(N-1)$ отсчетов. Как видно из (1), при таком формулировании потребуются значения сигнала с индексами, выходящими за границы интервала $[1, N]$. Поэтому сигнал необходимо доопределить:

$$X = \{x_{-(N-2)}, ..., x_0, x_1, x_2, ..., x_N, x_{N+1}, ..., x_{2N-1}\},$$

всего $3N-2$ значений. При этом новые значения следует положить равными нулю: $x_i = 0$ при $i \notin [1, ..., N]$.

Для упрощения дальнейших формул последовательность значений ядра целесообразно представлять в инверсном виде: $Y^* = \{y_N, y_{N-1}, ..., y_1\}$. Связь между инверсными y_i^* и прямыми y_i значениями задается соответствием

$$y_i^* = y_{N-i+1}. \tag{2}$$

При использовании ядра в инверсной форме формула для вычисления компонентов свертки (1) преобразуется к виду

$$C(k) = \sum_{i=1}^{N} x_{N+k-i+1} y_i, \; k = -(N-1), ..., 0, ..., (N-1). \tag{3}$$

Формулы (1) и (3) полностью эквивалентны, связь между ними определяется формулой (2). Поскольку сложность вычисления линейной свертки последовательностей длиной N есть $O(N^2)$, и она быстро увеличивается с возрастанием значения N, используются методы «быстрых» вичислений такие, как алгоритмы Кука—Тоома, Винограда, Кули—Тьюки, Гуда—Томаса, преобразование Фурье и многие другие, подробное описание которых можно найти в работах [1—4]. Каждый из названных методов обладает определенными преимуществами и недостатками. Поэтому целесообразен поиск новых методов.

Рассмотрим алгоритмы выполнения свертки, основанные на переходе к гиперкомплексным пространствам. Основы такого подхода изложены в работе [5].

Принципы приложения методов ГЧС к вычислению свертки. Будем рассматривать члены свертываемых числовых последовательностей длиной $N = 2^n$ как компоненты гиперкомплексных чисел, принадлежащих некоторой ГЧС Γ_1 размерностью $\dim\Gamma_1 = 2^n$. Произведение этих гиперкомплексных чисел содержит парные произведения компонентов свертываемых числовых последовательностей. Однако они будут комбинироваться в суммы не в таком составе, как это нужно для организации компонентов свертки. Кроме того, число вещественных умножений при умножении гиперкомплексных чисел в общем случае равно 2^{2n}, т.е. столько же, сколько и при непосредственном вычислении свертки.

Таким образом, возникают две проблемы: первая — уменьшение количества вещественных операций при умножении гиперкомплексных чисел, вторая — организация выбора парных произведений компонентов свертки.

Решение этих двух проблем позволяет синтезировать такие алгоритмы свертки, которые по количеству операций эффективнее других алгоритмов.

Для решения первой проблемы можно перейти в ГЧС, изоморфную исходной, таблица умножения которой заполнена слабо. Такие пары ГЧС описаны в [6—9]. Переход между ними требует выполнения только операций сложения вещественных чисел.

Решение второй проблемы зависит от конкретного вида используемых ГЧС. Если дискретный сигнал и ядро имеют длину N и представлены N-мерными гиперкомплексными числами в некоторой ГЧС, то:

1) свертка имеет $2N-1$ компонентов, а произведение двух гиперкомплексных чисел — N компонентов;

2) в каждом компоненте произведения двух гиперкомплексных чисел содержится по N слагаемых, а в компонентах свертки число слагаемых переменное: от 1 до N.

Следует учесть, что при умножении двух гиперкомплексных чисел количество вещественных умножений M в зависимости от типа применяемой ГЧС может изменяться в пределах $N \le M \le N^3$, тогда как в свертке N^2 парных произведений.

Для уменьшения количества вещественных умножений можно воспользоваться изоморфными ГЧС. В соответствии с теоремой Вейерштрасса—Дедекинда [3], коммутативная полупростая алгебра изоморфна прямому произведению полей. Это означает, что для всякой канонической ГЧС [5] существует изоморфная ей ГЧС, на диагонали таблицы умножения которой находятся либо клетки таблиц умножения поля комплексных чисел, либо какой-нибудь базисный элемент, а остальные ячейки таблицы умножения — нули.

Гиперкомплексные алгоритмы вычисления свертки последовательностей длиной $N=2^n$. Рассмотрим случай $n=1$, т.е. линейную свертку двух числовых последовательностей, $\{x_1, x_2\}$ и $\{y_2, y_1\}$, длина которых равна двум. В соответствии с (3) линейная свертка имеет три отсчета:

$$\begin{aligned} C(-1) &= x_1 y_1, \\ C(0) &= x_1 y_2 + x_2 y_1, \\ C(1) &= x_2 y_2. \end{aligned} \tag{4}$$

Для построения алгоритма вычисления отсчетов свертки используются изоморфные ГЧС двойных $W(e, 2)$ и ортодвойных $W_1(f, 2)$ чисел, таблицы умножения которых имеют вид [7, 8]

W	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2
e_2	e_2	e_1

,

W_1	f_1	f_2
f_1	f_1	0
f_2	0	f_2

,

а прямой и обратный операторы изоморфизма — следующий вид:

$$L:\begin{cases} e_1 = f_1 + f, \\ e_2 = f_1 - f_2, \end{cases} \quad L^{-1}:\begin{cases} f_1 = (e_1 + e_2)/2, \\ f_2 = (e_1 - e_2)/2. \end{cases} \tag{5}$$

Будем рассматривать элементы последовательностей $\{x_1, x_2\}$ и $\{y_2, y_1\}$ как компоненты гиперкомплексных чисел ГЧС W:

$$X = x_0 e_0 + x_1 e_1, \tag{6}$$

$$Y = y_2 e_1 + y_1 e_2. \tag{7}$$

В соответствии с таблицей умножения ГЧС W:

$$XY = (x_1 y_2 + x_2 y_1)\, e_1 + (x_1 y_1 + x_2 y_2)\, e_2. \tag{8}$$

Правая часть выражения (8) содержит все парные произведения, необходимые для формирования свертки (4). Более того, компонента при e_1 полностью совпадает с отсчетом $z(0)$, а компонента при e_2 равна сумме остальных отсчетов, но количество вещественных умножений равно четырем также, как и в (4). Таким образом, возникают проблемы: во-первых, уменьшить число умножений в (8) и, во-вторых, разделить отсчеты $z(-1)$ и $z(1)$.

Для уменьшения количества умножений целесообразно перейти из системы W в систему W_1. При этом для перевода чисел $X, Y \in W$ в числа $X_1, Y_1 \in W_1$ необходимо в (6) и (7) подставить преобразования L из (5). Тогда

$$X_1 = (x_1 + x_2)\, f_1 + (x_1 - x_2)\, f_2, \tag{9}$$

$$Y_1 = (y_1 + y_2)\, f_0 + (y_2 - y_1)\, f_1. \tag{10}$$

Такой переход требует дополнительно четыре сложения. Однако, учитывая, что обычно числовой массив сворачивается с постоянным ядром, переход которого в W_1 сделан заранее, можно считать, что переход из системы W в систему W_1 требует только два сложения.

Умножение чисел (9) и (10) в соответствие с таблицей умножения W_1,

$$X_1 Y_1 = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = (x_1 + x_2)(y_2 + y_1) f_1 + (x_1 - x_2)(y_2 - y_1) f_2,$$

требует два умножения. Обратный переход из системы W_1 в систему W в соответствии с преобразованием L^{-1} из (10) будет иметь вид

$$XY = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} e_1 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} e_2, \tag{11}$$

что также требует два сложения. Деление на два — это короткая операция, требующая только сдвига регистра. Поэтому ее можно не учитывать. Приравнивая правые части (8) и (11), получаем

$$x_1 y_2 + x_2 y_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \tag{12}$$

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}. \tag{13}$$

Если вычислить заранее одно из слагаемых в левой части (13), например $x_1 y_1$, то компоненты свертки (3) будут вычисляться по формулам

$$C(-1) = x_1 y_1,$$

$$C(0) = (\alpha_1 + \alpha_2)/2,$$

$$C(1) = (\alpha_1 - \alpha_2)/2 - x_1 y_1,$$

что требует три умножения и пять сложений. Необходимо заметить следующее: при увеличении размерности $N = 2^n$, как будет показано далее, этот алгоритм можно применять $n-1$ раз. При этом во всех случаях значение $x_1 y_1$ будет общее, а число умножений во всех алгоритмах, кроме одного, сократится в два раза. Следовательно, на вычисление одного парного произведения потребуется 0,75 операций вещественных умножений.

Рассмотрим линейную свертку двух числовых последовательностей,

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4), \quad Y = (y_4, y_3, y_2, y_1),$$

длина которых равна четырем. В соответствии с (3) линейная свертка будет иметь семь отсчетов:

$$C(-3) = x_1 y_1,$$

$$C(-2) = x_1 y_2 + x_2 y_1,$$

$$C(-1) = x_1 y_3 + x_2 y_2 + x_3 y_1,$$

$$C(0) = x_1 y_4 + x_2 y_3 + x_3 y_2 + x_4 y_1,$$

$$C(1) = x_2 y_3 + x_3 y_3 + x_4 y_2,$$

$$C(2) = x_3 y_4 + x_4 y_3,$$

$$C(3) = x_4 y_4.$$

Для выполнения данной свертки необходимо выполнить 16 вещественных умножений и девять сложений. Как показано в работах [10, 11], в этом случае эффективен алгоритм, в котором используются изоморфизм $W \simeq W_1$ и изоморфизм автоудвоений этих систем $W^{(2)} \simeq W_1^{(2)}$. Их таблицы умножения имеют вид

$W^{(2)}$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	e_1	e_4	e_3
e_3	e_3	e_4	e_1	e_2
e_4	e_4	e_3	e_2	e_1

,

$W_1^{(2)}$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	0	0	0
f_2	0	f_2	0	0
f_3	0	0	f_3	0
f_4	0	0	0	f_4

.

Поскольку $W^{(2)} \simeq W_1^{(2)}$, между базисными элементами этих ГЧС существуют следующие соотношения [10, 11]:

$$\begin{aligned} e_1 &= f_1 + f_2 + f_3 + f_4, \quad f_1 = (e_1 + e_2 + e_3 + e_4)/4, \\ e_2 &= f_1 - f_2 + f_3 - f_4, \quad f_2 = (e_1 - e_2 + e_3 - e_4)/4, \\ e_3 &= f_1 + f_2 - f_3 - f_4, \quad f_3 = (e_1 + e_2 - e_3 - e_4)/4, \\ e_4 &= f_1 - f_2 - f_3 + f_4, \quad f_4 = (e_1 - e_2 - e_3 + e_4)/4. \end{aligned} \tag{14}$$

Будем рассматривать элементы последовательностей X и Y как компоненты гиперкомплексных чисел ГЧС $W^{(2)}(e,4)$ с такими же идентификаторами:

$$X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4, \tag{15}$$

$$Y = y_4 e_1 + y_3 e_2 + y_2 e_3 + y_1 e_4. \tag{16}$$

Тогда в соответствии с таблицей умножения ГЧС $W^{(2)}(e,4)$ произведение гиперкомплексных чисел (15) и (16) имеет вид

$$XY = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i,$$

где

$$\alpha_1 = x_1 y_4 + x_2 y_3 + x_3 y_2 + x_4 y_1, \alpha_2 = x_1 y_3 + x_2 y_4 + x_3 y_1 + x_4 y_2,$$
$$\alpha_3 = x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_4 + x_4 y_3, \; \alpha_4 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4.$$

Для уменьшения количества умножений целесообразно перейти из системы $W^{(2)}(e,4)$ в систему $W_1^{(2)}(f,4)$ [10, 11]. Тогда для перевода гиперкомплексных чисел, принадлежащих $W^{(2)}(e,4)$, в гиперкомплексные числа, принадлежащие $W_1^{(2)}(f,4)$, необходимо в (15) и (16) подставить преобразования (14):

$$\begin{aligned} X_1 = \sum_{i=1}^{4} \beta_i f_i &= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) f_1 + (x_1 - x_2 + x_3 - x_4) f_2 + \\ &+ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) f_3 + (x_1 - x_2 - x_3 + x_4) f_4. \end{aligned} \tag{17}$$

Аналогично преобразуется и гиперкомплексное число Y:

$$Y_1 = \sum_{i=1}^{4} \gamma_i f_i . \tag{18}$$

Такой переход требует дополнительно 16 сложений. Однако, поскольку обычно числовая последовательность сворачивается с постоянным ядром, переход элементов которого в $W_1^{(2)}(f,4)$ сделан заранее, можно считать, что переход из системы $W^{(2)}(e,4)$ в систему $W_1^{(2)}(f,4)$ требует только восемь сложений.

Произведение чисел (17) и (18) в соответствии с таблицей умножения $W_1^{(2)}(f,4)$ имеет вид

$$X_1 Y_1 = \sum_{i=1}^{4} \beta_i \gamma_i f_i$$

и требует всего лишь четыре умножения. Обратный переход из $W_1^{(2)}(f,4)$ в систему $W^{(2)}(e,4)$ в соответствии с (14) будет иметь вид

$$XY = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i = \frac{1}{4}(\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 + \beta_4\gamma_4)\, e_1 +$$

$$+\frac{1}{4}(\beta_1\gamma_1 - \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 - \beta_4\gamma_4)\, e_2 + \frac{1}{4}(\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 - \beta_3\gamma_3 - \beta_4\gamma_4)\, e_3 +$$

$$+\frac{1}{4}(\beta_1\gamma_1 - \beta_2\gamma_2 - \beta_3\gamma_3 + \beta_4\gamma_4)\, e_4.$$

После этого выполняется свертка последовательностей $\{x_1, x_2\}$ и $\{y_1, y_2\}$. Для этого потребуется три умножения и будут получены значения $x_2 y_2$ и $x_1 y_2 + x_2 y_1$. Полученное значение $x_2 + x_1$ может быть использовано в дальнейшем при сокращении количества сложений. Далее выполняется свертка последовательностей $\{x_1, x_3\}$ и $\{y_1, y_3\}$, для которой потребуется только два умножения и будут получены значения $x_3 y_3$ и $x_1 y_3 + x_3 y_1$.

Следовательно, если определены величины α_i, $i = 1, ..., 4$, $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$, $x_1 y_2 + x_2 y_1$, $x_1 y_3 + x_3 y_1$, для чего потребуется девять умножений, то компоненты свертки примут такой вид:

$$C(-3) = x_1 y_1,\ C(-2) = x_1 y_2 + x_2 y_1,$$

$$C(-1) = x_1 y_3 + x_2 y_3 + x_3 y_1,\ C(0) = \alpha_0,$$

$$C(1) = \alpha_1 - (x_1 y_3 + x_3 y_1 + x_3 y_3),$$

$$C(2) = \alpha_2 - (x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

$$C(3) = \alpha_3 - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)\,.$$

$x_1 y_1$							
$x_1 y_2 +$	$x_2 y_1$						
$x_1 y_3 +$	$x_2 y_2 +$	$x_3 y_1$					
$x_1 y_4 +$	$x_2 y_3 +$	$x_3 y_2 +$	$x_4 y_1$				
$x_1 y_5 +$	$x_2 y_4 +$	$x_3 y_3 +$	$x_4 y_2 +$	$x_5 y_1$			
$x_1 y_6 +$	$x_2 y_5 +$	$x_3 y_4 +$	$x_4 y_3 +$	$x_5 y_2 +$	$x_6 y_1$		
$x_1 y_7 +$	$x_2 y_6 +$	$x_3 y_5 +$	$x_4 y_4 +$	$x_5 y_3 +$	$x_6 y_2 +$	$x_7 y_1$	
$x_1 y_8 +$	$x_2 y_7 +$	$x_3 y_6 +$	$x_4 y_5 +$	$x_5 y_4 +$	$x_6 y_3 +$	$x_7 y_2 +$	$x_8 y_1$
	$x_2 y_8 +$	$x_3 y_7 +$	$x_4 y_6 +$	$x_5 y_5 +$	$x_6 y_4 +$	$x_7 y_3 +$	$x_8 y_2$
		$x_3 y_8 +$	$x_4 y_7 +$	$x_5 y_6 +$	$x_6 y_5 +$	$x_7 y_4 +$	$x_8 y_3$
			$x_4 y_8 +$	$x_5 y_7 +$	$x_6 y_6 +$	$x_7 y_5 +$	$x_8 y_4$
				$x_5 y_8 +$	$x_6 y_7 +$	$x_7 y_6 +$	$x_8 y_5$
					$x_6 y_8 +$	$x_7 y_7 +$	$x_8 y_6$
						$x_7 y_8 +$	$x_8 y_7$
							$x_8 y_8$

Рис. 1. Схема полной декомпозиции

Таким образом, для вычисления одного парного произведения требуется 9/16 = 0,5625 операций вещественного умножения. Как показали исследования [7, 11], алгоритмы подобной структуры приводят к увеличению количества операций, необходимых для вычисления одного парного произведения. В то же время, полная декомпозиция задачи на фрагменты 4×4 позволяет синтезировать алгоритмы с постоянным количеством операций, необходимых для вычисления одного парного произведения, равным 0,5625 операций вещественного умножения.

Схема такого алгоритма для $N = 2^3 = 8$ приведена на рис. 1. Как видно из этой схемы, каждый квадрант представляет собой свертку 4×4. При соответствующем изменении индексов получаем левый верхний квадрант. В правом верхнем квадранте индексы при x достаточно уменьшить на пять. Таким образом, при любом значении n количество операций для вычисления одного парного произведения равно 0,5625, но добавляется $2^n - 1$ сложений.

Рекуррентные гиперкомплексные алгоритмы свертки для длин $N \neq 2^n$. Рассмотренные ранее методы синтеза алгоритмов свертки [5, 11] распространялись только на случаи длин свертываемых последовательностей, равных степени двойки. Однако на практике очень часто необходимо свертывать также последовательности длин $N \neq 2^n$. Например, при обработке изображений часто необходима свертка последовательностей длиной $N = 3$. Для построения такого алгоритма свертки, подобного алгоритму свертки 2×2, необходимо иметь две изоморфные ГЧС размерности $\dim = 3$, одна из которых сильнозаполненная, а вторая — слабозаполненная:

G_{33}	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	e_3	e_1
e_3	e_3	e_1	e_2

,

$3R$	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	0	0
f_2	0	f_2	0
f_3	0	0	f_3

.

Однако ГЧС $3R$ и G_{33} неизоморфны. Если составить и решить систему уравнений изоморфизма этих ГЧС, то нетривиальные ее решения — комплексные. Например, матрица одного из решений, имеет вид

$$\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & (-1+i\sqrt{3})/2 & (-1-i\sqrt{3})/2 \\ 1 & (-1-i\sqrt{3})/2 & (-1+i\sqrt{3})/2 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, ГЧС $3R$ и G_{33} непригодны для построения алгоритма быстрой свертки 3×3. Как показали исследования [7, 11], из изоморфных систем третьей размерности для этих целей лучше всего подходит пара изоморфных ГЧС T и $R \oplus C$, таблицы умножения которых имеют вид

T	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	$(e_3 - e_1)/2$	$-e_2$
e_3	e_3	$-e_2$	e_1

,

$R \oplus C$	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	0	0
f_2	0	f_2	f_3
f_3	0	f_3	$-f_2$

.

Заметим, что выполнение гиперкомплексного умножения в ГЧС $3R$ требует три вещественных умножения, тогда как гиперкомплексное умножение в ГЧС $R \oplus C$ даже с использованием процедуры быстрого умножения комплексных чисел требует четыре вещественных умножения. Кроме того, как видно из таблицы умножения ГЧС T, при умножении гиперкомплексных чисел будет не девять парных произведений, а 10, и некоторые из них с противоположными знаками. Подробный анализ показывает, что с

$x_1 y_1$		
$x_1 y_2$ +	$x_2 y_1$	
$x_1 y_3$ +	$x_2 y_2$ +	$x_3 y_1$
	$x_2 y_3$ +	$x_3 y_2$
		$x_3 y_3$

Рис. 2. Компоненты линейной свертки 3×3

$x_2 y_2$ +	$x_3 y_1$
$x_2 y_3$ +	$x_3 y_2$
	$x_3 y_3$

Рис. 3. Компоненты свертки последовательностей $\{x_2, x_3\}$ и $\{y_3, y_2\}$

$x_1 y_1$			…			
$x_1 y_2$ +	$x_2 y_1$		…			
…	…	…	…	…	…	…
$x_1 y_{N-1}$ +	$x_2 y_{N-2}$ +	$x_3 y_5$ +	…	$x_{N-2} y_2$ +	$x_{N-1} y_1$	
$x_1 y_N$ +	$x_2 y_{N-1}$ +	$x_3 y_{N-2}$ +	…	$x_{N-2} y_3$ +	$x_{N-1} y_2$ +	$x_N y_1$
	$x_2 y_N$ +	$x_3 y_{N-1}$ +	…	$x_{N-2} y_4$ +	$x_{N-1} y_3$ +	$x_N y_2$
…	…	…	…	…	…	…
			…	$x_{N-2} y_N$ +	$x_{N-1} y_{N-1}$ +	$x_N y_{N-2}$
					$x_{N-1} y_N$ +	$x_N y_{N-1}$
						$x_N y_N$

Рис. 4. Общий вид компонентов линейной свертки $N \times N$

помощью ГЧС T и $R \oplus C$ можно синтезировать алгоритм свертки, в котором будет восемь умножений, т.е. выигрыш — одно умножение, что очень мало. Поэтому нужно искать другие подходы к синтезу алгоритмов свертки последовательностей длиной $N \neq 2^n$.

Компоненты линейной свертки 3×3 показаны на рис. 2, где выделены компоненты свертки 2×2, алгоритм вычисления которой приведен выше. Как видно из рис. 2, компоненты линейной свертки 3×3 получаются из компонентов свертки 2×2, для вычисления которых нужно выполнить три умножения обрамлением пятью элементами, т.е. к вычислению свертки

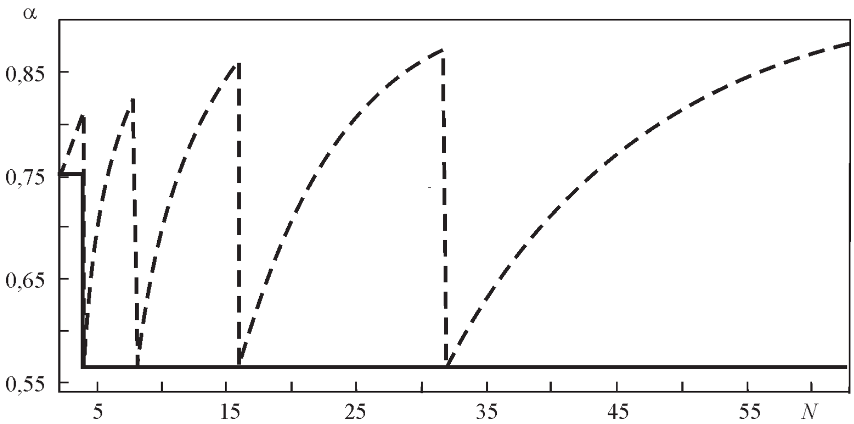

Рис. 5. Зависимость индекса α от длины сворачиваемого массива *N*: — декомпозиционный алгоритм; - - - рекуррентный алгоритм

2×2 следует добавить пять умножений, всего будет 3 + 5 = 8 умножений, как и в предыдущем алгоритме. Однако в данном случае можно уменьшить число умножений.

Фрагмент, представленный на рис. 3, является сверткой последовательностей $\{x_2, x_3\}$ и $\{y_3, y_2\}$, при этом произведение x_2y_2 уже известно. Поэтому для вычисления компонентов $x_2y_3+x_3y_2$ и x_3y_3 требуется два умножения. Парные произведения x_1y_3 и x_3y_1 необходимо вычислить непосредственно.

Таким образом, алгоритм вычисления свертки 3×3 с помощью обрамления свертки 2×2 включает 3 + 2 + 2 = 7 умножений. Это меньше, чем включает алгоритм, основанный на использовании изоморфных ГЧС T и $R\oplus C$. Критерием α эффективности алгоритма свертки является отношение числа умножений M_N, требующихся при выполнении свертки $N\times N$, ко всему количеству парных произведений: $\alpha = M_N / N^2$. Заметим, что если на вычисление одного парного произведения свертки 2×2 приходится 0,75 операций вещественных умножений, то для свертки 3×3 значение α будет несколько больше: $\alpha\approx0{,}78$.

Рассмотрим компоненты линейной свертки $N\times N$ в общем виде (рис. 4). Как видно из рис. 4, для перехода от свертки $(N-1)\times(N-1)$ к свертке $N\times N$ нужно выполнить $2(N-1)$ умножений. Таким образом, существует рекуррентная зависимость $M_N = M_{N-1}+2(N-1)$. При использовании такого метода построения алгоритма вычисления свертки значение критерия α возрастает при увеличении длины свертываемой последовательности. Например, при увеличении длины последовательности от $N = 4$ значение α будет возрастать так:

N	4	5	6	7	8	9	10
α	0,5625	0,68	0,75	0,79592	0, 82812	0,85185	0,87

Как видим, при $N = 8, \alpha = 0{,}82812$. Однако, как было указано выше, для целых степеней двойки есть алгоритмы декомпозиции, для которых этот индекс гораздо меньше: $\alpha = 0{,}5625$. Поэтому при $N = 8$ нецелесообразно продолжать процесс рекурсии от $N = 7$, а следует использовать алгоритм декомпозиции для степени два.

Таким образом, алгоритм вычисления свертки является рекурсивным до значения длины сворачиваемой последовательности, равной $2^n - 1$, а далее, при $N = 2^n$ используется алгоритм декомпозиции, после чего продолжается рекурсия до заданного значения длины сворачиваемой последовательности. Как видно из рис. 5, наибольший эффект достигается при длинах сворачиваемого массива N, близких к 2^n справа ($\approx 40\%$), и снижается по мере приближения к 2^n слева. Необходимо заметить, что все представленные вычисления выполнены с помощью программного комплекса гиперкомплексных вычислений, описанного в работах [12, 13].

Выводы

Алгоритмы вычисления линейной свертки числовых последовательностей, длины которых отличаются от целых степеней двойки, представляют собой рекуррентное обрамление компонент свертки предыдущей длины свертываемой последовательности. Началом рекурсии принимается свертка, построенная на основе алгоритма декомпозиции с использованием ГЧС для длины последовательности, равной ближайшей меньшей степени двойки по отношению к заданной длине. Алгоритмы подобного типа наиболее эффективны для длин последовательностей, близких к 2^n сверху (количество умножений сокращается в среднем на 30%).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Блейхут Р.* Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1989, 449 с.
2. *Нуссбаумер Г.* Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. М.: Радио и связь, 1985, 248 с.
3. *Сергиенко А.Б.* Цифровая обработка сигналов. СПб.: Питер, 2003, 604 с.
4. *Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н.* Цифровая обработка сигналов. М.: Радио и связь, 1985, 312 с.

5. *Калиновский Я.А.* Структура гиперкомплексного метода быстрого вычисления линейной свертки дискретных сигналов // Реєстрація, зберігання і обробка даних, 2013, **15**, № 1, с. 31—44.
6. *Синьков М.В., Бояринова Ю.Е., Калиновский Я.А.* Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения. Киев: Инфодрук, 2010, 388с.
7. *Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е.* Высокоразмерные изоморфные гиперкомплексные числовые системы и их использование для повышения эффективности вычислений. Киев: Инфодрук, 2012, 183 с.
8. *Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е., Синькова Т.В., Сукало А.С.* Построение высокоразмерных изоморфных гиперкомплексных числовых систем для повышения эффективности вычислительных процессов // Электрон. моделирование, 2016, **38**, № 6, с. 67— 84.
9. *Кантор И.Л., Солодовников А.С.* Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973,144 с.
10. *Каліновський Я.О.* Розвиток методів теорії гіперкомплексних числових систем для математичного моделювання і комп'ютерних обчислень. Дис... д-ра техн. наук: 01.05.02. Київ, 2007, 308 с.
11. *Калиновский Я.А., Синькова Т.В.* Алгоритмы быстрого вычисления циклической свертки с представлением дискретных сигналов гиперкомплексными числами // Реєстрація, зберігання і обробка даних, 2014, **16**, №1, с. 9—18.
12. *Kalinovsky Y.A., Boyarinova Y.E., Sukalo A.S., Khitsko Y.V.* The basic principles and the structure and algorithmically software of computing by hypercomplex number. arXiv preprint arXiv: 1708.04021, 2017.
13. *Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е., Хицко Я.В., Сукало А.С.* Программный комплекс для гиперкомплексных вычислений// Электрон. моделирование, 2017, **39**, № 5, с. 81—96.

Получена 25.09.18

REFERENCES

1. Bleichut, R. (1989), *Bystryye algoritmy tsifrovoy obrabotki signalov* [Rapid algorithms of digital signal processing], Mir, Moscow, Russia.
2. Nussbaumer G. (1985), *Bystroye preobrazovaniye Furye i algoritmy vychisleniya svertok* [Fast Fourier transform and computation algorithms], Radio and svyaz, Moscow, Russia.
3. Sergienko, A.B. (2003), *Tsifrovaya obrabotka signalov* [Digital signal processing], Piter, St. Petersburg, Russia.
4. Goldenberg, L.M., Matushkin, B.D. and Polak, M.N. (1985), *Tsifrovaya obrabotka signalov* [Digital signal processing], Radio i svyaz, Moscow, Russia.
5. Kalinovsky, Ya.A. (2013), “Structure of the hypercomplex method for fast calculation of linear convolution of discrete signals”, *Reyestratsiya, zberihannya i obrobka danykh*, Vol. 15, no. 1, pp. 31-44.
6. Sinkov, M.V., Boyarinova, Yu.E. and Kalinovsky, Ya.A. (2010), *Konechnomernye giperkompleksnye chislovye sistemy* [Finite-dimensional hypercomplex numerical systems. Fundamentals of the theory. Applications], Infodruk, Kiev, Ukraine.
7. Kalinovsky, Ya.A. and Boyarinova, Yu.E. (2012), *Vysokorazmernye izomorfnye giperkompleksnye chislovye sistemy. Osnovy teorii. Primeneniya* [High-dimensional isomorphic hypercomplex number systems and their use for increasing the efficiency of computations], Infodruk, Kiev, Ukraine.

8. Kalinovsky, Ya.A., Boyarinova, Yu.E., Sinkova, T.V. and Sukalo, A.S. (2016), "Construction of high-dimensional isomorphic hypercomplex numerical systems to improve the efficiency of computing processes", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 38, no. 6, pp. 67-84.
9. Kantor, I.L. and Solodovnikov, A.S. (1973), *Hiperkompleksnye chisla* [Hypercomplex numbers], Nauka, Moscow, Russia.
10. Kalinovsky, Ya.O. (2007), "Development of methods for the theory of hypercomplex number systems for mathematical modeling and computer calculations", Abstract of Cand. Sci. (Tech.) dissertation, 01.05.02, Kyiv.
11. Kalinovsky, Ya.A. and Sinkova, T.V. (2014), "Algorithms for rapid calculation of cyclic convolution with representation of discrete signals by hypercomplex numbers", *Reyestratsiya, zberihannya i obrobka danykh*, Vol. 16, no. 1, pp. 9-18.
12. Kalinovsky, Ya.A., Boyarinova, Y.E., Sukalo, A.S. and Khitsko, Y.V. (2017), "The basic principles and the structure and algorithmically software of computing by hypercomplex number", available at: *arXiv*: 1708.04021.
13. Kalinovsky, Ya.A., Boyarinova, Yu.E., Khitsko, Ya.V. and Sukalo, A.S. (2017), "Software complex for hypercomplex calculations", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 39, no. 5, pp. 81-96.

Received 25.09.18

Я.О. Калиновський, Ю.Є. Бояринова, Я.В. Хицко, А.С. Сукало

ПОСЛІДОВНА ПОБУДОВА АЛГОРИТМІВ
ЛІНІЙНОЇ ЗГОРТКИ ЗА ДОПОМОГОЮ
ГІПЕРКОМПЛЕКСНИХ ЧИСЛОВИХ СИСТЕМ

Розглянуто синтез алгоритмів лінійної згортки масивів, довжина яких не дорівнює 2^n, за допомогою методів гіперкомплексних числових систем (ГЧС). Синтез засновано на рекурентному обрамленні сум парних добутків відліків згортки з подальшим застосуванням ізоморфних ГЧС. Отримані алгоритми за числом множень близьки до алгоритмів Винограда.

К л ю ч о в і с л о в а: гіперкомплексна числова система, лінійна згортка, ізоморфізм, множення, бікомплексні числа, квадриплексні числа.

Ya.A. Kalinovsky, Y.E. Boyarinova, Ya.V. Khitsko, A.S. Sukalo

THE STRUCTURE OF A SEQUENTIAL
METHOD FOR CONSTRUCTING LINEAR CONVOLUTION
ALGORITHMS WITH THE HELP OF THE HNS

The paper considers the synthesis of algorithms for linear convolution of arrays, whose length is not equal 2^n, for which the methods of hypercomplex number systems (HNS) are used. The synthesis is based on the recurrent fringing of sums of pair products of convolution counts with subsequent application of isomorphic hypercomplex numerical systems. The obtained algorithms by the number of multiplications are nearly to the algorithms of Vinograd.

K e y w o r d s: hypercomplex numerical system, linear convolution, isomorphism, ultiplication, bicomplex numbers, quadriplex numbers.

КАЛИНОВСКИЙ Яков Александрович, д-р техн. наук, ст. науч. сотр. Ин-та проблем регистрации информации НАН Украины. В 1965 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — теория гиперкомплексных числовых систем и их применение в математическом моделировании.

БОЯРИНОВА Юлия Евгеньевна, канд. техн. наук, ст. науч. сотр. Ин-та проблем регистрации информации НАН Украины, доцент Национального технического университета Украины «Киевский политехнический ин-т им. Игоря Сикорского», который окончила в 1997 г. Область научных исследований — теория гиперкомплексных числовых систем и их применение в математическом моделировании.

ХИЦКО Яна Владимировна, канд. техн. наук, доцент Национального технического университета Украины «Киевский политехнический ин-т им. Игоря Сикорского», который окончила в 2005 г. Область научных исследований — теория гиперкомплексных числовых систем и их применение в математическом моделировании.

СУКАЛО Алина Сергеевна, ассистент Национального университета водного хозяйства (г. Ровно). В 2013 г. окончила Житомирский госуниверситет. Область научных исследований — математическое моделирование и вычислительные процессы.