
doi:<https://doi.org/10.15407/emodel.40.06.021>

УДК 550:531; 681.51

Н.В. Ефименко, канд. техн. наук
НПП «Хартрон-ЮКОМ»
(Украина, 6935, Запорожье, пр-т Соборный, 166,
тел. 061 2361929, e-mail: nefimenko@gmail.com)

Математическая модель углового движения космического аппарата в параметрах Родрига—Гамильтона и ее свойства

Рассмотрена модель вращательного движения космического аппарата (КА) в виде дифференциального уравнения второго порядка относительно параметров Родрига—Гамильтона. Исследованы свойства этого уравнения и предложена методика синтеза алгоритмов пространственной ориентации КА, позволяющая находить в аналитическом виде программные траектории переориентации КА. Приведены результаты экспериментальной проверки предложенной методики на КА «Сич-2».

Ключевые слова: параметры Родрига—Гамильтона, космический аппарат, кватернион, ориентация, динамическое уравнение для кватерниона.

В настоящее время при построении алгоритмов управления угловым движением космического аппарата (КА), как правило, применяется модель углового движения КА, в которой для описания ориентации используются параметры Родрига—Гамильтона. Вопросы применения этой модели в задачах управления ориентацией КА рассмотрены в работах [1—10 и др.], где показано, что использование параметров Родрига—Гамильтона в качестве кинематических параметров повышает эффективность аналитического исследования и численного решения многих задач управления угловым движением КА.

Физической основой параметров Родрига—Гамильтона является преобразование систем координат посредством плоского поворота на угол $\vartheta \in [0, \pi]$ вокруг некоторой неподвижной оси, называемой осью Эйлера. Возможность такого преобразования установлена известной теоремой Эйлера [11]. Теоретические основы использования параметров Родрига—Гамильтона в задачах динамики твердого тела приведены в работах [1, 12, 13]. В них показано, что формализм кватернионной алгебры позволяет

© Н.В. Ефименко, 2018

сравнительно просто реализовать все основные операции, выполняемые при решении задач управления вращением.

Достоинством этой модели является отсутствие вычислительных особенностей и минимальная избыточность вектора состояния, наличие простых формул для сложения поворотов, а недостатком — нелинейность модели, что существенно затрудняет синтез законов управления.

Для построения управления можно использовать также модель движения, имеющую вид системы дифференциальных уравнений второго порядка относительно параметров Родрига—Гамильтона [3—5]. Однако в моделях, описанных в работах [3—5], правые части динамического уравнения Эйлера выражены непосредственно через параметры Родрига—Гамильтона. Это приводит к тому, что модели становятся существенно нелинейными, и их трудно использовать для синтеза управления. Этим трудностям можно избежать, если при построении модели использовать динамическое уравнение для кватерниона, описывающее множество всех допустимых управляемых перемещений точки на поверхности сферы с единичным радиусом в четырехмерном пространстве [14, 15]. Исследуем свойства такой модели.

Математическая модель углового движения КА в параметрах Родрига—Гамильтона. Введем условные обозначения и системы координат:

ω_A^{AB} — вектор угловой скорости вращения базиса A относительно базиса B , заданный проекциями на оси базиса A ;

$\Lambda_{AB} = \begin{pmatrix} \lambda_{AB}^0 \\ \lambda_{AB} \end{pmatrix}$ — векторное представление кватерниона со скалярной

λ_{AB}^0 и векторной $\lambda_{AB} \in R^3$ частями перехода от базиса A к базису B ;

C_{BA} — матрица перехода от базиса A к базису B ;

I — инерциальная система координат;

R — опорная система координат, в которой осуществляется требуемая ориентация КА, ее вращение относительно инерциальной системы координат I задается вектором программной угловой скорости в виде некоторой функции времени $\omega_R^{RI}(t)$, имеющей производную по времени $\dot{\omega}_R^{RI}(t)$;

B — жестко связанная с корпусом КА правая ортогональная система координат, угловое положение которой в пространстве определяется работой системы управления КА;

J — тензор инерции КА;

$M_{\text{и}} \in R^3$ — управляющий момент, создаваемый исполнительными органами системы управления КА;

$M_{\text{в}} \in R^3$ — возмущающий момент;

$\Phi(x)$ — линейный кососимметрический оператор векторного произведения, определяемый равенством $\Phi(x)y = x \times y$,

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix};$$

I_n — единичная матрица $n \times n$.

Пусть динамика углового движения КА относительно инерциального базиса I описывается уравнением

$$J\dot{\omega}_B^{BI} + \omega_B^{BI} \times J\omega_B^{BI} = M_{\text{и}} + M_{\text{в}}. \quad (1)$$

Рассмотрим движение базиса B относительно базиса R . Согласно теореме о сложении скоростей для угловой скорости ω_B^{BI} запишем

$$\omega_B^{BI} = \omega_B^{BR} + \omega_B^{RI}. \quad (2)$$

Из уравнения (2) получаем

$$\omega_B^{BR} = \omega_B^{BI} - \omega_B^{RI}. \quad (3)$$

При этом для векторного представления кватерниона Λ_{RB} справедливо уравнение

$$2\dot{\Lambda}_{RB} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_B^{BR^T} \\ \omega_B^{BR} & -\Phi(\omega_B^{BR}) \end{bmatrix} \Lambda_{RB}. \quad (4)$$

Продифференцировав выражение (3) с учетом (1), получим уравнение, описывающее динамику углового движения базиса B относительно базиса R :

$$J\dot{\omega}_B^{BR} + \omega_B^{BI} \times J\omega_B^{BI} + J(\omega_B^{BI} \times \omega_B^{BR} + \dot{\omega}_B^{RI}) = M_{\text{и}} + M_{\text{в}}, \quad (5)$$

где

$$\omega_B^{RI} = C_{BR}(\Lambda_{RB})\omega_R^{RI}, \quad \dot{\omega}_B^{RI} = C_{BR}(\Lambda_{RB})\dot{\omega}_R^{RI}.$$

Для вектора Λ_{RB} справедливо соотношение

$$\|\Lambda_{RB}\|^2 = 1. \quad (6)$$

Продифференцировав дважды по времени равенство (6), получим

$$\Lambda_{RB}^T \ddot{\Lambda}_{RB} + \|\dot{\Lambda}_{RB}\|^2 = 0. \quad (7)$$

Разрешив уравнение (7) относительно $\ddot{\Lambda}_{RB}$, найдем динамическое уравнение для вектора Λ_{RB} (динамическое уравнение для кватерниона [15]):

$$\ddot{\Lambda}_{RB} = (I_4 - \Lambda_{RB} \Lambda_{RB}^T) f - \Lambda_{RB} \|\dot{\Lambda}_{RB}\|^2. \quad (8)$$

В этом уравнении вектор $f \in R^4$ является свободной переменной, изменяя которую можно изменять характер движения вектора Λ_{RB} . Из (4) следует

$$\omega_B^{BR} = 2A(\Lambda_{RB}) \dot{\Lambda}_{RB}, \quad (9)$$

где матрица $A(\Lambda_{RB})$ имеет вид $A(\Lambda_{RB}) = (-\lambda_{RB} \quad \lambda_{RB}^0 I_3 \quad -\Phi(\lambda_{RB}))$. Для этой матрицы справедливы следующие соотношения: $A(\Lambda_{RB}) A^T(\Lambda_{RB}) = I_3$, $A(\Lambda_{RB}) \Lambda_{RB} = 0$. Дифференцируя выражение (9) с учетом свойств матрицы $A(\Lambda_{RB})$ и уравнения (8), находим

$$\dot{\omega}_B^{BR} = 2A(\Lambda_{RB}) f. \quad (10)$$

Уравнение (10) позволяет установить взаимное соответствие между вектором f и физически действующими моментами $M_{и}$ и $M_{в}$. Разрешив уравнение (10) относительно вектора f , получим

$$f = \frac{1}{2} A^T(\Lambda_{RB}) J^{-1} (M_{и} + M_{в} - \omega_B^{BI} \times J \omega_B^{BI} - J(\omega_B^{RI} \times \omega_B^{BR} + \dot{\omega}_B^{RI})) + \gamma \Lambda_{RB},$$

где γ — произвольная скалярная функция. Согласно уравнению (8) изменить характер движения вектора Λ_{RB} можно лишь с помощью составляющей $f_{\perp} = (I_4 - \Lambda_{RB} \Lambda_{RB}^T) f$, ортогональной вектору Λ_{RB} . Поэтому составляющая $f_{\parallel} = \gamma \Lambda_{RB}$, параллельная вектору Λ_{RB} , не влияет на характер движения и ее можно положить равной нулю. Тогда

$$f = \frac{1}{2} A^T(\Lambda_{RB}) \dot{\omega}_B^{BR} = \frac{1}{2} A^T(\Lambda_{RB}) J^{-1} (M_{и} + M_{в} - \omega_B^{BI} \times J \omega_B^{BI} - J(\omega_B^{RI} \times \omega_B^{BR} + \dot{\omega}_B^{RI})). \quad (11)$$

Представим управляющий момент $M_{и}$ в следующем виде:

$$M_{и} = 2JA(\Lambda_{RB})U + \omega_B^{BI} \times J \omega_B^{BI} + J(\omega_B^{RI} \times \omega_B^{BR} + \dot{\omega}_B^{RI}), \quad (12)$$

где вектор $U \in R^4$ будем рассматривать как новый вектор управления. Решая это уравнение относительно U , находим выражение, позволяющее рассчитать вектор U по вектору $M_{и}$:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} A^T (\Lambda_{RB}) \dot{\omega}_B^{BR} = \\
 &= \frac{1}{2} A^T (\Lambda_{RB}) J^{-1} (M_{\text{и}} - \omega_B^{BI} \times J \omega_B^{BI} - J (\omega_B^{RI} \times \omega_B^{BR} + \dot{\omega}_B^{RI})). \quad (13)
 \end{aligned}$$

С учетом (12) выражение для вектора $f \in R^4$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 f &= \frac{1}{2} A^T (\Lambda_{RB}) \dot{\omega}_B^{BR} = \\
 &= \frac{1}{2} A^T (\Lambda_{RB}) J^{-1} [M_{\text{и}} + M_{\text{в}} - \omega_B^{BI} \times J \omega_B^{BI} - J (\omega_B^{RI} \times \omega_B^{BR} + \dot{\omega}_B^{RI})] = \\
 &= \frac{1}{2} A^T (\Lambda_{RB}) J^{-1} [2JA (\Lambda_{RB}) U + \omega_B^{BI} \times J \omega_B^{BI} + J (\omega_B^{RI} \times \omega_B^{BR} + \dot{\omega}_B^{RI}) + M_{\text{в}} - \omega_B^{BI} \times \\
 &\times J \omega_B^{BI} - J (\omega_B^{RI} \times \omega_B^{BR} + \dot{\omega}_B^{RI})] = A^T (\Lambda_{RB}) A (\Lambda_{RB}) U + \frac{1}{2} A^T (\Lambda_{RB}) J^{-1} M_{\text{в}}. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Подставив выражение (14) в (8) и выполнив необходимые преобразования, получим

$$\ddot{\Lambda}_{RB} = (I_4 - \Lambda_{RB} \Lambda_{RB}^T) U + \frac{1}{2} A^T (\Lambda_{RB}) J^{-1} M_{\text{в}} - \Lambda_{RB} \|\dot{\Lambda}_{RB}\|^2. \quad (15)$$

Уравнение (15), как и уравнения (4), (5), описывает угловое движение базиса B относительно базиса R . В этом уравнении в качестве вектора состояния используется вектор параметров Родрига—Гамильтона (кватернион) и его производная, а в качестве вектора управления — вектор U . Матрицу $A (\Lambda_{RB})$, которая входит в выражения (9)—(15), можно рассматривать как оператор отображения четырехмерного пространства в трехмерное: $R^4 \xrightarrow{A} R^3$. При этом обратное отображение определяется матрицей $A^T (\Lambda_{RB}): R^3 \xrightarrow{A^T} R^4$. Тогда соотношениям (9), (12), (13) соответствуют следующие отображения:

$$\begin{aligned}
 \dot{\Lambda}_{RB} &\xrightarrow{2A} \omega_B^{BR}, \\
 U &\xrightarrow{2A} J^{-1} (M_{\text{и}} - \omega_B^{BI} \times J \omega_B^{BI} - J (\omega_B^{RI} \times \omega_B^{BR} + \dot{\omega}_B^{RI})), \\
 \omega_B^{BR} &\xrightarrow{\frac{1}{2} A^T} \dot{\Lambda}_{RB}, \\
 J^{-1} (M_{\text{и}} - \omega_B^{BI} \times J \omega_B^{BI} - J (\omega_B^{RI} \times \omega_B^{BR} + \dot{\omega}_B^{RI})) &\xrightarrow{\frac{1}{2} A^T} U.
 \end{aligned}$$

Модель углового движения КА, определяемая уравнениями (4), (5), представляет собой модель, в которой уравнения динамики записаны в пространстве R^3 , а кинематические уравнения — в пространстве R^4 . Уравнение (15) представляет собой модель углового движения КА, в которой уравнения динамики и кинематики записаны в пространстве R^4 . При этом отображению подвергается и управляющий момент. Поскольку отображение, определяемое матрицей $A^T(\Lambda_{RB})$, обратимо, можно синтезировать законы управления, используя модель (15), а затем с помощью отображения

$$U \xrightarrow{2A} J^{-1}(M_n - \omega_B^{BI} \times J\omega_B^{BI} - J(\omega_B^{RI} \times \omega_B^{BR} + \dot{\omega}_B^{RI}))$$

вернуться в пространство R^3 и по формуле (12) найти физически реализуемый управляющий момент M_n .

Уравнение (8) представляет собой частный случай уравнения движения точки по сфере в пространстве R^n :

$$\ddot{X}_0 = (I_n - X_0 X_0^T) f - X_0 |\dot{X}_0|^2. \quad (16)$$

В связи с этим, прежде чем излагать методы решения задач управления ориентацией КА с использованием уравнения (15), рассмотрим основные свойства уравнения (16).

Уравнения движения точки по сфере и его свойства. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{X}_0 = \Theta, \quad X_0 \in R^4. \quad (17)$$

Наложим на вектор X_0 ограничение

$$\|X_0\|=1. \quad (18)$$

Продифференцировав дважды по времени равенство (18), получим ограничение, которому должен удовлетворять вектор Θ :

$$\Theta^T X_0 + \|\dot{X}_0\|^2 = 0. \quad (19)$$

Из равенства (19) получаем

$$\Theta = (I_n - X_0 X_0^T) f - X_0 \|\dot{X}_0\|^2, \quad (20)$$

где $f \in R^4$ — произвольный вектор. Подставив (20) в (17), получим уравнение движения точки X_0 по единичной сфере в пространстве R^n :

$$\ddot{X}_0 = (I_n - X_0 X_0^T) f - X_0 |\dot{X}_0|^2. \quad (21)$$

Вектор $f \in R^n$ будем рассматривать как вектор управления. Введем следующие обозначения: $\Theta_{\perp} = (I_n - X_0 X_0^T) f$, $\Theta_{\parallel} = -X_0 \|\dot{X}_0\|^2$. С учетом принятых обозначений выражение (20) можно записать в виде $\Theta = \Theta_{\perp} + \Theta_{\parallel}$. Вектор Θ_{\parallel} представляет собой радиальную составляющую ускорения движения точки по сфере, а Θ_{\perp} — касательную составляющую. Для векторов Θ_{\parallel} и Θ_{\perp} справедливы следующие соотношения:

$$\Theta_{\parallel}^T \Theta_{\perp} = 0, \quad (22)$$

$$X_0^T \Theta_{\perp} = 0, \quad (23)$$

$$X_0^T \Theta_{\parallel} = -\|\dot{X}_0\|^2. \quad (24)$$

Из выражений (21)—(23) следует, что изменять траекторию движения точки по сфере (управлять перемещением) можно, лишь изменяя касательную составляющую ускорения точки Θ_{\perp} , т.е. посредством формирования соответствующего управления f . При этом радиальная составляющая ускорения Θ_{\parallel} удерживает точку на сфере. Для уравнения (16) справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. Пусть задана нелинейная система дифференциальных уравнений $X^{(m)} = F(X, \dot{X}, \ddot{X}, \dots, X^{(m-1)})$. Будем рассматривать компоненты вектора $X(t) \in R^n$ как координаты одноименной точки, которая движется в пространстве R^n по некоторой траектории, определяемой вектором $X(t)$. При этом вектор-функция $X(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, удовлетворяет условию $\|X(t)\| \neq 0$. Тогда движение проекции этой точки на единичную сферу в пространстве R^n , определяемое ортом $X_0(t) = \frac{X(t)}{\|X(t)\|}$ вектора $X(t)$,

описывается уравнением

$$\ddot{X}_0 = (I_n - X_0 X_0^T) f - X_0 \|\dot{X}_0\|^2,$$

$$f = \frac{\ddot{X}}{\delta} - 2 \frac{\dot{\delta}}{\delta} \dot{X}_0 + \alpha X_0,$$

$$\delta = \sqrt{X^T X}, \quad \dot{\delta} = X_0^T \dot{X},$$

в котором переменная $\alpha(t)$ представляет собой произвольную скалярную функцию времени.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим вектор $X(t) \in R^n$. Будем полагать, что его движение описывается уравнением $X^{(m)} = F(X, \dot{X}, \ddot{X}, \dots, X^{(m-1)})$. Представим вектор X в виде $X = \delta X_0$, где $X_0 = X / \delta$, $\delta = \sqrt{X^T X}$.

Вектор X_0 можно интерпретировать как координаты точки на единичной сфере в R^n . Поскольку X_0 — нормированный вектор, для него справедливо уравнение

$$\ddot{X}_0 = (I_n - X_0 X_0^T) f - X_0 |\dot{X}_0|^2. \quad (25)$$

Для вектора \dot{X} можно записать $\ddot{X} = \dot{\delta} X_0 + 2\dot{\delta} \dot{X}_0 + \delta \ddot{X}_0$, откуда получим

$$\ddot{X}_0 = \frac{\ddot{X}}{\delta} - \frac{\dot{\delta}}{\delta} X_0 - 2 \frac{\dot{\delta}}{\delta} \dot{X}_0. \quad (26)$$

Найдем скалярное произведение векторов \ddot{X} и X_0 :

$$\dot{X}^T X_0 = \dot{\delta} - \delta |\dot{X}_0|^2. \quad (27)$$

Разрешив уравнение (27) относительно $\dot{\delta}/\delta$ и подставив найденное выражение в (26), для переменной \ddot{X}_0 запишем

$$\ddot{X}_0 = (I_n - X_0 X_0^T) \left(\frac{\ddot{X}}{\delta} - 2 \frac{\dot{\delta}}{\delta} \dot{X}_0 \right) - X_0 |\dot{X}_0|^2. \quad (28)$$

Вычитая из (25) выражения (28), получаем

$$(I_n - X_0 X_0^T) \left(f - \frac{\ddot{X}}{\delta} + 2 \frac{\dot{\delta}}{\delta} \dot{X}_0 \right) = 0,$$

т.е. вектор $f - \frac{\ddot{X}}{\delta} + 2 \frac{\dot{\delta}}{\delta} \dot{X}_0$ принадлежит нулевому пространству Y_0 матрицы $E_n - X_0 X_0^T$. Размерность этого пространства равна единице, а его элементы определяются выражением $Y_0 = \alpha X_0$, где α — произвольная скалярная функция. Следовательно,

$$f - \frac{\ddot{X}}{\delta} + 2 \frac{\dot{\delta}}{\delta} \dot{X}_0 = \alpha X_0. \quad (29)$$

Решив уравнение (29) относительно f , получим

$$f = \frac{\ddot{X}}{\delta} - 2 \frac{\dot{\delta}}{\delta} \dot{X}_0 + \alpha X_0.$$

Утверждение доказано.

Утверждение 2. Пусть на единичной сфере в пространстве R^n задана точка $X_0(t)$, движение которой описывается уравнением $\ddot{X}_0 =$

$= (I_n - X_0 X_0^T) f - X_0 |\dot{X}_0|^2$. Единичному вектору $X_0(t)$ можно поставить в соответствие вектор $X(t)$, изменение координат которого во времени описывается системой уравнений $\dot{X}(t) = \Psi$, где согласно утверждению 1 функция $\Psi(t)$ имеет вид $\Psi(t) = \delta f + 2\dot{\delta} X_0 + \alpha X_0$, $\delta = \sqrt{X^T X}$. Если в начальный момент времени выполняются соотношения $X(t_0) = X_0(t_0)$, $\dot{X}(t_0) = \dot{X}_0(t_0)$, то существует взаимно-однозначное соответствие между векторами $X_0(t)$ и $X(t)$, определяемое выражениями

$$X_0(t) = \frac{X(t)}{\delta},$$

$$\dot{X}_0(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{X(t)}{\delta} \right) = (I_n - X_0(t) X_0^T(t)) \frac{\dot{X}(t)}{\delta},$$

$$X(t) = \delta X_0(t), \quad \dot{X}(t) = \dot{\delta} X_0(t) + \delta \dot{X}_0(t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение 2 следует из теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши, согласно которой, если правая часть дифференциального уравнения удовлетворяет условию Липшица, то решение задачи Коши существует и однозначно определяется начальными условиями. Поскольку начальные условия для уравнения, описывающего изменение во времени вектора $X(t)$, совпадают с начальными условиями для уравнения, описывающего изменение во времени вектора $X_0(t)$, в этом случае будет существовать взаимно-однозначное соответствие между переменными $X(t)$ и $X_0(t)$.

Утверждение 2 позволяет при построении управления f перейти от уравнения движения по сфере, где наложено ограничение на координаты, к уравнению движения в пространстве R^n , которое, как правило, проще, чем уравнение движения точки по сфере, и не содержит ограничений. Для модели без ограничений находят решение задачи оптимального управления. Затем, используя утверждение 1, строят управление f , обеспечивающее заданное движение по сфере.

Утверждение 3. Пусть на единичной сфере в пространстве R^n задана точка $X_0(t)$, движение которой описывается уравнением $\ddot{X}_0 = \Theta$, где ускорение точки Θ определяется выражением $\Theta = (I_n - X_0 X_0^T) f - X_0 \|\dot{X}_0\|^2$, а вектор f является вектором управления. Тогда векторы Θ и f связаны соотношением $f = \Theta + \alpha X_0$, где переменная α — произвольная скалярная функция.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем выражение для вектора Θ в следующем виде:

$$(I_n - X_0 X_0^T) \Theta + X_0 X_0^T \Theta = (I_n - X_0 X_0^T) f - X_0 \|\dot{X}_0\|^2. \quad (30)$$

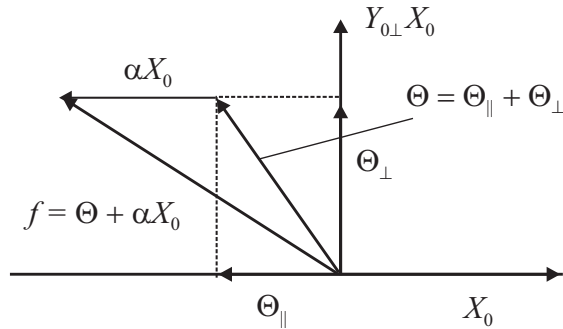


Рис. 1. Геометрическое изображение утверждения 3

Из соотношения (30) с учетом ограничения (19) находим

$$(I_n - X_0 X_0^T)(f - \Theta) = 0,$$

т.е. вектор $f - \Theta$ принадлежит нулевому пространству Y_0 матрицы $I_n - X_0 X_0^T$. Следовательно, $f - \Theta = \alpha X_0$, откуда $f = \Theta + \alpha X_0$. Утверждение доказано.

Геометрическое изображение этого утверждения представлено на рис. 1, из которого видно, что при любом значении α составляющая ускорения Θ_{\perp} , зависящая от вектора управления f , остается неизменной, т.е. параметр α не влияет на характер движения вектора X_0 . Изменить характер его движения можно лишь изменив составляющую ускорения точки Θ_{\perp} , т.е. посредством формирования соответствующего управления f . Утверждение 3 дает возможность представить уравнение движения по сфере в виде $\ddot{X}_0 = f - \alpha X_0$. Поскольку переменная α не влияет на характер движения вектора X_0 , ее можно положить равной нулю. В этом случае уравнение для вектора X_0 принимает очень простой вид: $\ddot{X}_0 = f$. Эта форма записи уравнения движения точки по сфере позволяет получить простое по структуре уравнение отклонения точки от программной траектории (уравнение ошибки):

$$\ddot{e}_i = \ddot{X}_0 - \ddot{X}_0^* = f - f^* = \Delta f,$$

где X_0 — текущее положение точки на сфере (текущая траектория); X_0^* — требуемое положение точки на сфере (программная траектория). С помощью этого уравнения можно найти аналитическое решение практически любой задачи оптимального управления (т.е. найти Δf) и затем, используя соотношение $f = \Delta f + f^*$, построить требуемое управление f .

Особенности применения динамического уравнения с параметрами Родрига—Гамильтона в задачах управления ориентацией КА. Уравнение (15) является нелинейным уравнением, что существенно усложняет процедуру синтеза управления U . Нелинейность (15) обусловлена тем, что Λ_{RB} представляет собой нормированный кватернион. Для того чтобы избавиться от нелинейности, перейдем к ненормированному кватерниону. Представим кватернион Λ_{RB} в виде

$$\Lambda_{RB}(t) = \frac{X(t)}{\|X(t)\|}, \quad (31)$$

где $X(t) \in R^4$ — векторное представление некоторого ненормированного кватерниона. Пусть изменение во времени вектора $X(t)$ описывается уравнением

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= \Xi, \\ X(t_0) &= \Lambda_{RB}(t_0), \quad \dot{X}(t_0) = \dot{\Lambda}_{RB}(t_0). \end{aligned} \quad (32)$$

Согласно (32) для производной по времени от вектора Λ_{RB} справедливо соотношение

$$\dot{\Lambda}_{RB}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{X(t)}{\|X(t)\|} \right) = (I_4 - \Lambda_{RB} \Lambda_{RB}^T) \frac{\dot{X}(t)}{\|X(t)\|}. \quad (33)$$

С учетом соотношения (33) выражение (9) можно представить в следующем виде:

$$\omega_B^{BR} = \frac{2}{\|X\|^2} A(X) \dot{X}. \quad (34)$$

Из выражений (31)—(34) следует, что, сформировав нужное управление $\Xi(t)$, можно сформировать требуемый характер изменения угловой ориентации и скорости вращения КА. Поскольку в начальный момент времени выполняются условия $X(t_0) = \Lambda_{RB}(t_0)$, $\dot{X}(t_0) = \dot{\Lambda}_{RB}(t_0)$, согласно утверждению 2 между векторами состояния систем (32) и (15) существует взаимное соответствие, определяемое формулами

$$\begin{aligned} \Lambda_{RB}(t) &= \frac{X(t)}{\delta}, \\ \dot{\Lambda}_{RB}(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{X(t)}{\delta} \right) = (I_4 - \Lambda_{RB}(t) \Lambda_{RB}^T(t)) \frac{\dot{X}(t)}{\delta}, \\ X(t) &= \delta \Lambda_{RB}(t), \quad \dot{X}(t) = \dot{\delta} \Lambda_{RB}(t) + \delta \dot{\Lambda}_{RB}(t), \quad \delta(t) = \sqrt{X^T(t) X(t)}. \end{aligned}$$

При этом уравнение (32) можно рассматривать как уравнение углового движения КА, записанное в виде дифференциального уравнения для

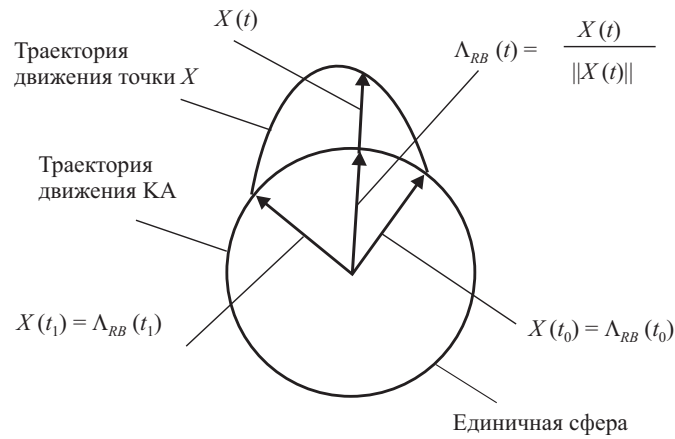


Рис. 2. Геометрическая интерпретация описания углового движения КА с помощью ненормированного кватерниона

ненормированного кватерниона. Продифференцировав m раз вектор X , дифференциальное уравнение (32) можно записать в виде

$$X^{(m)} = \Psi, \quad (35)$$

где вектор Ψ определяется выражением $\Psi = \Xi^{(m-2)}$. Геометрическая интерпретация предложенного способа описания углового движения КА представлена на рис. 2.

Связь динамического уравнения в параметрах Родрига—Гамильтона с динамическим уравнением для ненормированного кватерниона (35) определяется следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \ddot{\Lambda}_{RB} &= (I_4 - \Lambda_{RB} \Lambda_{RB}^T) U - \Lambda_{RB} \|\dot{\Lambda}_{RB}\|^2, \\ U &= \frac{\ddot{X}}{\delta} - 2 \frac{\dot{\delta}}{\delta} \dot{\Lambda}_{RB}, \quad \delta = \|X\|, \quad \dot{\delta} = \Lambda_{RB}^T \dot{X}, \end{aligned}$$

которые вытекают из утверждения 1.

Результаты проведенных исследований позволяют строить алгоритмы управления, обеспечивающие требуемую ориентацию КА, по следующей схеме:

Шаг 1. Задаем оптимальную программу разворота КА $\Lambda_{RB}^*(t)$, определяемую как орт вектора $X(t)$:

$$\Lambda_{RB}^*(t) = \frac{X(t)}{\|X(t)\|},$$

где движение вектора $X(t) \in R^4$ описывается дифференциальным уравне-

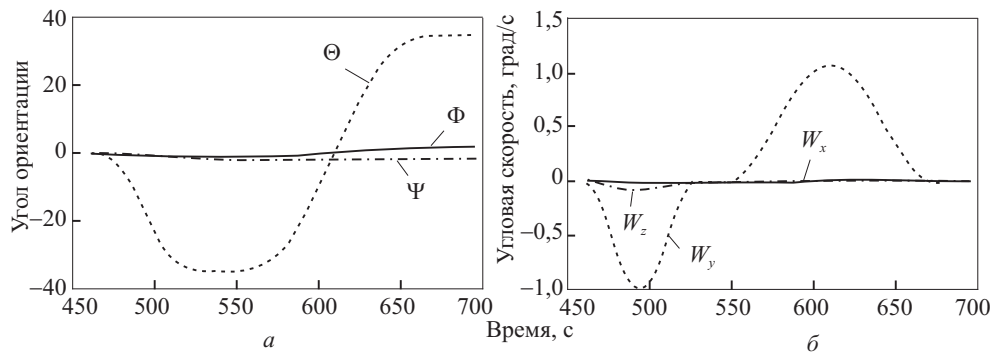


Рис. 3. Графики изменения углов ориентации (а) и угловых скоростей (б) при испытаниях КА «Сич-2» (виток 630, стереосъемка)

нием вида $X^{(m)} = \Psi$ и $\Psi \in R^4$ является вектором управления. Вектор $X(t)$ и управление Ψ находим в результате решения задачи оптимального управления, а именно: найти закон управления $\Psi(t)$, переводящий систему $X^{(m)} = \Psi$ из текущего состояния в момент времени t_0 в требуемое состояние в момент времени t_1 и обеспечивающий минимум некоторому функционалу

$$L(t) = \int_{t_0}^{t_1} \varphi(X, \dot{X}, \ddot{X}, \dots, X^{(m-1)}, \Psi) dt.$$

Вид функционала $L(t)$ определяем, исходя из динамических требований к режиму разворота. Правая часть дифференциального уравнения для вектора $X(t) \in R^4$ имеет очень простой вид, и для этого уравнения существуют аналитические решения практически всех задач оптимального управления.

Шаг 2. В соответствии с утверждением 1 находим программное управление, обеспечивающее движение вдоль заданной траектории:

$$U = \frac{\ddot{X}}{\delta} - 2 \frac{\dot{\delta}}{\delta} \dot{\Lambda}_{RB^*}, \quad \delta^2 = X^T X, \quad \dot{\delta} = X_0^T \dot{X}.$$

Шаг 3. В соответствии с утверждением 3 формируем управление в виде обратной связи по вектору состояния, обеспечивающего устойчивость реального движения относительно программы разворота.

Экспериментальная проверка предложенной методики. На основе предложенного способа построения алгоритмов переориентации были реализованы режимы программных поворотов космических аппаратов «Egyptsat-1» и «Сич-2». Результаты летных испытаний режима программ-

ных поворотов КА «Січ-2» приведены на рис. 3 для витка № 630. Полетное задание при этом было следующим: угол крена — плюс 1,44882 град, угол тангажа — плюс 34,5079 град, угол рыскания — минус 2,01134 град. Как видно из приведенных графиков, в конце разворота углы и угловые скорости соответствуют заданным, что подтверждает работоспособность предложенной методики.

Выводы

Предложенная методика синтеза алгоритмов пространственной переориентации КА позволяет находить в аналитическом виде программные траектории переориентации КА, что весьма актуально для разработчиков систем управления ориентацией КА.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кошляков В.Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. М.: Наука, 1985, 286 с.
2. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973, 320 с.
3. Челноков Ю.Н. Кватернионное решение кинематических задач управления ориентацией твердого тела: Уравнения ошибок, законы и алгоритмы коррекции (стабилизации) // Изв. РАН. Механика твердого тела, 1994, № 4, с. 3—12.
4. Челноков Ю.Н. Управление ориентацией космического аппарата, использующее кватернионы // Космические исследования, 1994, 32, вып. 3, с. 21—32.
5. Челноков Ю.Н. Построение управлений угловым движением твердого тела, использующее кватернионы и эталонные формы уравнений переходных процессов. Ч. 1, 2 // Изв. РАН. Механика твердого тела, 2002, № 1, с. 3—17.
6. Лебедев Д.В. Об управлении трехосной ориентацией твердого тела // Автоматика, 1981, № 3, с. 77—80.
7. Лебедев Д.В. Об управлении движением вокруг центра масс вращающегося твердого тела // Прикладная математика и механика, 1990, 54, вып. 1, с. 18—25.
8. Лебедев Д.В., Ткаченко А.И., Штепа Ю.Н. Магнитная система управления угловым движением микроспутника // Космічна наука і технологія, 1996, 2, № 56, с. 17—25.
9. Лебедев Д.В., Ткаченко А.И. Магнитометрическая система определения параметров движения космического аппарата // Проблемы управления и информатики, 1997, № 4, с. 139—154.
10. Wie B. Quaternion Feedback for Spacecraft Large Angle Maneuvers // Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1985, Vol. 8, p. 360—365.
11. Гуляев В.И., Кошкин В.Л. Оптимальное управление ориентацией систем твердых и деформируемых тел в центральном силовом поле // Техническая кибернетика, 1993, № 4, с. 125—132.
12. Гаврилова Н.Л., Ткаченко А.И. О стабилизации положения твердого тела // Автоматика, 1974, № 6, с. 3—8.
13. Виттенбург И. Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1990, 292 с.

14. Ефименко Н.В. Синтез алгоритмов управления пространственной переориентацией космического аппарата с использованием динамических уравнений вращательного движения твердого тела в параметрах Родрига—Гамильтона // Проблемы управления и информатика, 2015, № 3, с. 145—155.
15. Кириченко Н.В., Матвиенко В.Т. Алгоритмы асимптотической, терминальной и адаптивной стабилизации вращательных движений твердого тела // Там же, 2003, № 1, с. 5—15.

Получена 03.10.18

REFERENCES

1. Koshlyakov, V.N. (1985), *Zadachi dinamiki tverdogo tela i prikladnoy teorii giroskopov* [Problems of the dynamics of a rigid body and the applied theory of gyroscopes], Nauka, Moscow, Russia.
2. Branets, V.N. and Shmyglevsky, I.P. (1973), *Primeneniye kvaternionov v zadachakh orientatsii tverdogo tela* [The use of quaternions in solid orientation problems], Nauka, Moscow, Russia.
3. Chelnokov, Yu.N. (1994), “Quaternionic solution of kinematic problems of controlling the orientation of a rigid body: Error equations, laws and algorithms for correction (stabilization)”, *Mekhanika tverdogo tela*, no. 4, pp. 3-12.
4. Chelnokov, Yu.N. (1994), “Control of the orientation of the spacecraft using quaternions”, *Kosmicheskkiye issledovaniya*, Vol. 32, no. 3, pp. 21-32.
5. Chelnokov, Yu.N. (2002), “The construction of controls for the angular motion of a rigid body, using quaternions and standard forms of equations of transient processes”, *Mekhanika tverdogo tela*, no. 1, pp. 3-17.
6. Lebedev, D.V. (1981), “On the Control of the Three-axis Orientation of a Solid Body”, *Avtomat*, no. 3, pp. 77-80.
7. Lebedev, D.V. (1990), “On the control of motion around the center of mass of a rotating rigid body”, *Prikladnaya matematika i mekhanika*, Vol. 54, no. 1, pp. 18-25.
8. Lebedev, D.V., Tkachenko, A.I. and Shtepa, Yu.N. (1996), “Magnetic system for controlling the angular motion of a microsatellite”, *Kosmichna nauka i tehnologii*, Vol. 2, no. 56, pp. 17-25.
9. Lebedev, D.V. and Tkachenko, A.I. (1997), “Magnetometric system for determining the parameters of motion of a spacecraft”, *Problemy upravleniya i informatiki*, no. 4, pp. 139-154.
10. Wie, B. (1985), “Quaternion Feedback for Spacecraft Large Angle Maneuvers”, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 8, pp. 360-365.
11. Gulyaev, V.I. and Koshkin, V.L. (1993), “Optimal control of the orientation of systems of solid and deformable bodies in a central force field”, *Tekhnicheskaya kibernetika*, no. 4, pp. 125-132.
12. Gavrilova, N.L. and Tkachenko, A.I. (1974), “On the stabilization of the position of a solid body”, *Avtomatika*, no. 6, pp. 3-8.
13. Wittenburg, I. (1990), *Dinamika sistem tverdykh tel* [Dynamics of solids systems], Mir, Moscow, Russia.
14. Yefymenko, N.V. (2015), “Synthesis of control algorithms for spatial reorientation of a spacecraft using dynamic equations of rotational motion of a rigid body in the parameters of Rodrig-Hamilton”, *Problemy upravleniya i informatika*, no. 3, pp. 145-155.
15. Kirichenko, N.V. and Matvienko, V.T. (2003), “Algorithms of asymptotic, terminal and adaptive stabilization of rotational motions of a solid body”, *Problemy upravleniya i informatika*, no. 1, pp. 5-15.

Received 03.10.18

М.В. Ефименко

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ КУТОВОГО РУХУ КОСМІЧНОГО АПАРАТА
В ПАРАМЕТРАХ РОДРІГА—ГАМІЛЬТОНА ТА ЇЇ ОСОБЛИВОСТІ

Розглянуто модель обертального руху космічного апарата (КА) у вигляді диференціального рівняння другого порядку відносно параметрів Родріга-Гамільтона. Досліджено властивості цього рівняння та запропоновано методику синтезу алгоритмів просторової орієнтації КА, яка дозволяє знаходити в аналітичному вигляді програмні траєкторії переорієнтації КА. Наведено результати експериментальної перевірки запропонованої методики на КА «Січ-2».

К л ю ч о в і с л о в а: параметри Родріга—Гамільтона, космічний апарат, кватерніон, орієнтація, динамічне рівняння для кватерніона.

N.V. Yefymenko

MATHEMATICAL MODEL OF THE ANGULAR MOTION OF A SPACECRAFT
IN THE RODRIG-HAMILTON PARAMETERS AND ITS PROPERTIES

A model of the rotational motion of a space vehicle in the form of a second-order differential equation with respect to the Rodrig-Hamilton parameters is considered. The properties of this equation are studied and a technique for the synthesis of spacecraft orientation algorithms is proposed, which makes it possible to find program trajectories of the reorientation of space vehicles. The results of experimental verification of the proposed technique on the Sich-2 spacecraft are presented.

K e y w o r d s: Rodrig-Hamilton parameters, spacecraft, quaternion, orientation, dynamical equation for the quaternion.

ЕФИМЕНКО Николай Владимирович, канд. техн. наук, гл. конструктор НПП «ХАРТРОН-ЮКОМ», доцент Запорожского национального технического университета. В 1978 г. окончил Днепрпетровский госуниверситет. Область научных исследований — теория автоматического управления, системы управления КА.