
doi:<https://doi.org/10.15407/emodel.40.06.083>

519.213:621.391

А.И. Красильников, канд. физ.-мат. наук
Ин-т технической теплофизики НАН Украины
(Украина, 03057, Киев, ул. Желябова, 2а,
тел. (044) 4532857, e-mail: tangorov@ukr.net)

Применение двухкомпонентных смесей сдвинутых распределений для моделирования перфорированных случайных величин

Показано, что использование двухкомпонентных смесей сдвинутых распределений позволяет моделировать широкий класс случайных величин, у которых равны нулю кумулянты κ_s любых порядков s . Проанализированы свойства кумулянтов смесей сдвинутых распределений. Построены модели перфорированных случайных величин на основе смеси сдвинутых гауссовых распределений и смеси распределений Чампернауна.

Ключевые слова: кумулянтные коэффициенты, моментно-кумулянтные модели, кумулянтный анализ, перфорированные распределения, смеси распределений.

Кумулянтные модели физических величин и процессов, имеющих негауссовы распределения, широко применяются для решения различных прикладных задач [1—6]. К таким моделям относятся перфорированные случайные величины [2], у которых по определению часть кумулянтов κ_s порядков $s > 2$ удовлетворяет условию

$$\kappa_s = 0. \quad (1)$$

При использовании в приложениях перфорированных случайных величин возникает задача получения моделей их распределений и необходимость разработки методов компьютерного моделирования. В большинстве работ эта задача решена для частных случаев, когда $s = 3, 4$. В работах [7—9] для моделирования перфорированных случайных величин, у которых $\kappa_3 = 0$ или $\kappa_4 = 0$, использованы дискретные конечные смеси гауссовых распределений. В работах [10, 11] для получения моделей негауссовых распределений, у которых $\kappa_3 = \kappa_4 = 0$, предложено использовать двухкомпонентные смеси негауссовых распределений, а в работе [12] для построения моделей несимметричных распределений с кумулянтном $\kappa_3 = 0$ обосновано применение смесей сдвинутых и масштабированных распределений.

© А.И. Красильников, 2018

Для моделирования перфорированных случайных величин и их распределений с любым порядком s в работе [13] предложено применение семейства смесей сдвинутых распределений, у которого функция распределения $F(x)$ имеет вид

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_0(x-y) dF_1(y), \quad (2)$$

где $F_0(x)$ и $F_1(y)$ — базовая (сдвинутая) и смешивающая функции распределения. Функция $F(x)$ является функцией распределения случайной величины:

$$\xi = \xi_0 + \xi_1, \quad (3)$$

где ξ_0 и ξ_1 — независимые случайные величины с функциями распределения $F_0(x)$ и $F_1(y)$. Случайная величина ξ_0 — базовая, а ξ_1 — величина случайного сдвига функции распределения $F_0(x)$.

Кумулянты смесей сдвинутых распределений (2) имеют вид $\kappa_s = \kappa_{s,0} + \kappa_{s,1}$, где $\kappa_{s,0}$, $\kappa_{s,1}$ — кумулянты случайных величин ξ_0 и ξ_1 . Семейство смесей (2) включает множество перфорированных распределений, для которых условие (1) принимает вид

$$\kappa_{s,0} + \kappa_{s,1} = 0. \quad (4)$$

В рассматриваемом случае компьютерное моделирование перфорированных случайных величин сводится к моделированию суммы двух независимых случайных величин: ξ_0 и ξ_1 . При моделировании перфорированных распределений в общем случае возникает проблема, связанная с вычислением интеграла (2). В работе [14] рассмотрен частный случай решения этой проблемы, т.е. получено семейство моделей непрерывных перфорированных случайных величин, плотность вероятностей которых равна алгебраической сумме сдвинутых базовых функций распределения.

Рассмотрим еще одно семейство простых моделей распределений перфорированных случайных величин, полученное на основе смесей (2).

Двухкомпонентные смеси сдвинутых распределений. Предположим, что ξ_1 — дискретная случайная величина, у которой

$$F_1(y) = qE(y+a) + pE(y-a), \quad (5)$$

где $E(y)$ — единичная функция; $a > 0$ — параметр распределения; $p \in (0, 1)$; $q \in (0, 1)$; $p + q = 1$. Тогда формула (2) принимает вид

$$F(x) = qF_0(x+a) + pF_0(x-a), \quad (6)$$

и определяет семейство моделей двухкомпонентных смесей сдвинутых распределений $F_0(x)$ с параметром сдвига a и весовыми коэффициентами p и q .

Использование семейства двухкомпонентных смесей распределений (6) позволяет осуществлять математическое и компьютерное моделирование широкого класса перфорированных случайных величин (3) любого типа — дискретных, непрерывных и смешанных. В случае, когда случайная величина ξ_0 — непрерывная и имеет плотность вероятностей $p_0(x) = F'_0(x)$, случайная величина ξ также непрерывная и ее плотность вероятностей $p(x) = F'(x)$ имеет вид

$$p(x) = qp_0(x+a) + pp_0(x-a). \quad (7)$$

Для использования семейства двухкомпонентных смесей распределений (6) или (7) в качестве моделей перфорированных случайных величин необходимо знать кумулянты $\kappa_{s,1}$ случайной величины ξ_1 и определить условия, при которых $\kappa_{s,1} = 0$, $\kappa_{s,1} > 0$ и $\kappa_{s,1} < 0$.

Кумулянты смешивающего распределения. Для нахождения кумулянт $\kappa_{s,1}$ используем известные формулы связи кумулянт κ_s с начальными моментами α_s [15]:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \alpha_1; \quad \kappa_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2; \quad \kappa_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3; \\ \kappa_4 &= \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 - 3\alpha_2^2 + 12\alpha_2\alpha_1^2 - 6\alpha_1^4; \\ \kappa_5 &= \alpha_5 - 5\alpha_4\alpha_1 - 10\alpha_3\alpha_2 + 20\alpha_3\alpha_1^2 + 30\alpha_2^2\alpha_1 - 60\alpha_2\alpha_1^3 + 24\alpha_1^5; \\ \kappa_6 &= \alpha_6 - 6\alpha_5\alpha_1 - 15\alpha_4\alpha_2 + 30\alpha_4\alpha_1^2 - 10\alpha_3^2 + 120\alpha_3\alpha_2\alpha_1 - 120\alpha_3\alpha_1^3 + \\ &\quad + 30\alpha_2^3 - 270\alpha_2^2\alpha_1^2 + 360\alpha_2\alpha_1^4 - 120\alpha_1^6; \quad (8) \\ \kappa_7 &= \alpha_7 - 7\alpha_6\alpha_1 - 21\alpha_5\alpha_2 + 42\alpha_5\alpha_1^2 - 35\alpha_4\alpha_3 + 210\alpha_4\alpha_2\alpha_1 - 210\alpha_4\alpha_1^3 + \\ &\quad + 140\alpha_2^3\alpha_1 + 210\alpha_3\alpha_2^2 - 1260\alpha_3\alpha_2\alpha_1^2 + 840\alpha_3\alpha_1^4 - \\ &\quad - 630\alpha_2^3\alpha_1 + 2520\alpha_2^2\alpha_1^2 - 2520\alpha_2\alpha_1^5 + 720\alpha_1^7; \\ \kappa_8 &= \alpha_8 - 8\alpha_7\alpha_1 - 28\alpha_6\alpha_2 + 56\alpha_6\alpha_1^2 - 56\alpha_5\alpha_3 + 336\alpha_5\alpha_2\alpha_1 - 336\alpha_5\alpha_1^3 - \\ &\quad - 35\alpha_4^2 + 560\alpha_4\alpha_3\alpha_1 + 420\alpha_4\alpha_2^2 - 2520\alpha_4\alpha_2\alpha_1^2 + 1680\alpha_4\alpha_1^4 + \\ &\quad + 560\alpha_3^2\alpha_1 - 1680\alpha_3\alpha_2\alpha_1^2 - 5040\alpha_3\alpha_2\alpha_1^3 + 13440\alpha_3\alpha_2\alpha_1^3 - 6720\alpha_3\alpha_1^5 - \\ &\quad - 630\alpha_2^4 + 10080\alpha_2^3\alpha_1^2 - 25200\alpha_2^2\alpha_1^4 + 20160\alpha_2\alpha_1^6 - 5040\alpha_1^8. \end{aligned}$$

Для распределения (5) находим начальные моменты:

$$\alpha_{s,1} = \begin{cases} a^s(p-q), & s - \text{нечетное,} \\ a^s, & s - \text{четное.} \end{cases}$$

Подставляя их в (8) и осуществляя преобразования, получаем формулы для нахождения кумулянтов смешивающего распределения $F_1(y)$:

$$\kappa_{1,1} = a(p-q); \quad \kappa_{2,1} = 4a^2 pq; \quad \kappa_{3,1} = 8a^3 pq(q-p); \quad \kappa_{4,1} = 16a^4 pq(1-6pq);$$

$$\kappa_{5,1} = 32a^5 pq(q-p)(1-12pq); \quad \kappa_{6,1} = 64a^6 pq(1-30pq+120p^2q^2);$$

$$\kappa_{7,1} = 128a^7 pq(q-p)(1-60pq+360p^2q^2);$$

$$\kappa_{8,1} = 256a^8 pq(1-126pq+1680p^2q^2-5040p^3q^3).$$

Поскольку $a > 0$, рассмотрим кумулянты смешивающего распределения как функцию от p и определим условия, при которых $\kappa_{s,1}(p) = 0$, $\kappa_{s,1}(p) < 0$ и $\kappa_{s,1}(p) > 0$. Уравнение $\kappa_{s,1}(p) = 0$ имеет s корней, которые обозначим $p_{s,k}$, где k — номер корня. При $p = q = 0,5$ распределение (5) является симметричным, все $\kappa_{s,1} = 0$, если s нечетное, а кумулянты четных порядков следующие: $\kappa_{2,1} = a^2$, $\kappa_{4,1} = -2a^4$, $\kappa_{6,1} = 16a^6$, $\kappa_{8,1} = -272a^8$. При $s \geq 2$ все кумулянты $\kappa_{s,1}(p) = 0$, если $p = 0$ или $p = 1$. Поэтому при $s \geq 2$ всегда $p_{s,1} = 0$, $p_{s,s} = 1$. Следовательно, при $s \geq 3$ нужно искать $r = s - 2$ корней уравнения $\kappa_{s,1}(p) = 0$, если s четное, и $r = s - 3$ корней, если s нечетное.

Кумулянт $\kappa_{1,1}(p) = a(p-q)$. Корень уравнения $\kappa_{1,1}(p) = 0$ есть $p_{1,1} = 0,5$. При $p = 0$ $\kappa_{1,1}(p) = -a$, при $p = 1$ $\kappa_{1,1}(p) = a$. Кумулянт $\kappa_{1,1}(p) < 0$, если $0 \leq p < 0,5$; $\kappa_{1,1}(p) > 0$ если $0,5 < p \leq 1$.

Кумулянт $\kappa_{2,1}(p) = 4a^2 pq > 0$ при всех $p \in (0; 1)$ и $\kappa_{2,1}(p) = 0$, если $p = 0$ или $p = 1$.

Кумулянт $\kappa_{3,1}(p) = 8a^3 pq(q-p)$. Корни уравнения $\kappa_{3,1}(p) = 0$ следующие: $p_{3,1} = 0$, $p_{3,2} = 0,5$, $p_{3,3} = 1$. Кумулянт $\kappa_{3,1}(p) > 0$, если $p \in (p_{3,1}; p_{3,2})$; $\kappa_{3,1}(p) < 0$, если $p \in (p_{3,2}; p_{3,3})$.

Кумулянт $\kappa_{4,1} = 16a^4 pq(1-6pq)$. Уравнение $\kappa_{4,1}(p) = 0$ имеет четыре корня, из них два известны: $p_{4,1} = 0$, $p_{4,4} = 1$. Решая уравнение $1-6pq = 1-6(p-p^2) = 1-6p+6p^2 = 0$, находим корни $p_{4,2}$ и $p_{4,3}$:

$$p_{4,2} = 0,5 - \frac{1}{\sqrt{12}} \approx 0,211325, \quad p_{4,3} = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{12}} \approx 0,788675.$$

Кумулянт $\kappa_{4,1}(p) > 0$, если $p \in (p_{4,1}; p_{4,2}) \cup (p_{4,3}; p_{4,4})$; $\kappa_{4,1}(p) < 0$, если $p \in (p_{4,2}; p_{4,3})$.

Кумулянт $\kappa_{5,1}(p) = 32a^5 pq(q-p)(1-12pq)$. Уравнение $\kappa_{5,1}(p) = 0$ имеет пять корней, из них три известны: $p_{5,1} = 0$, $p_{5,3} = 0,5$, $p_{5,5} = 1$. Находим корни $p_{5,2}$ и $p_{5,4}$, решая уравнение $1-12pq = 1-12p(1-p) = 1-12p+12p^2 = 0$:

$$p_{5,2} = 0,5 - \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0,091752, \quad p_{5,4} = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0,908248.$$

Кумулянт $\kappa_{5,1}(p) > 0$, если $p \in (p_{5,1}; p_{5,2}) \cup (p_{5,3}; p_{5,4})$; $\kappa_{5,1}(p) < 0$, если $p \in (p_{5,2}; p_{5,3}) \cup (p_{5,4}; p_{5,5})$.

Кумулянты $\kappa_{6,1}(p)$, $\kappa_{7,1}(p)$. В обоих случаях для нахождения неизвестных корней уравнения $\kappa_{s,1}(p) = 0$, $s = 6, 7$, необходимо решать уравнение четвертой степени вида

$$1-2Bpq + Ap^2q^2 = 1-2Bp(1-p) + Ap^2(1-p)^2 = 0. \quad (9)$$

Обозначая $z = pq = p - p^2$, получаем вместо (9) систему двух уравнений второй степени:

$$\begin{aligned} Az^2 - 2Bz + 1 &= 0, \\ p^2 - p + z &= 0, \end{aligned}$$

которая имеет следующее решение: $p_1 = 0,5 - \sqrt{0,25 - z_1}$, $p_2 = 0,5 - \sqrt{0,25 - z_2}$, $p_3 = 0,5 + \sqrt{0,25 - z_2}$, $p_4 = 0,5 + \sqrt{0,25 - z_1}$, где

$$z_1 = \frac{B - \sqrt{B^2 - A}}{A}, \quad z_2 = \frac{B + \sqrt{B^2 - A}}{A}.$$

Кумулянт $\kappa_{6,1}(p) = 64a^6 pq(1-30pq+120p^2q^2)$. Уравнение $\kappa_{6,1}(p) = 0$ имеет шесть корней, из них два известны: $p_{6,1} = 0$, $p_{6,6} = 1$. Оставшиеся четыре корня являются решением уравнения $1-30pq+120p^2q^2 = 0$:

$$\begin{aligned} p_{6,2} = p_1 &= 0,5 - \sqrt{0,25 - z_1}, \quad p_{6,3} = p_2 = 0,5 - \sqrt{0,25 - z_2}, \\ p_{6,4} = p_3 &= 0,5 + \sqrt{0,25 - z_2}, \quad p_{6,5} = p_4 = 0,5 + \sqrt{0,25 - z_1}, \end{aligned} \quad (10)$$

где z_1 и z_2 — корни уравнения $120z^2 - 30z + 1 = 0$,

$$z_1 = 0,125 - \sqrt{\frac{7}{960}} \approx 0,039609, \quad z_2 = 0,125 + \sqrt{\frac{7}{960}} \approx 0,210391.$$

Подставляя z_1 и z_2 в (10), получаем корни $p_{6,2}, p_{6,3}, p_{6,4}, p_{6,5}$ уравнения $\kappa_{6,1}(p)=0$:

$$p_{6,2} = 0,5 - \sqrt{0,125 + \sqrt{\frac{7}{960}}} \approx 0,041316, \quad p_{6,3} = 0,5 - \sqrt{0,125 - \sqrt{\frac{7}{960}}} \approx 0,300981,$$

$$p_{6,4} = 0,5 + \sqrt{0,125 - \sqrt{\frac{7}{960}}} \approx 0,699019, \quad p_{6,5} = 0,5 + \sqrt{0,125 + \sqrt{\frac{7}{960}}} \approx 0,958684.$$

Кумулянт $\kappa_{6,1}(p) > 0$, если $p \in (p_{6,1}; p_{6,2}) \cup (p_{6,3}; p_{6,4}) \cup (p_{6,5}; p_{6,6})$; $\kappa_{6,1}(p) < 0$, если $p \in (p_{6,2}; p_{6,3}) \cup (p_{6,4}; p_{6,5})$.

Кумулянт $\kappa_{7,1}(p) = 128a^7 pq(q-p)(1-60pq+360p^2q^2)$. Уравнение $\kappa_{7,1}(p)=0$ имеет семь корней, из них три известны: $p_{7,1}=0, p_{7,4}=0,5, p_{7,7}=1$. Оставшиеся четыре корня являются решением уравнения $1-60pq+360p^2q^2=0$:

$$p_{7,2} = p_1 = 0,5 - \sqrt{0,25 - z_1}, \quad p_{7,3} = p_2 = 0,5 - \sqrt{0,25 - z_2},$$

$$p_{7,5} = p_3 = 0,5 + \sqrt{0,25 - z_2}, \quad p_{7,6} = p_4 = 0,5 + \sqrt{0,25 - z_1},$$
(11)

где z_1 и z_2 — корни уравнения $360z^2 - 60z + 1 = 0$,

$$z_1 = \frac{1}{12} - \frac{1}{\sqrt{240}} \approx 0,018784, \quad z_2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{\sqrt{240}} \approx 0,147883.$$

Подставляя z_1 и z_2 в (11), получаем корни $p_{7,2}, p_{7,3}, p_{7,4}, p_{7,5}$ уравнения $\kappa_{7,1}(p)=0$:

$$p_{7,2} = 0,5 \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{15}}} \right) \approx 0,019151, \quad p_{7,3} = 0,5 \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{15}}} \right) \approx 0,180442,$$

$$p_{7,5} = 0,5 \left(1 + \sqrt{\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{15}}} \right) \approx 0,819558, \quad p_{7,6} = 0,5 \left(1 + \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{15}}} \right) \approx 0,980849.$$

Кумулянт $\kappa_{7,1}(p) > 0$, если $p \in (p_{7,1}; p_{7,2}) \cup (p_{7,3}; p_{7,4}) \cup (p_{7,5}; p_{7,6})$; $\kappa_{7,1}(p) < 0$, если $p \in (p_{7,2}; p_{7,3}) \cup (p_{7,4}; p_{7,5}) \cup (p_{7,6}; p_{7,7})$.

Кумулянт $\kappa_{8,1}(p) = 256a^8 pq(1-126pq+1680p^2q^2-5040p^3q^3)$. Уравнение $\kappa_{8,1}(p)=0$ имеет восемь корней, из них два известны: $p_{8,1}=0, p_{8,8}=1$. Оставшиеся шесть корней являются решением уравнения

$$1-126pq+1680p^2q^2-5040p^3q^3=0. \quad (12)$$

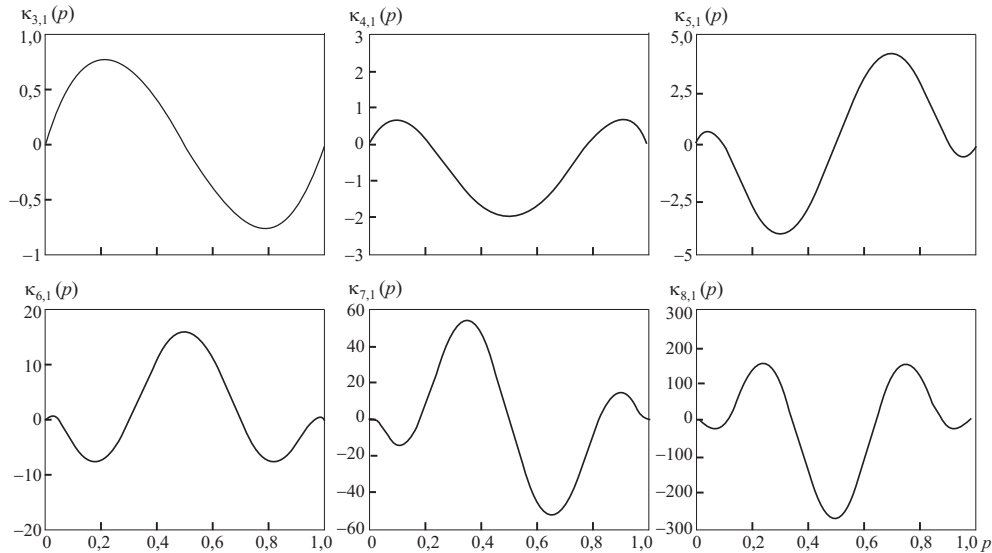


Рис. 1

Обозначая $z = pq = p - p^2$, переходим от уравнения (12) к системе уравнений

$$5040z^3 - 1680z^2 + 126z - 1 = 0,$$

$$p^2 - p + z = 0,$$

корни которой следующие:

$$\begin{aligned} p_1 &= 0,5 - \sqrt{0,25 - z_1}, \quad p_2 = 0,5 - \sqrt{0,25 - z_2}, \quad p_3 = 0,5 - \sqrt{0,25 - z_3}, \\ p_4 &= 0,5 + \sqrt{0,25 - z_3}, \quad p_5 = 0,5 + \sqrt{0,25 - z_2}, \quad p_6 = 0,5 + \sqrt{0,25 - z_1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Корни $z_k, k = \overline{1,3}$, уравнения $5040z^3 - 1680z^2 + 126z - 1 = 0$ получены численными методами: $z_1 \approx 0,00898$ и $z_2 \approx 0,09726$, $z_3 \approx 0,22709$. Подставляя z_1, z_2, z_3 в формулы (13), получаем корни уравнения (12): $p_{8,2} = p_1 \approx 0,00906$, $p_{8,3} = p_2 \approx 0,10918$, $p_{8,4} = p_3 \approx 0,34864$, $p_{8,5} = p_4 \approx 0,65136$, $p_{8,6} = p_5 \approx 0,89082$, $p_{8,7} = p_6 \approx 0,99094$.

Кумулянт $\kappa_{8,1}(p) > 0$, если $p \in (p_{8,1}; p_{8,2}) \cup (p_{8,3}; p_{8,4}) \cup (p_{8,5}; p_{8,6}) \cup (p_{8,7}; p_{8,8})$; $\kappa_{8,1}(p) < 0$, если $p \in (p_{8,2}; p_{8,3}) \cup (p_{8,4}; p_{8,5}) \cup (p_{8,6}; p_{8,7})$.

На рис. 1 приведены графики кумулянтов $\kappa_{s,1}(p), s = \overline{3,8}$, при $a = 1$.

Моделирование перфорированных случайных величин. Кумулянты $\kappa_{s,1}(p)$ в зависимости от значений p могут быть отрицательными, положительными или равными нулю. Поэтому несложно подобрать базовое

распределение $F_0(x)$, кумулянты $\kappa_{s,0}$ которого удовлетворяют условию (4). Это дает возможность моделировать широкий класс перфорированных случайных величин, используя смеси распределений (6) или (7).

Рассмотрим особенности моделирования непрерывных перфорированных случайных величин. Формула (7) позволяет моделировать плотность вероятностей $p_\xi(x)$ перфорированной случайной величины ξ , у которой математическое ожидание $\mathbf{M} \xi$ и дисперсия $\mathbf{D} \xi$ имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \xi &= m_\xi = \kappa_1 = \kappa_{1,0} + \kappa_{1,1} = \kappa_{1,0} + a(p-q), \\ \mathbf{D} \xi &= \sigma_\xi^2 = \kappa_2 = \kappa_{2,0} + \kappa_{2,1} = \kappa_{2,0} + 4a^2 pq. \end{aligned}$$

Для получения моделей плотности вероятностей $p_\eta(x)$ перфорированной случайной величины η с заданным математическим ожиданием $m_\eta = \mathbf{M} \eta$ и дисперсией $\sigma_\eta^2 = \mathbf{D} \eta$ осуществим линейное преобразование случайной величины ξ :

$$\eta = c + b\xi, \tag{14}$$

где $c \in (-\infty, \infty)$, $b > 0$. Определим значения параметров c и b . Из формулы (14) следует, что $m_\eta = c + b m_\xi$, $\sigma_\eta^2 = b^2 \sigma_\xi^2$, поэтому $b = \sigma_\eta / \sigma_\xi$, $c = m_\eta - m_\xi \sigma_\eta / \sigma_\xi$. Таким образом, $\eta = (\sigma_\eta / \sigma_\xi)(\xi - m_\xi) + m_\eta$, и плотности вероятностей $p_\eta(x)$ и $p_\xi(x)$ случайных величин η и ξ связаны между собой следующим выражением:

$$p_\eta(x) = \frac{1}{b} p_\xi\left(\frac{x-c}{b}\right) = \frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta} p_\xi\left[\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta}(x-m_\eta) + m_\xi\right]. \tag{15}$$

Подставляя (15) в формулу (7), получаем выражение для моделирования плотности вероятностей $p_\eta(x)$ перфорированной случайной величины η с заданными значениями m_η и σ_η^2 :

$$p_\eta(x) = \frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta} \left\{ qp_0 \left[\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta}(x-m_\eta) + m_\xi + a \right] + pp_0 \left[\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta}(x-m_\eta) + m_\xi - a \right] \right\}. \tag{16}$$

Пусть $m_\eta = 0$ и $\sigma_\eta = 1$. Тогда $\eta = \hat{\xi}$ — стандартизированная случайная величина:

$$\hat{\xi} = \frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi} = \frac{\xi_0 + \xi_1 - \kappa_{1,0} - a(p-q)}{(\kappa_{2,0} + 4a^2 pq)^{1/2}}. \tag{17}$$

На основании (16) плотность вероятностей $\tilde{p}(x)$ случайной величины (17) имеет вид

$$\tilde{p}(x) = \sigma_{\xi} p(\sigma_{\xi} x + m_{\xi}) = \sigma_{\xi} [qp_0(\sigma_{\xi} x + m_{\xi} + a) + pp_0(\sigma_{\xi} x + m_{\xi} - a)]. \quad (18)$$

Двухкомпонентные смеси сдвинутых гауссовых распределений.

Пусть ξ_0 — непрерывная случайная величина, имеющая стандартное гауссово распределение с плотностью вероятностей

$$p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5x^2}, \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (19)$$

Подставляя (19) в формулу (7), получаем плотность вероятностей двухкомпонентной смеси сдвинутых гауссовых распределений:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [q e^{-0,5(x+a)^2} + p e^{-0,5(x-a)^2}], \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (20)$$

Основные свойства плотности вероятностей (20) следующие: если $p \rightarrow 0$, то

$$p(x) \rightarrow p_0(x+a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5(x+a)^2},$$

если $q \rightarrow 0$, то

$$p(x) \rightarrow p_0(x-a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5(x-a)^2}.$$

Очевидно, что

$$p(-a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [q + p e^{-0,5(2a)^2}], \quad p(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [q e^{-0,5(2a)^2} + p].$$

Поэтому при $q > p$ справедливо неравенство $p(-a) > p(a)$ и распределение (20) асимметрично влево. Если $q < p$, то $p(-a) < p(a)$ и распределение (20) асимметрично вправо. При $p = q = 0,5$ распределение (20) симметрично. Если $a \leq 1$, то распределение (20) является одновершинным, а при $a > 1$ — двухвершинным [16].

У стандартной гауссовой случайной величины ξ_0 кумулянты $\kappa_{1,0} = 0$, $\kappa_{2,0} = 1$ и все $\kappa_{s,0} = 0$, если $s \geq 3$. Поэтому у случайной величины ξ с плотностью вероятностей (20) математическое ожидание m_{ξ} и дисперсия σ_{ξ}^2 имеют вид

$$m_{\xi} = \kappa_1 = \kappa_{1,0} + \kappa_{1,1} = a(p-q), \quad \sigma_{\xi}^2 = \kappa_2 = \kappa_{2,0} + \kappa_{2,1} = 1 + 4a^2 pq. \quad (21)$$

Кумулянты $\kappa_s(p)$, $s \geq 3$, случайной величины ξ с плотностью вероятностей (20) совпадают с кумулянтами $\kappa_{s,1}(p)$ смешивающего распределения: $\kappa_s(p) = \kappa_{s,1}(p)$, $s \geq 3$.

Таким образом, двухкомпонентная смесь сдвинутых гауссовых распределений (20) при любых $s \geq 3$ является моделью плотности вероятностей перфорированных случайных величин при выполнении условия

$$\kappa_s(p) = \kappa_{s,1}(p) = 0. \quad (22)$$

Заметим, что при $p \in (0; 1)$ уравнение (22) имеет $r = s - 2$ корней $p_{s,k}$. В частности, коэффициент эксцесса смеси (20), определяемый формулой

$$\gamma_4(p) = \frac{\kappa_4(p)}{\kappa_2^2(p)} = \frac{\kappa_{4,1}(p)}{(\kappa_{2,0} + \kappa_{2,1}(p))^2} = \frac{16a^4 pq(1-6pq)}{(1+4a^4 pq)^2},$$

при любых значениях параметра сдвига a равен нулю, если весовой коэффициент $p = p_{4,2} \approx 0,211325$ или $p = p_{4,3} \approx 0,788675$. Коэффициент $\gamma_4(p) > 0$ при всех значениях $p \in (0; p_{4,2}) \cup (p_{4,3}; 1)$, а при $p \in (p_{4,2}; p_{4,3})$ $\gamma_4(p) < 0$ (см. рис. 1, $\kappa_{4,1}(p)$).

Для моделирования стандартизированной случайной величины $\hat{\xi}$ используем формулу (17), подставляя в нее значения m_ξ и σ_ξ , определенные из (21):

$$\hat{\xi} = \frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi} = \frac{\xi_0 + \xi_1 - a(p-q)}{(1+4a^2 pq)^{1/2}}. \quad (23)$$

Используя (18), (19), получаем плотность вероятностей $\tilde{p}(x)$, стандартизированной случайной величины (23):

$$\tilde{p}(x) = \frac{\sigma_\xi}{\sqrt{2\pi}} [qe^{-0,5(\sigma_\xi x + m_\xi + a)^2} + pe^{-0,5(\sigma_\xi x + m_\xi - a)^2}], \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (24)$$

где $m_\xi = a(p-q)$; $\sigma_\xi = (1+4a^2 pq)^{1/2}$.

На рис. 2 сплошной линией представлены графики плотности вероятностей (24) с нулевым коэффициентом эксцесса ($p = p_{4,2} \approx 0,211325$) при различных значениях параметра сдвига a . Для сравнения штриховой линией представлены графики стандартизированной гауссовой плотности вероятностей (19).

Двухкомпонентные смеси сдвинутых негауссовых распределений.

Предположим, что у случайных величин ξ_0 и ξ_1 кумулянты $\kappa_{s,0} \neq 0$, $\kappa_{s,1}(p) \neq 0$. В этом случае уравнение (4) принимает следующий вид:

$$\kappa_s(p) = \kappa_{s,0} + \kappa_{s,1}(p) = 0. \quad (25)$$

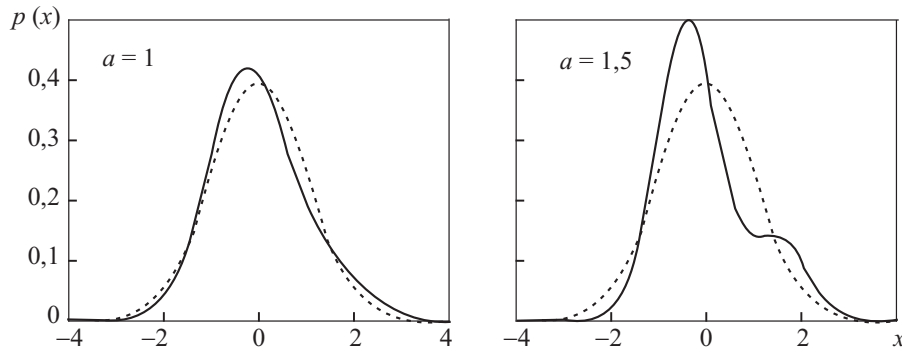


Рис. 2

Уравнение (25) всегда имеет решение, если у кумулянтов $\kappa_{s,0}$ и $\kappa_{s,1}(p)$ знаки различные. Однако в общем случае существуют проблемы аналитического решения уравнения (25), так как относительно переменной p оно является уравнением степени s . Этим проблем можно избежать, если рассматривать кумулянты смеси (6) как функцию двух переменных — весового коэффициента p и параметра сдвига a . Перепишем уравнение (25) в виде

$$\kappa_s(a, p) = \kappa_{s,0} + \kappa_{s,1}(a, p) = \kappa_{s,0} + a^s \kappa_{s,1}(1, p) = 0. \quad (26)$$

Решение уравнения (26) относительно параметра сдвига a имеет вид

$$a_s(p) = \left[-\frac{\kappa_{s,0}}{\kappa_{s,1}(1, p)} \right]^{1/s} \quad (27)$$

и определяет значения параметра сдвига, при которых $\kappa_s(a, p) = 0$.

Очевидно, что для любых $\kappa_{s,0}$ и $\kappa_{s,1}(1, p)$ существует бесконечное множество значений $a_s(p)$, которые можно получить, используя области положительных и отрицательных значений $\kappa_{s,1}(p)$, определенные выше (см. рис. 1). Например, если $\kappa_{4,0} > 0$, то решение $a_4(p)$ существует для $\kappa_{4,1}(1, p) < 0$, т.е. при всех $p \in (0,211325; 0,788675)$.

Пример. Пусть ξ_0 — непрерывная случайная величина, имеющая распределение Чампернауна [17] (см. таблицу). У случайной величины ξ_0 все

Плотность вероятностей	Центральные моменты
$p_0(x) = \frac{\beta}{\pi \operatorname{ch}(\beta x)},$ $x \in (-\infty, \infty), \beta > 0$	$\mu_{s,0} = \begin{cases} 0, & s - \text{нечетное,} \\ (\pi/2\beta)^s E_s , & s - \text{четное,} \end{cases}$ $E_s \text{ — числа Эйлера, } E_2 = -1, E_4 = 5, E_6 = -61, E_8 = 1385$

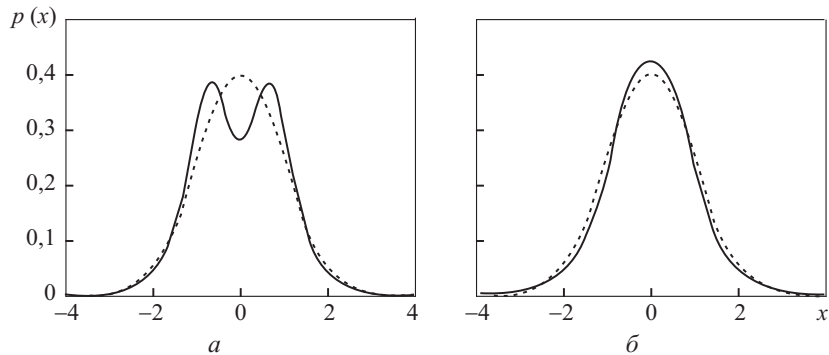


Рис. 3

кумулянты $\kappa_{s,0} = 0$, если s нечетное. Конкретизируем формулу (27). Для этого найдем $\kappa_{s,0}$ порядков $s = 2, 4, 6, 8$, используя формулы связи кумулянтов с центральными моментами [15]:

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= \mu_2, \quad \kappa_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2, \quad \kappa_6 = \mu_6 - 15\mu_4\mu_2 + 30\mu_2^3, \\ \kappa_8 &= \mu_8 - 28\mu_6\mu_2 - 35\mu_4^2 + 420\mu_4\mu_2^2 - 630\mu_2^4. \end{aligned} \quad (28)$$

Подставляя в (28) моменты $\mu_{s,0}$ из таблицы, находим: $\kappa_{2,0} = (\pi/2\beta)^2$, $\kappa_{4,0} = 2(\pi/2\beta)^4$, $\kappa_{6,0} = 16(\pi/2\beta)^6$, $\kappa_{8,0} = 272(\pi/2\beta)^8$.

Зададим $p = q = 0,5$. В этом случае у случайной величины ξ_1 все кумулянты $\kappa_{s,1} = 0$, если s нечетное, а $\kappa_{2,1} = a^2$, $\kappa_{4,1} = -2a^4$, $\kappa_{6,1} = 16a^6$, $\kappa_{8,1} = -272a^8$. Подставляя в (27) значения $\kappa_{s,0}$ и $\kappa_{s,1}$, находим что у смеси сдвинутых распределений Чампернауна при $p = q = 0,5$ одновременно равны нулю кумулянты $\kappa_4(a; 0,5)$ и $\kappa_8(a; 0,5)$, если $a = a_4(0,5) = a_8(0,5) = \pi / (2\beta)$.

Для моделирования стандартизированной случайной величины $\hat{\xi}$ по формуле (17) примем $\beta = \pi / 2$. Тогда $\kappa_{2,0} = 1$ и у случайной величины ξ при $p = q = 0,5$, $m_\xi = 0$, $\sigma_\xi^2 = 1 + a^2$, $a_4(0,5) = a_8(0,5) = 1$. Подставляя в (17) значения m_ξ и σ_ξ , получаем

$$\hat{\xi} = \frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi} = \frac{\xi_0 + \xi_1}{(1 + a^2)^{1/2}}. \quad (29)$$

Используя формулу (18) и плотность вероятностей $p_0(x)$, приведенную в таблице, получаем плотность вероятностей $\tilde{p}(x)$ стандартизированной случайной величины (29):

$$\tilde{p}(x) = \frac{\sigma_\xi}{4} \left(\frac{1}{\operatorname{ch}[0,5\pi(\sigma_\xi x + a)]} + \frac{1}{\operatorname{ch}[0,5\pi(\sigma_\xi x - a)]} \right), \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (30)$$

где $\sigma_{\xi} = (1+a^2)^{1/2}$. На рис. 3, a и b сплошной линией представлены графики плотности вероятностей (30) соответственно при $a = a_4(0,5) = a_8(0,5) = 1$ и $a = 0,5$, а штриховой линией — графики стандартизированной гауссовой плотности вероятностей (19).

Выводы

Использование семейства двухкомпонентных смесей сдвинутых распределений позволяет осуществлять математическое и компьютерное моделирование широкого класса перфорированных случайных величин, у которых равны нулю кумулянты κ_s любых порядков s . Если кумулянты базового и смешивающего распределений не равны нулю, то существует бесконечное множество значений параметра сдвига $a_s(p)$, при котором кумулянт κ_s смеси равен нулю и, как следствие, существует бесконечное множество моделей перфорированных распределений для одного и того же порядка s .

Двухкомпонентные смеси сдвинутых гауссовых распределений, плотность вероятностей которых может быть как одновершинной, так и двухвершинной, позволяют моделировать перфорированные случайные величины, для которых решение уравнения $\kappa_s(p) = 0$ не зависит от параметра сдвига. Двухкомпонентные смеси сдвинутых распределений Чампернауна позволяют моделировать перфорированные случайные величины, у которых при значении параметра сдвига $a = 1$ равны нулю кумулянты $\kappa_3, \kappa_4, \kappa_5, \kappa_7, \kappa_8, \kappa_9$ и все кумулянты κ_s нечетных порядков $s \geq 11$, а при $a \neq 1$ — все кумулянты κ_s нечетных порядков.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. М.: Сов. радио, 1978, 376 с.
2. Кунченко Ю.П. Полиномиальные оценки параметров близких к гауссовским случайных величин. Ч. I. Стохастические полиномы, их свойства и применения для нахождения оценок параметров. Черкассы: ЧИТИ, 2001, 133 с.
3. Alexandrou D., De Moustier C., Haralabus G. Evaluation and verification of bottom acoustic reverberation statistics predicted by the point scattering model // J. Acoust. Soc. Am. 1992, Vol. 91, No. 3, p. 1403—1413.
4. Wang H., Chen P. Fault Diagnosis Method Based on Kurtosis Wave and Information Divergence for Rolling Element Bearings // WSEAS Transactions on Systems. 2009, Vol. 8, Issue 10, p. 1155—1165.
5. Кузнецов Б.Ф., Бородкин Д.К., Лебедева Л.В. Кумулянтные модели дополнительных погрешностей // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2013, № 1 (37), с. 134—138.
6. Берегун В.С., Красильников О.І. Дослідження чутливості коефіцієнта ексцесу діагностичних сигналів для контролю стану електротехнічного обладнання // Технічна електродинаміка. 2017, № 4, с. 79—85.

7. Кунченко Ю.П., Заболотний С.В., Коваль В.В., Чепинога А.В. Моделирование эксцесных випадкових величин із заданим кумулянтним описом на основі бігаусового розподілу // Вісник ЧДТУ. 2005, № 1, с. 38—42.
8. Заболотний С.В., Чепинога А.В. Тетрагаусові симетрично-розподілені імовірнісні моделі на основі моментного опису // Зб. наук. праць ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова НАН України. 2008, № 47, с. 92—99.
9. Чепинога А.В. Области реалізації бігаусових моделей асиметрично-ексцесних випадкових величин з перфорованим моментно-кумулянтним описом // Вісник ЧДТУ. 2010, № 2, с. 91—95.
10. Krasil'nikov A.I. Class non-Gaussian distributions with zero skewness and kurtosis // *Radioelectronics and Communications Systems*. 2013, Vol. 56, No 6, p. 312—320.
11. Красильников А.И. Класс негауссовских симметричных распределений с нулевым коэффициентом эксцесса // *Электрон. моделирование*. 2017, **39**, № 1, с. 3—17.
12. Красильников А.И. Модели несимметричных распределений случайных величин с нулевым коэффициентом асимметрии // Там же. 2016, **38**, № 1, с. 19—33.
13. Красильников А.И. Моделирование перфорированных случайных величин на основе смесей сдвинутых распределений // Там же. 2018, **40**, № 1, с. 47—61.
14. Красильников А.И. Применение смесей сдвинутых распределений с равномерным распределением величины сдвига для моделирования перфорированных случайных величин // Там же. 2018, **40**, № 4, с. 3—18.
15. Кендалл М., Стьюарт А. Теория распределений/Пер. с англ. В.В. Сазонова, А.Н. Ширяева, под ред. А.Н. Колмогорова. М.: Наука, 1966, 588 с.
16. Апрашова Н.Н., Сорокин С.В. Об унимодальности простейшей гауссовой смеси // *Журнал вычислительной математики и физики*. 2004, **44**, № 5, с. 831—839.
17. Вадзинский Р.Н. Справочник по вероятностным распределениям. СПб.: Наука, 2001, 295 с.

Получена 09.10.18

REFERENCES

1. Malakhov, A.N. (1978), *Kumuliantnyi analiz sluchainykh negaussovykh protsessov i ikh preobrazovaniy* [Cumulant Analysis of Random Non-Gaussian Processes and their Transformations], Sov. radio, Moscow, Russia.
2. Kunchenko, Yu.P. (2001), *Polynomialnye otsenki parametrov blizkikh k gaussovskim sluchainykh velichin. Ch. I. Stokhasticheskie polinomy, ikh svoystva i primeneniye dlia nakhozhdeniia otsenok parametrov* [Parameter Polynomial Estimators of Random Variables Close to Gaussian. Part I. Stochastic Polynomials, their Properties and Application for Finding of Parameter Estimators], ChITI, Cherkassy, Ukraine.
3. Alexandrou, D., De Moustier, C. and Haralabus, G. (1992), "Evaluation and verification of bottom acoustic reverberation statistics predicted by the point scattering model", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 91, no. 3, pp. 1403-1413.
4. Wang, H. and Chen, P. (2009), "Fault Diagnosis Method Based on Kurtosis Wave and Information Divergence for Rolling Element Bearings", *WSEAS Transactions on Systems*, Vol. 8, Issue 10, pp. 1155-1165.
5. Kuznetsov, B.F., Borodkin, D.K. and Lebedeva, L.V. (2013), "Cumulant models of additional errors", *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie*, no. 1 (37), pp. 134-138.
6. Beregun, V.S., and Krasilnikov, A.I. (2017), "Research of excess kurtosis sensitiveness of diagnostic signals for control of the condition of the electrotechnical equipment", *Tekhnichna elektrodynamika*, no. 4, pp. 79-85.

7. Kunchenko, Yu.P., Zabolotnii, S.V., Koval V.V. and Chepynoha, A.V. (2005), "Simulation of excess random variables with a given cumulative description on the basis of the bigaussian distribution", *Visnyk ChDTU*, no. 1, pp. 38-42.
8. Zabolotnii, S.V. and Chepynoha, A.V. (2008), "Tetragaussian symmetrically distributed probabilistic models on the basis of a moment description", *Zb. nauk. prats IPME im. H.Ye. Pukhova NAN Ukrainy*, no. 47, pp. 92-99.
9. Chepynoha, A.V. (2010), "Areas of realization of bigauss models of asymmetric-excess random variables with a perforated moment-cumulant description", *Visnyk ChDTU*, no. 2, pp. 91-95.
10. Krasil'nikov, A.I. (2013), "Class non-Gaussian distributions with zero skewness and kurtosis", *Radioelectronics and Communications Systems*, Vol. 56, no. 6, pp. 312-320.
11. Krasilnikov, A.I. (2017), "Class of non-Gaussian symmetric distributions with zero coefficient of kurtosis", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 39, no. 1, pp. 3-17.
12. Krasilnikov, A.I. (2016), "Models of asymmetrical distributions of random variables with zero asymmetry coefficient", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 38, no. 1, pp. 19-33.
13. Krasilnikov, A.I. (2018), "Modeling of perforated random variables on the basis of a mixture of shifted distributions", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 40, no. 1, pp 47-61.
14. Krasilnikov, A.I. (2018), "The application of mixtures of shifted distributions with a uniform distribution of the shift value for modeling perforated random variables", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 40, no. 4, pp 3-18.
15. Kendall, M. and Stuart, A. (1966), *Teoriia raspredelenii* [Distribution Theory], Translated by Sazonov, V.V., Shiriaev, A.N. and Kolmogorov, A.N. (Ed.), Nauka, Moscow, Russia.
16. Aprausheva, N.N. and Sorokin, S.V. (2004), "On the unimodality of the simplest Gaussian mixture", *Zhurnal vychislitelnoi matematiki i fiziki*, Vol. 44, no. 5, pp. 831-839.
17. Vadzinskii, R.N. (2001), *Spravochnik po veroiatnostnym raspredeleniim* [Reference Book on Probabilistic Distributions], Nauka, St. Petersburg, Russia.

Received 09.10.18

О.І. Красильніков

ЗАСТОСУВАННЯ ДВОКОМПОНЕНТНИХ СУМІШЕЙ ЗСУНУТИХ РОЗПОДІЛІВ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРФОРОВАНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Показано, що використання двоконпонентних сумішей зсунутих розподілів дозволяє моделювати широкий клас випадкових величин, у яких дорівнюють нулю кумулянти κ_s будь-яких порядків s . Проаналізовано властивості кумулянтів сумішей зсунутих розподілів. Побудовано моделі перфорованих випадкових величин на основі суміші зсунутих гауссових розподілів та суміші розподілів Чампернауна.

Ключові слова: кумулянтні коефіцієнти, моментно-кумулянтні моделі, кумулянтний аналіз, перфоровані розподіли, суміші розподілів.

A.I. Krasilnikov

THE APPLICATION OF TWO-COMPONENT MIXTURES OF SHIFTED DISTRIBUTIONS FOR MODELING PERFORATED RANDOM VARIABLES

It is shown that the usage of two-component mixtures of shifted distributions allows to simulate a wide class of random variables for which the cumulants κ_s of any order s are equal to zero. The properties of cumulants of mixtures of shifted distributions are analyzed. The models of perforated random variables on the basis of a mixture of shifted Gaussian distributions and a mixture of the distributions of Champernaun are constructed.

Key words: cumulant coefficients, moment-cumulant models, cumulant analysis, perforated distributions, mixtures of distributions.

КРАСИЛЬНИКОВ Александр Иванович, канд. физ.-мат. наук, доцент, вед. науч. сотр. Ин-та технической теплофизики НАН Украины. В 1973 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — математические модели, вероятностные характеристики и методы статистической обработки флуктуационных сигналов в системах шумовой диагностики.