doi

519.213:621.391

А.И. Красильников, канд. физ.-мат. наук
Институт технической теплофизики НАН Украины
(Украина, 03057, Киев, ул. Желябова, 2а,
тел. (044) 4532857, e-mail: tangorov@ukr.net)

Семейство распределений Субботина и его классификация

Исследованы свойства плотности вероятностей, ее параметры, центральные моменты и кумулянтные коэффициенты семейства распределений Субботина. На основании свойств производной плотности вероятностей и кумулянтных коэффициентов предложена классификация семейства распределений Субботина и установлены критерии выбора плотности вероятностей для аппроксимации распределений негауссовых случайных величин.

К л ю ч е в ы е с л о в а: семейство распределений Субботина, обобщенное гауссово распределение, обобщенное нормальное распределение, распределение ошибок.

Решение задач статистической обработки в большинстве случаев основано на предположении о гауссовом распределении исследуемых данных, что дает возможность использовать на практике классические результаты математической статистики [1, 2]. Применимость гауссовой модели в приложениях обычно обосновывается центральной предельной теоремой, однако эта теорема справедлива лишь при условиях Линдеберга [1], которые во многих практических задачах не выполняются. Кроме того, центральная предельная теорема является асимптотической, поэтому «часто можно подобрать весьма простые (и более точные, чем нормальные!) аппроксимации для распределения суммы небольшого конечного числа случайных слагаемых» [2, с. 245].

Плотность вероятностей одной из негауссовых моделей аппроксимации закона распределения ошибок обоснована в 1923 г. М.Т. Субботиным [3]:

$$p(x) = p(x; c) = \frac{\beta c}{2\Gamma(1/c)} e^{-|\beta x|^c}, \;\; x \in (-\infty, \infty), \qquad (1)$$

где $\beta > 0$ — параметр масштаба; $c > 0$ — параметр формы; $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Плотность вероятностей (1) описывает семейство распределений, поскольку в зависимости от значений параметра формы она определяет различные типы распределений, в частности распределение Лапласа ($c = 1$) и гауссово распределение ($c = 2$). В литературе [4—16] приводятся различные формы плотности вероятностей (1) под разными названиями: обобщенное нормальное распределение (generalized normal distribution), обобщенное гауссово распределение (generalized Gaussian distribution), распределение ошибок (error distribution), обобщенное распределение ошибок (general error distribution), экспоненциальное степенное распределение (exponential power distribution) и др.

Следуя сложившейся в теории вероятностей традиции называть распределения по имени ученого, который впервые ввел эти распределения и рассмотрел их свойства (распределения Лапласа, Стьюдента, Коши, Парето и др.), будем называть распределения с плотностью вероятностей (1) семейством распределений Субботина. Семейство распределений (1) применяется в качестве моделей распределения погрешностей измерительных приборов и результатов измерений [5], мгновенных значений хаотических импульсных помех [6], биомедицинских [7], видео [8] и аудио [9] сигналов.

Вероятностные характеристики семейства распределений (1) исследованы в [9—14]. В работах [9, 10] получены формулы для нахождения центральных моментов, приведены их асимптотические свойства и исследовано отношение абсолютного центрального момента первого порядка к среднеквадратическому отклонению. В работе [11] получена характеристическая функция распределений (1) в виде ряда Тейлора, в [9, 12] приведена плотность вероятностей (1) при $c \to \infty$, а в работе [10] — при $c \to 0$.

В работах [9, 10, 12, 13] исследованы оценки параметров распределения (1), полученные методом моментов и максимального правдоподобия, а в работе [14] — методом максимизации полинома. В работах [9, 15, 16] обоснованы методы и алгоритмы моделирования случайных величин с плотностью вероятностей (1).

Анализ работ [5—16] свидетельствует о том, что для дальнейшего применения семейства распределений Субботина в приложениях актуальными остаются задачи исследования свойств его плотности вероятностей и кумулянтных коэффициентов. Рассмотрим решение этих задач.

Анализ плотности вероятностей. Плотность вероятностей (1) непрерывная и при $x = 0$ имеет максимум, равный нормирующему множителю:

$$A(c) = p(0; c) = \frac{\beta c}{2\Gamma(1/c)} = \frac{\beta}{2(1/c)\Gamma(1/c)} = \frac{\beta}{2\Gamma(1+1/c)}. \quad (2)$$

Исследуем свойства плотности вероятностей (1) в точке $x=0$. Для этого найдем ее односторонние производные $p'_-(x)$ и $p'_+(x)$ слева и справа от точки $x=0$:

$$p'_-(x)=A(c)\,c\beta^c(-x)^{c-1}e^{-(-\beta x)^c},\ \ x<0,$$
$$p'_+(x)=-A(c)\,c\beta^c x^{c-1}e^{-(\beta x)^c},\ \ x>0. \tag{3}$$

Из формулы (3) следует, что если $x\neq 0$, то при любых значениях параметра c производные $p'_-(x)$ и $p'_+(x)$ — непрерывные функции, $p'_-(x)>0$, $p'_+(x)<0$. Проанализируем производные $p'_-(x)$, $p'_+(x)$ в точке $x=0$. Обозначим 0– значение x слева от точки $x=0$, а 0+ — значение справа от точки $x=0$.

Пусть $0 < c \le 1$. Если $c = 1$, то

$$\lim_{x\to 0-} p'_-(x)=A(c)\beta>0,\ \lim_{x\to 0+} p'_+(x)=-A(c)\beta<0\ .$$

При любых $0<c<1$

$$\lim_{x\to 0-} p'_-(x)=+\infty,\ \lim_{x\to 0+} p'_+(x)=-\infty.$$

Следовательно, при $0<c\le 1$ производная плотности вероятностей существует и непрерывна при всех значениях x, за исключением точки $x=0$, в которой производная $p'(x)$ при $c=1$ имеет разрыв первого рода, а при $c<1$ — разрыв второго рода. Таким образом, при $0<c\le 1$ точка $x=0$ является угловой точкой плотности вероятностей (1).

Пусть $c>1$. В этом случае

$$\lim_{x\to 0-} p'_-(x)=\lim_{x\to 0+} p'_+(x)=0,$$

поэтому существует предел

$$p'(0)=\lim_{x\to 0} p'(x)=\lim_{x\to 0-} p'_-(x)=\lim_{x\to 0+} p'_+(x)=0.$$

Следовательно, при $c>1$ производная $p'(x)$ существует и непрерывна при всех значениях x, включая точку $x=0$, следовательно, плотность вероятностей (1) — гладкая функция и имеет гладкую вершину.

На основании проведенного анализа все плотности вероятностей (1) семейства распределений Субботина можно разделить на два класса: распределения класса 1 ($0<c\le 1$), у которых вершина плотности вероятностей — угловая точка, и распределения класса 2 ($c>1$), у которых вершина плотности вероятностей — гладкая. Для дальнейшего анализа воспользуемся следующими свойствами гамма-функции [17]:

$$x\Gamma(x) = \Gamma(1+x),\ x>0;\ \Gamma(n) = (n-1)!,\ n = 1, 2, 3, \ldots;$$

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1;\ \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi};\ \Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2;$$

$$\Gamma(n+1/2) = 1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-3)(2n-1)\sqrt{\pi}/2^n,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Проанализируем зависимость нормирующего множителя $A(c)$ от параметра c, используя (2).

Пусть $0 < c \le 1$. При $c = 1$ из (2) получаем

$$A(1) = 0{,}5\beta/\Gamma(1) = 0{,}5\beta/\Gamma(2) = 0{,}5\beta.$$

Пусть $0 < c < 1$ и $1/c = n$ — целое число. Тогда формула (2) принимает следующий вид:

$$A(n) = 0{,}5\beta/\Gamma(1+n) = 0{,}5\beta/n!\,. \tag{4}$$

При $c \to 0$ из (4) получаем $\lim\limits_{c\to 0} A(c) = \lim\limits_{n\to\infty} A(n) = 0$. Следовательно, при $0 < c \le 1$ нормирующий множитель $0 < A(c) \le 0{,}5\beta$.

Пусть $c > 1$. Из формулы (2) находим пределы: $\lim\limits_{c\to 1+} A(c) = \lim\limits_{n\to\infty} A(c) = 0{,}5\beta$. Гамма-функция $\Gamma(x)$ на интервале $1 \le x \le 2$ имеет минимальное значение $\min\Gamma(x) = 0{,}8856$ при $x = 1{,}4616$ [17]. Поэтому $A(c)$ принимает максимальное значение $\max A(c) = 0{,}5646\beta$ при $c = 2{,}1664$. Следовательно, при $c > 1$ получаем $0{,}5\beta < A(c) \le 0{,}5646\beta$.

Найдем плотность вероятностей $p(x;c)$ при $c \to \infty$:

$$p(x;\infty) = \lim_{c\to\infty} p(x;c) = \lim_{c\to\infty} A(c)\, e^{-|\beta x|^c} =$$

$$= \lim_{c\to\infty} A(c) \lim_{c\to\infty} e^{-|\beta x|^c} = \begin{cases} \dfrac{\beta}{2},\ |x| < 1/\beta, \\ \dfrac{\beta}{2e},\ |x| = 1/\beta, \\ 0,\ |x| > 1/\beta. \end{cases} \tag{5}$$

Из (5) следует, что при $c \to \infty$ плотность вероятностей (1) стремится к прямоугольному распределению на интервале $(-1/\beta; 1/\beta]$. На рис. 1, *а*, пред-

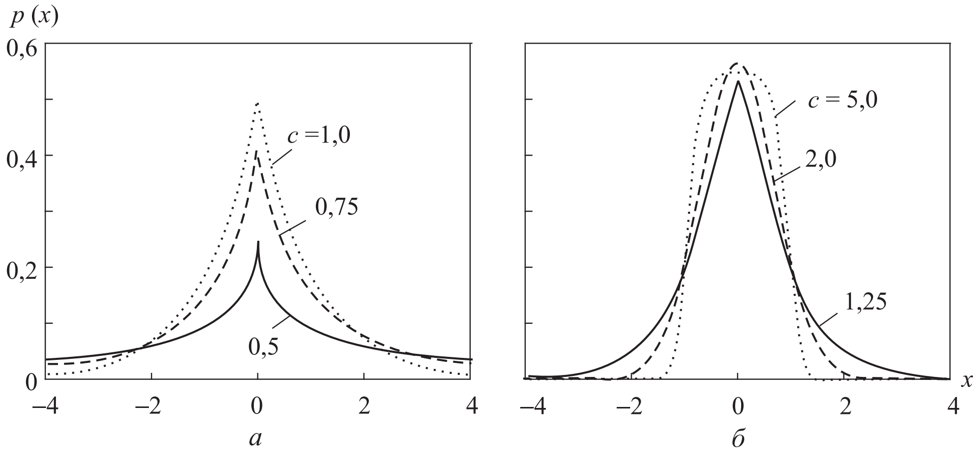

Рис. 1

ставлены графики плотности вероятностей (1) распределений класса 1, а на рис 1, *б*, — распределений класса 2 при $\beta=1$.

Центральные моменты. Плотности вероятностей семейства распределений Субботина являются четными функциями. Из этого следует, что его начальные моменты $\alpha_s(c)$ совпадают с центральными моментами $\mu_s(c)$, которые для нечетных порядков s равны нулю. Найдем центральные моменты $\mu_s(c)$ четных порядков:

$$\mu_s(c)=\int_{-\infty}^{\infty} x^s\, p(x;c)dx=\frac{\beta c}{2\Gamma(1/c)}\int_{-\infty}^{\infty} x^s e^{-|\beta x|^c}dx=\frac{\beta c}{\Gamma(1/c)}\int_{0}^{\infty} x^s e^{-(\beta x)^c}dx. \tag{6}$$

Используя табличный интеграл [18, с. 200], из (6) получаем

$$\mu_s(c)=\frac{\Gamma\,[(s+1)/c]}{\beta^s\Gamma\,(1/c)}=\frac{(1/c)\,\Gamma\,[1+(s+1)/c]}{\beta^s[(s+1)/c]\,\Gamma\,(1+1/c)}=\frac{\Gamma\,[1+(s+1)/c]}{\beta^s(s+1)\,\Gamma\,(1+1/c)},\ s=2,4,\dots . \tag{7}$$

Проанализируем зависимость моментов (7) от параметра формы c. Пусть $0<c\le 1$. При $c=1$ из формулы (7) получаем $\mu_s(1)=\Gamma\,(s+1)/\beta^s\Gamma\,(1)=$ $=s!/\beta^s$. Пусть $0<c<1$ и $1/c=n$ — целое число. Тогда $n\,(s+1)$ — целое и формула (7) принимает следующий вид:

$$\mu_s(n)=\frac{\Gamma\,[1+n\,(s+1)]}{\beta^s(s+1)\,\Gamma\,(1+n)}=\frac{[n\,(s+1)]!}{\beta^s(s+1)\,n!}=\frac{1}{\beta^s(s+1)}\prod_{k=1}^{sn}(n+k). \tag{8}$$

Из формулы (8) следует, что при $c \to 0$, $\mu_s(0) = \lim\limits_{c\to 0}\mu_s(c) = \lim\limits_{n\to\infty}\mu_s(n) = \infty$.

Пусть $c > 1$. При $c \to 1$, $\mu_s(1+) = \lim\limits_{c\to 1+}\mu_s(c) = \mu_s(1) = s!/\beta^s$, при $c = 2$ получаем известную формулу для нахождения центральных моментов гауссова распределения:

$$\mu_s(2) = \frac{\Gamma(s/2+1/2]}{\beta^s\Gamma(1/2)} = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \dots (s-3)(s-1)\sqrt{\pi}/2^{s/2}}{\beta^s\sqrt{\pi}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \dots (s-3)(s-1)}{2^{s/2}\beta^s}. \quad (9)$$

При $c \to \infty$ из формулы (7) получаем

$$\mu_s(\infty) = \lim_{c\to\infty}\mu_s(c) = \lim_{c\to\infty}\frac{\Gamma[1+(s+1)/c]}{\beta^s(s+1)\Gamma(1+1/c)} = \frac{\Gamma(1)}{\beta^s(s+1)\Gamma(1)} = \frac{1}{\beta^s(s+1)}. \quad (10)$$

Из (10) следует, что моменты $\mu_s(\infty)$ совпадают с центральными моментами равномерного распределения на интервале $(-1/\beta; 1/\beta]$. Таким образом, при любых значениях $c > 0$ центральные моменты $\mu_s(c)$ всех порядков s существуют и являются непрерывными монотонно убывающими функциями, ограниченными значением $\mu_s(\infty) = 1/[\beta^s(s+1)]$.

Кумулянтные коэффициенты. При анализе негауссовых распределений важное значение имеют кумулянтные коэффициенты

$$\gamma_s(c) = \frac{\kappa_s(c)}{\kappa_2^{s/2}(c)}. \quad (11)$$

Здесь $\kappa_s(c)$ — кумулянты распределений,

$$\kappa_s(c) = \left.\frac{d^s \ln f(u;c)}{i^s d\, u^s}\right|_{u=0}, \quad (12)$$

где $f(u;c)$ — характеристическая функция; $i = \sqrt{-1}$; $s = 1, 2, \dots$ — порядок кумулянтов и кумулянтных коэффициентов; $\kappa_2(c) = \mu_2(c)$.

Плотности вероятностей семейства распределений Субботина являются четными функциями, поэтому все кумулянты $\kappa_s(c)$ и кумулянтные коэффициенты $\gamma_s(c)$ нечетных порядков s равны нулю. Характеристическая функция и кумулянты семейства (1) известны лишь для двух частных случаев: при $c = 1$ и при $c = 2$. Для гауссова распределения ($c = 2$) все коэффициенты $\gamma_s(2) = 0$ при $s \ge 3$. Для распределения Лапласа ($c = 1$) коэффициенты $\gamma_s(1) = (s-1)!/2^{s/2-1}$, $s = 2, 4, \dots$ [4], в частности $\gamma_4(1) = 3$, $\gamma_6(1) = 30$, $\gamma_8(1) = 630$.

В общем случае получить характеристическую функцию семейства распределений Субботина в замкнутом виде не представляется возможным [11], поэтому для нахождения коэффициентов $\gamma_s(c)$ вместо выражений (11) и (12) используем формулы [1, с. 106], выражающие кумулянты через центральные моменты, и формулы (7), (11). Ограничиваясь рассмотрением коэффициентов $\gamma_s(c)$ порядков $s=4,6,8,$ получаем

$$\begin{gathered}\gamma_4(c)=M_4(c)-3,\ \gamma_6(c)=M_6(c)-15M_4(c)+30,\\ \gamma_8(c)=M_8(c)-28M_6(c)-35M_4^2(c)+420M_4(c)-630,\end{gathered} \tag{13}$$

где $M_s(c)$ — нормированные центральные моменты,

$$M_s(c)=\frac{\mu_s(c)}{\mu_2^{s/2}(c)}=\frac{\Gamma\,[(s+1)/c]\,[\Gamma\,(1/c)]^{s/2-1}}{[\Gamma\,(3/c)]^{s/2}}=$$

$$=\frac{3^{s/2}\Gamma\,[1+(s+1)/c]\,[\Gamma\,(1+1/c)]^{s/2-1}}{(s+1)\,[\Gamma\,(1+3/c)]^{s/2}}. \tag{14}$$

Проанализируем зависимость моментов (14) от параметра формы c. При $c=1$ используем формулу $\mu_s(1)=s!/\beta^s$ и получаем $M_s(1)=s!/2^{s/2}$. При $c=2$, используя формулу (9), находим $M_s(2)=1\cdot3\cdot5\ldots(s-3)(s-1).$

Пусть $c\to\infty$. Тогда из (14) получаем

$$M_s(\infty)=\lim_{c\to\infty}M_s(c)=\lim_{c\to\infty}\frac{3^{s/2}}{s+1}\frac{\Gamma\,[1+(s+1)/c]\,[\Gamma\,(1+1/c)]^{s/2-1}}{[\Gamma\,(1+3/c)]^{s/2}}=\frac{3^{s/2}}{s+1}. \tag{15}$$

Пусть $0<c<1$ и $1/c=n$ — целое число. Найдем предел $\lim\limits_{c\to0}M_s(c).$ Используя (8), приведем формулу (14) к виду

$$M_s(n)=\frac{\mu_s(n)}{\mu_2^{s/2}(n)}=\frac{3^{s/2}}{(s+1)}\frac{\prod\limits_{k=1}^{sn}(n+k)}{\left[\prod\limits_{k=1}^{2n}(n+k)\right]^{s/2}}. \tag{16}$$

Преобразуем числитель выражения (16):

$$\prod_{k=1}^{sn}(n+k)=\prod_{k=1}^{2n}(n+k)\,(3n+k)\,(5n+k)\ldots[(s-1)\,n+k]. \tag{17}$$

С учетом (17) формула (16) принимает следующий вид:

$$M_s(n)=\frac{3^{s/2}}{(s+1)}\prod_{k=1}^{2n}\frac{(n+k)(3n+k)(5n+k)\dots[(s-1)\,n+k]}{(n+k)^{s/2}}. \tag{18}$$

Учитывая, что в числителе выражения (18) под знаком произведения содержится $s/2$ сомножителей, находим пределы:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+k)(3n+k)(5n+k)\dots[(s-1)\,n+k]}{(n+k)^{s/2}}=1\cdot3\cdot5\dots(s-1),$$

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{2n}\frac{(n+k)(3n+k)(5n+k)\dots[(s-1)\,n+k]}{(n+k)^{s/2}}=\lim_{n\to\infty}[1\cdot3\cdot5\dots(s-1)]^{2n}=\infty. \tag{19}$$

Из (18) и (19) находим предел

$$M_s(0)=\lim_{c\to0}M_s(c)=\lim_{n\to\infty}M_s(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{s/2}}{(s+1)}[1\cdot3\cdot5\dots(s-1)]^{2n}=\infty.$$

Используя формулы (13) и (15), (18), (19), проанализируем асимптотические свойства кумулянтных коэффициентов $\gamma_s(c)$, $s=4,6,8$. При $c\to\infty$ находим

$$\gamma_4(0)=\lim_{c\to0}\gamma_4(c)=\lim_{n\to\infty}\gamma_4(n)=\lim_{n\to\infty}[M_4(n)-3]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{5}3^{2n}-3\right]=\infty,$$

$$\gamma_6(0)=\lim_{c\to0}\gamma_6(c)=\lim_{n\to\infty}\gamma_6(n)=\lim_{n\to\infty}[M_6(n)-15M_4(n)+30]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{27}{7}(3\cdot5)^{2n}-15\,\frac{9}{5}3^{2n}+30\right]=\lim_{n\to\infty}(3\cdot5)^{2n}\left[\frac{27}{7}-\frac{27}{5^{2n}}+\frac{30}{(3\cdot5)^{2n}}\right]=\infty,$$

$$\gamma_8(0)=\lim_{c\to0}\gamma_8(c)=\lim_{n\to\infty}\gamma_8(n)=\lim_{n\to\infty}[M_8(n)-28M_6(n)-$$

$$-35M_4^2(n)+\ 420M_4(n)-630]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{81}{9}(3\cdot5\cdot7)^{2n}-28\frac{27}{7}(3\cdot5)^{2n}-35\left(\frac{9}{5}\right)^2 3^{4n}+420\frac{9}{5}3^{2n}-630\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(3\cdot5\cdot7)^{2n}\left[9-\frac{108}{7^{2n}}-\frac{567}{5}\left(\frac{3}{5\cdot7}\right)^{2n}+\frac{756}{(5\cdot7)^{2n}}-\frac{630}{(3\cdot5\cdot7)^{2n}}\right]=\infty.$$

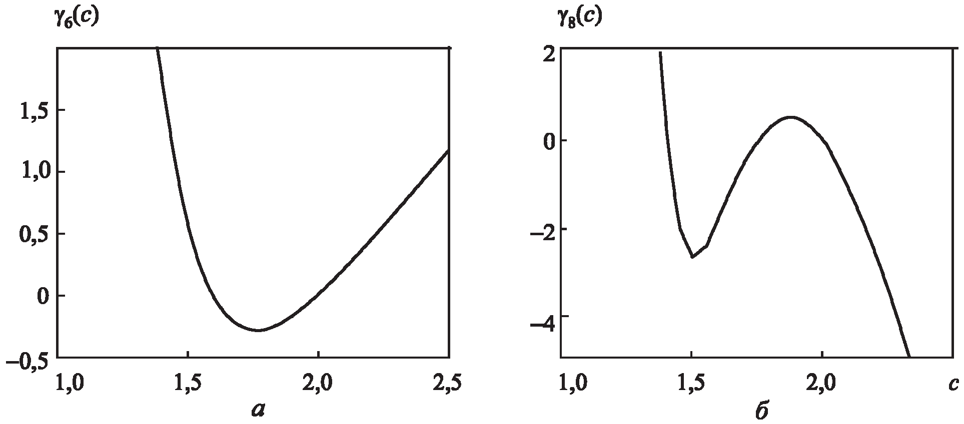

Рис. 2

При $c \to \infty$ получаем значения коэффициентов $\gamma_s(c)$, подставляя в формулы (13) выражение (15): $\gamma_4(\infty) = -1{,}2$; $\gamma_6(\infty) = 48/7 \approx 6{,}8571$; $\gamma_8(\infty) = -86{,}4$.

Результаты анализа зависимости коэффициентов $\gamma_s(c)$ от параметра c, полученные по формулам (13), (14) численными методами, приведены в табл. 1, из которой видно, что при $0 < c \le 1$ коэффициенты $\gamma_4(c)$, $\gamma_6(c)$, $\gamma_8(c)$ положительны, при $c \to 0$ они стремятся к бесконечности и монотонно убывают с возрастанием значения c. При $c > 2$ коэффициент $\gamma_4(c)$ меньше нуля и монотонно убывает, коэффициент $\gamma_6(c)$ больше нуля и монотонно возрастает, коэффициент $\gamma_8(c)$ меньше нуля и монотонно убывает, при $c \to \infty$ коэффициенты $\gamma_4(c)$, $\gamma_6(c)$, $\gamma_8(c)$ стремятся к кумулянтным коэффициентам соответствующих порядков равномерного распределения. Из

Таблица 1

c	$\gamma_4(c)$	$\gamma_6(c)$	$\gamma_8(c)$	c	$\gamma_4(c)$	$\gamma_6(c)$	$\gamma_8(c)$	c	$\gamma_4(c)$	$\gamma_6(c)$	$\gamma_8(c)$
0,1	$2{,}82 \cdot 10^6$	$3{,}26 \cdot 10^{16}$	$1{,}29 \cdot 10^{29}$	1,1	2,277	15,48	204,2	2,2	–0,1753	0,4539	–2,546
0,2	$1{,}96 \cdot 10^3$	$2{,}57 \cdot 10^8$	$6{,}36 \cdot 10^{14}$	1,2	1,743	7,951	61,69	2,4	–0,3116	0,9467	–6,365
0,3	$1{,}71 \cdot 10^2$	$5{,}11 \cdot 10^5$	$1{,}09 \cdot 10^{10}$	1,3	1,337	3,907	14,21	2,6	–0,4202	1,424	–10,76
0,4	48,95	$2{,}24 \cdot 10^4$	$4{,}49 \cdot 10^7$	1,4	1,018	1,713	0,0303	2,8	0,5086	1,867	–15,31
0,5	22,21	$3{,}26 \cdot 10^3$	$1{,}61 \cdot 10^6$	1,5	0,7622	0,5461	–2,665	3,0	–0,5816	2,269	–19,78
0,6	12,58	$8{,}44 \cdot 10^2$	$1{,}61 \cdot 10^5$	1,6	0,5527	–0,0297	–1,881	5,0	–0,9299	4,611	–50,76
0,7	8,062	$2{,}99 \cdot 10^2$	$2{,}84 \cdot 10^4$	1,7	0,3788	–0,2576	–0,5531	10	–1,116	6,126	–74,28
0,8	5,565	$1{,}27 \cdot 10^2$	$6{,}85 \cdot 10^3$	1,8	0,2324	–0,2783	0,3232	20	–1,176	6,644	–82,82
0,9	4,026	59,74	$1{,}98 \cdot 10^3$	1,9	0,1075	–0,1754	0,4986	50	–1,196	6,819	–85,76
1,0	3	30	630	2,0	0	0	0	100	–1,199	6,847	–86,24

табл. 1 также видно, что при $1 < c \le 2$ коэффициент $\gamma_4(c)$ больше нуля и монотонно убывает, а коэффициенты $\gamma_6(c)$, $\gamma_8(c)$ принимают положительные и отрицательные значения.

Исследуем детальней коэффициенты $\gamma_6(c)$, $\gamma_8(c)$ на участке $1< c \le 2$, анализируя численными методами выражения (13). При $c_{6,1} = 1{,}5923$, $c_{6,2} = 2$ (гауссово распределение) $\gamma_6(c) = 0$. На участке $c \in (c_{6,1}, c_{6,2})$ коэффициент $\gamma_6(c)$ меньше нуля и имеет минимум $\min\gamma_6(c) = = -0{,}2876$ при $c_{6,\min} = 1{,}75$, на участке $c \notin (c_{6,1}, c_{6,2})$ $\gamma_6(c) > 0$ (рис. 2, *а*). При $c_{8,1} = 1{,}4005$, $c_{8,2} = 1{,}7538$, $c_{8,3} = 2$ (гауссово распределение) $\gamma_8(c) = 0$. При $c \in (c_{8,1}, c_{8,2})$ $\gamma_8(c) < 0$ и при $c \in (1, c_{8,1}) \cup (c_{8,2}, c_{8,3})$ $\gamma_8(c) > 0$ (рис. 2, *б*). На участке $c \in (c_{8,1}, c_{8,2})$ коэффициент $\gamma_8(c)$ имеет минимум $\min\gamma_8(c) = -2{,}6646$ при $c_{8,\min} = 1{,}5$, а на участке $c \in (c_{8,2}, c_{8,3})$ — максимум $\max\gamma_8(c) = 0{,}5003$ при $c_{8,\max} = 1{,}85$.

Стандартизированная плотность вероятностей. Плотность вероятностей (1) является моделью случайной величины ξ, у которой математическое ожидание $\mathbf{M}\xi$ равно нулю и дисперсия $\mathbf{D}\xi$ на основании (7) имеет вид

$$\mathbf{D}\xi = \mu_2(c) = \frac{\Gamma(3/c)}{[\beta^2 \Gamma(1/c)]}.$$

Для дальнейшего анализа целесообразно перейти к стандартизированной случайной величине $\tilde{\xi} = \xi / \sigma(c)$, где $\sigma(c)$ — среднеквадратическое отклонение величины ξ, которое с учетом (7) имеет вид

$$\sigma(c) = [\mu_2(c)]^{1/2} = \frac{1}{\beta}\left[\frac{\Gamma(3/c)}{\Gamma(1/c)}\right]^{1/2} = \frac{1}{\beta}\left[\frac{\Gamma(1+3/c)}{3\Gamma(1+1/c)}\right]^{1/2}. \tag{20}$$

Для случайной величины $\tilde{\xi}$ $\mathbf{M}\tilde{\xi} = 0$, $\mathbf{D}\tilde{\xi} = 1$, а плотность вероятностей $\tilde{p}(x)$ связана с плотностью вероятностей $p(x)$ следующим выражением [4]:

$$\tilde{p}(x; c) = \sigma(c)\, p[\sigma(c)\, x]. \tag{21}$$

Подставляя (20) в (21), получаем стандартизированную плотность вероятностей $\tilde{p}(x; c)$ семейства распределений Субботина:

$$\tilde{p}(x; c) = A_0(c)\, e^{-|\beta_0(c) x|^c}, \tag{22}$$

где $A_0(c)$ — нормирующий множитель,

$$A_0(c) = \tilde{p}(0; c) = A(c)\sigma(c) = \frac{c}{2\Gamma(1/c)}\left[\frac{\Gamma(3/c)}{\Gamma(1/c)}\right]^{1/2} = \frac{1}{2\Gamma(1+1/c)}\left[\frac{\Gamma(1+3/c)}{3\Gamma(1+1/c)}\right]^{1/2}; \tag{23}$$

$\beta_0(c)$ — параметр масштаба,

$$\beta_0(c) = \beta\,\sigma\,(c) = \left[\frac{\Gamma(3/c)}{\Gamma(1/c)}\right]^{1/2} = \left[\frac{\Gamma(1+3/c)}{3\Gamma(1+1/c)}\right]^{1/2}. \qquad (24)$$

Проанализируем нормирующий множитель $A_0\,(c)$, используя формулу (23). Пусть $0 < c \le 1$. При $c = 1$ получаем

$$A_0\,(1) = \frac{1}{2\Gamma(1)}\left[\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(1)}\right]^{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Пусть $0 < c < 1$ и $1/c = n$ — целое число. Тогда формула (23) принимает вид

$$A_0\,(n) = \frac{1}{2\Gamma(1+n)}\left[\frac{\Gamma\,(1+3n)}{3\Gamma\,(1+n)}\right]^{1/2} = \frac{1}{2n!}\left[\frac{(3n)!}{3n!}\right]^{1/2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\frac{N_1 N_2}{(n!)^2}\right]^{1/2},$$

где $N_1 = (n+1)\,(n+2)\ldots(2n)$; $N_2 = (2n+1)\,(2n+2)\ldots(3n)$. Поскольку справедливо неравенство $n! \le N_1 \le N_2$, получаем $(n!)^2 \le N_1 N_2$ и $A_0(0) = \lim\limits_{c\to 0} A_0(c) = \lim\limits_{n\to\infty} A_0(n) = \infty$.

Пусть $c > 1$. При $c \to 1$ из (23) находим $A_0(1+) = \lim\limits_{c\to 1+} A_0(c) = 1/\sqrt{2}$, а при $c = 2$ —

$$A_0\,(2) = \frac{2}{2\Gamma(1/2)}\left[\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(1/2)}\right]^{0,5} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\sqrt{\pi}/2}{\sqrt{\pi}}\right]^{0,5} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

при $c \to \infty$ —

$$A_0\,(\infty) = \lim_{c\to\infty} A_0(c) = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{2\Gamma\,(1+1/c)}\left[\frac{\Gamma(1+3/c)}{3\Gamma(1+1/c)}\right]^{0,5} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Следовательно, нормирующий множитель $A_0(c)$ — непрерывная функция, которая монотонно убывает от $A_0(0) = \infty$ до $A_0(1) = 1/\sqrt{2}$ при $0 < c \le 1$ и от $A_0(1+) = 1/\sqrt{2}$ до $A_0(\infty) = 1/(2\sqrt{3})$ при $c > 1$.

Проанализируем параметр масштаба $\beta_0(c)$, используя формулу (24). Пусть $0 < c \le 1$. При $c = 1$ получаем $\beta_0(1) = [\Gamma\,(3)/\Gamma\,(1)]^{1/2} = \sqrt{2}$, при $c \to 0$ находим

$$\beta_0(0) = \lim_{c\to 0}\beta_0(c) = \beta\lim_{c\to 0}\sigma\,(c) = \beta\lim_{c\to 0}\,[\mu_2(c)]^{1/2} = \infty.$$

Пусть $c > 1$. При $c \to 1$ получаем $\beta_0(1+) = \lim\limits_{c\to 1+}\beta_0(c) = \sqrt{2}$, при $c = 2$ (гауссово распределение)

$$\beta_0(2) = [\Gamma(3/2)/\Gamma(1/2)]^{1/2} = [(\sqrt{\pi}/2)/\sqrt{\pi}]^{1/2} = 1/\sqrt{2},$$

при $c \to \infty$

$$\beta_0(\infty) = \lim_{c\to\infty}\beta_0(c) = \lim_{c\to\infty}\left[\frac{\Gamma(1+3/c)}{3\Gamma(1+1/c)}\right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно, параметр масштаба $\beta_0(c)$ — непрерывная функция, которая монотонно убывает от $\beta_0(0) = \infty$ до $\beta_0(1) = \sqrt{2}$ при $0 < c \le 1$ и от $\beta_0(1+) = \sqrt{2}$ до $\beta_0(\infty) = 1/\sqrt{3}$ при $c > 1$.

На основании полученных результатов находим плотности вероятностей (22) при $c \to 0$ и $c \to \infty$:

$$\widetilde{p}\,(x;0) = \lim_{c\to 0}\widetilde{p}\,(x;c) = \lim_{c\to 0} A_0(c)\, e^{-|\beta_0(c)\,x|^c} = \begin{cases} \lim\limits_{c\to 0} A_0(c) = \infty, x = 0, \\ 0,\ x \ne 0, \end{cases}$$

$$\widetilde{p}\,(x;\infty) = \lim_{c\to\infty}\widetilde{p}\,(x;c) = \lim_{c\to\infty} A_0(c)\, e^{-|\beta_0(c)x|^c} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{3}}, |x| < \sqrt{3}, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{3}\,e}, |x| = \sqrt{3}, \\ 0, |x| > \sqrt{3}. \end{cases}$$

Таким образом, при $c \to 0$ плотность вероятностей $\widetilde{p}\,(x;c)$ стремится к вырожденному распределению, а при $c \to \infty$ — к прямоугольному распределению на интервале $(-\sqrt{3};\sqrt{3}]$. В табл. 2 приведены значения параметров $A_0(c)$, $\beta_0(c)$ и плотности вероятностей $\widetilde{p}\,(x;c)$ для рассмотренных частных случаев семейства распределений Субботина. Плотность вероятностей (22) является моделью стандартизированной случайной величины

Таблица 2

Параметр	Распределение при			
	$c \to 0$ (вырожденное)	$c = 1$ (Лапласа)	$c = 2$ (Гаусса)	$c \to \infty$ (прямоугольное)
$A_0(c)$	∞	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$
$\beta_0(c)$	∞	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
$\widetilde{p}\,(x;c)$	$\delta(x) = \begin{cases} \infty, x = 0, \\ 0, x \ne 0. \end{cases}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{-\lvert\sqrt{2}x\rvert}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5x^2}$	$\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{3}}, \lvert x\rvert < \sqrt{3}, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{3}\,e}, \lvert x\rvert = \sqrt{3}, \\ 0, \lvert x\rvert > \sqrt{3}. \end{cases}$

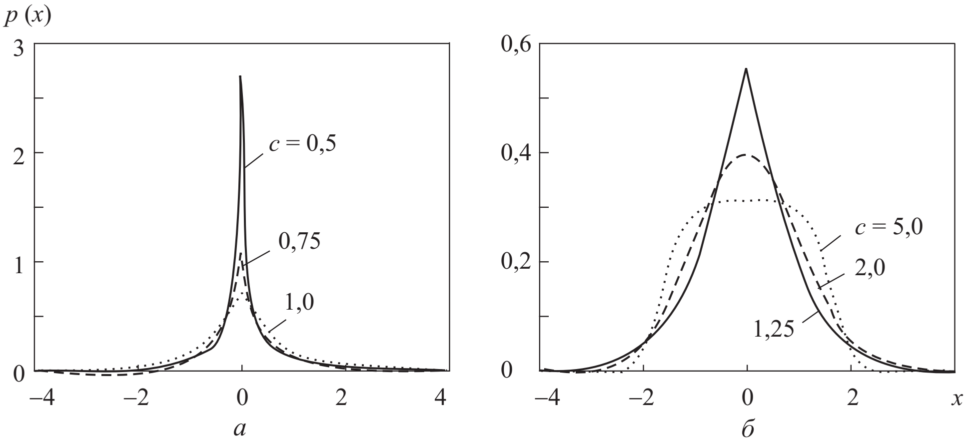

Рис. 3

$\tilde{\xi}$, для которой $\mathbf{M}\tilde{\xi}=0$, $\mathbf{D}\tilde{\xi}=1$. Осуществляя линейное преобразование $\eta = m_\eta + \sigma_\eta \tilde{\xi}$, получаем плотность вероятностей $p_\eta(x;c)$ семейства распределений Субботина случайной величины η с заданным математическим ожиданием $m_\eta = \mathbf{M}\eta$ и дисперсией $\sigma_\eta^2 = \mathbf{D}\eta$:

$$p_\eta(x;c) = \frac{1}{\sigma_\eta}\tilde{p}\left(\frac{x-m_\eta}{\sigma_\eta};c\right) = \frac{A_0(c)}{\sigma_\eta}\exp\left[-\left|\beta_0(c)\frac{x-m_\eta}{\sigma_\eta}\right|^c\right].$$

Классификация семейства распределений Субботина. На основании полученных результатов семейство распределений Субботина (22) можно разделить на классы и типы, используя в качестве критериев свойства производной плотности вероятностей и кумулянтных коэффициентов при различных значениях параметра формы c.

К л а с с 1. Распределения с угловой вершиной, $0 < c \le 1$. Критерий — производная плотности вероятностей в точке $x=0$ разрывная, у плотности вероятностей вершина является угловой точкой. Свойства — кумулянтные коэффициенты положительные.

К л а с с 2. Распределения с гладкой вершиной, $c > 1$. Критерий — производная плотности вероятностей в точке $x=0$ непрерывная, у плотности вероятностей гладкая вершина.

Распределения класса 1 можно разделить на следующие типы:

Т и п 1.1. Распределение Лапласа, $c=1$. Критерий — производная плотности вероятностей в точке $x=0$ имеет разрыв первого рода. Распределение Лапласа является граничным для классов 1 и 2.

Т и п 1.2. Обобщенные распределения Лапласа, $0<c<1$. Критерий — производная плотности вероятностей в точке $x=0$ имеет разрыв второго рода. Свойства — $A_0(0) > A_0(1)$.

Т и п 1.2.L. Вырожденное распределение, $c \to 0$. Предельное распределение для типа 1.2. Свойства — кумулянтные коэффициенты $\gamma_s(0) = \infty$.

Распределения класса 2 можно разделить на следующие типы:

Т и п 2.1. Гауссово распределение, $c = 2$. Критерий — все кумулянтные коэффициенты равны нулю. Гауссово распределение является граничным для типов 2.2 и 2.3.

Т и п 2.2. Обобщенные гауссовы островершинные распределения, $1 < c < 2$. Критерий — кумулянтные коэффициенты $\gamma_6(c)$, $\gamma_8(c)$ являются знакопеременными функциями. Свойства — $\gamma_4(c) > 0$, $A_0(2) < A_0(c) < A_0(1)$.

Т и п 2.2.L. Предельное распределение для типа 2.2, $c \to 1+$. Свойства — плотность вероятностей $\tilde{p}(x; c) \to \tilde{p}(x; 1)$, т.е. стремится к распределению Лапласа, однако имеет гладкую вершину; кумулянтные коэффициенты положительные.

Т и п 2.3. Обобщенные гауссовы плосковершинные распределения, $c > 2$. Критерий — коэффициенты $\gamma_4(c) < 0$, $\gamma_6(c) > 0$, $\gamma_8(c) < 0$. Свойства — $A_0(c) < A_0(2)$.

Т и п 2.3.L. Прямоугольное распределение, $c \to \infty$. Предельное распределение для типа 2.3. Свойства — плотность вероятностей $\tilde{p}(x; c)$ стремится к прямоугольному распределению на интервале $(-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$, но является непрерывной функцией; коэффициенты $\gamma_s(\infty)$ равны кумулянтным коэффициентам соответствующих порядков равномерного распределения.

На рис. 3, *а*, представлены графики плотности вероятностей (22) распределений класса 1, на рис 3, *б*, — распределений класса 2.

Выводы

Производная плотности вероятностей семейства распределений Субботина в точке $x = 0$ разрывная при $0 < c \le 1$ и непрерывна при $c > 1$. Поэтому все плотности вероятностей семейства (1) разделяются на два типа: распределения, у которых вершина плотности вероятностей — угловая точка $(0 < c \le 1)$, и распределения, у которых вершина плотности вероятностей — гладкая $(c > 1)$. При $c > 0$ кумулянтные коэффициенты $\gamma_s(c)$ всех порядков s семейства распределений Субботина существуют и являются непрерывными функциями.

Свойства производной плотности вероятностей и кумулянтных коэффициентов являются классификационными критериями. На их основании семейство распределений Субботина разделено на два класса, которые, в свою очередь, разделены на восемь типов.

Практическая ценность полученных результатов заключается в определении критериев выбора плотности вероятностей из семейства распределений Субботина для аппроксимации распределений негауссовых случайных величин, что позволяет повысить достоверность результатов решения задач измерений, обнаружения и классификации.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кендалл М., Стьюарт А.* Теория распределений / Пер. с англ. В.В. Сазонова, А.Н. Ширяева, под ред. А.Н. Колмогорова. М.: Наука, 1966, 588 с.
2. *Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д.* Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. Справочное изд. М.: Финансы и статистика, 1983, 471 с.
3. *Subbotin M.T.* On the law of frequency of error // Математический сборник, 1923, **31**, № 2, с. 296—301.
4. *Forbes C., Evans M., Hastings N., Peacock B.* Statistical Distributions. Fourth Edition. New Jersey: John Wiley & Sons, 2011, 212 p.
5. *Новицкий П.В., Зограф И.А.* Оценка погрешностей результатов измерений. Л.: Энергоатомиздат, 1991, 304 с.
6. *Шелухин О.И.* Негауссовские процессы в радиотехнике. М.: Радио и связь, 1999, 287 с.
7. *Saatci E., Akan A.* Respiratory parameter estimation in non-invasive ventilation based on generalized Gaussian noise models // Signal processing, 2010, Vol. 90, No. 2, p. 480—489.
8. *Sharifi K., Leon-Garcia A*. Estimation of shape parameter for generalized Gaussian distribution in subband decomposition of video // IEEE Trans. on Circuits and Systems for Video Technology, 1995, Vol. 5, No. 1, p. 52—56.
9. *Dominguez-Molina J.A., Gonzalez-Farias G., Rodriguez-Dagnino R.M.* A practical procedure to estimate the shape parameter in the generalized Gaussian distribution. 2001, 37 p. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.cimat.mx/reportes/enlinea/I-01-18_eng.pdf
10. *Nadarajah S.* A generalized normal distribution // Journal of Applied Statistics. 2005, Vol. 32, Issue 7, p. 685—694.
11. *Pogany T.K., Nadarajah S.* On the characteristic function of the generalized normal distribution // Comptes Rendus Mathématique. 2010, 348(3), p. 203—206.
12. *Crowder G.E., Moore A.H.* Adaptive Robust Estimation Based on a Family of Generalized Exponential Power Distributions // IEEE Transactions on Reliability. 1983, Vol. R-32, Issue 5, p. 488—495.
13. *Varanasi M.K., Aazhang B.* Parametric generalized Gaussian density estimation // J. Acoust. Soc. Am. 1989, Vol. 86, No. 4, p. 1404—1415.
14. *Заболотній С.В., Чепинога А.В., Бондаренко Ю.Ю., Рудь М.П.* Поліноміальні оцінки параметрів для даних з експоненційним степеневим розподілом // Вісник НТУУ КПІ. Серія радіотехніка, радіо апаратобудування, 2018, № 75, с. 40—47.
15. *Nardon M., Pianca P.* Simulation techniques for generalized Gaussian densities // Journal of Statistical Computation and Simulation. 2009, Vol. 79, Issue 11, p. 1317—1329.
16. *Kalke S., Richter W.-D.* Simulation of the p-generalized Gaussian distribution // Journal of Statistical Computation and Simulation, 2013, Vol. 83, No. 4, p. 639—665.
17. *Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.* Специальные функции (формулы, графики, таблицы) / Пер. с нем. под ред. Л.И. Седова. М.: Наука, 1964, 344 с.
18. *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы / Пер с англ. Н.В. Леви под ред. К.А. Семендяева. М.: Наука, 1977, 228 с.

Получена 11.03.19

REFERENCES

1. Kendall, M. and Stiuart, A. (1966), *Teoriia raspredelenii* [Distribution Theory], Translated by Sazonov, V.V. and Shiriaev, A.N., Edited by Kolmogorov, A.N., Nauka, Moscow, Russia.
2. Aivazian, S.A., Eniukov, I.S. and Meshalkin, L.D. (1983), *Prikladnaia statistika: Osnovy modelirovaniia i pervichnaia obrabotka dannykh. Spravochnoe izd.* [Applied Statistics: Bases of Modelling and Initial Data Processing. Reference edition], Finansy i statistika, Moscow, Russia.
3. Subbotin, M.T. (1923), "On the law of frequency of error", *Matematicheskii sbornik*, Vol. 31, no. 2, pp. 296-301.
4. Forbes, C., Evans, M., Hastings, N. and Peacock, B. (2011), Statistical Distributions. Fourth Edition, John Wiley & Sons, New Jersey.
5. Novitskii, P.V. and Zograf, I.A. (1991), *Otsenka pogreshnostei rezultatov izmerenii* [Error Estimation in Measurement Results], Energoatomizdat, St. Petersburg, Russia.
6. Shelukhin, O.I. (1999), *Negaussovskie protsessy v radiotekhnike* [Non-Gaussian Processes in Radio Engineering], Radio i sviaz, Moscow, Russia.
7. Saatci, E. and Akan, A. (2010), "Respiratory parameter estimation in non-invasive ventilation based on generalized Gaussian noise models", *Signal processing*, Vol. 90, no. 2, p. 480-489.
8. Sharifi, K. and Leon-Garcia, A. (1995), "Estimation of shape parameter for generalized Gaussian distribution in subband decomposition of video", *IEEE Trans. on Circuits and Systems for Video Technology*, Vol. 5, no. 1, pp. 52-56.
9. Dominguez-Molina, J.A., Gonzalez-Farias, G. and Rodriguez-Dagnino, R.M. (2001), A practical procedure to estimate the shape parameter in the generalized Gaussian distribution, available at: http://www.cimat.mx/reportes/enlinea/I-01-18_eng.pdf
10. Nadarajah, S. (2005), "A generalized normal distribution", *Journal of Applied Statistics*, Vol. 32, no. 7, pp. 685-694.
11. Pogany, T.K. and Nadarajah, S. (2010), "On the characteristic function of the generalized normal distribution", *Comptes Rendus Mathẽmatique*, 348(3), pp. 203-206.
12. Crowder, G.E. and Moore, A.H. (1983), "Adaptive Robust Estimation Based on a Family of Generalized Exponential Power Distributions", *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. R-32, no. 5, pp. 488-495.
13. Varanasi, M.K. and Aazhang, B. (1989), "Parametric generalized Gaussian density estimation", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 86, no. 4, pp. 1404-1415.
14. Zabolotnii, S.V., Chepynoha, A.V., Bondarenko, Yu.Yu. and Rud, M.P. (2018), "Polynomial estimates of parameters for data with exponential power distribution", *Visnyk NTUU KPI. Seriia radiotekhnika, radioaparatobuduvannia*, no. 75, pp. 40-47.
15. Nardon, M. and Pianca, P. (2009), "Simulation techniques for generalized Gaussian densities", *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Vol. 79, Issue 11, pp. 1317-1329.
16. Kalke, S. and Richter, W.-D. (2013), "Simulation of the p-generalized Gaussian distribution", *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Vol. 83, no. 4, pp. 639-665.
17. Ianke, E., Emde, F. and Lesh, F. (1964), *Spetsialnye funktsii (formuly, grafiki, tablitsy)* [Tafeln Höherer Funktionen], Translated by Sedov L.I., Nauka, Moscow, Russia.
18. Dvait, G.B. (1977), *Tablitsy integralov i drugie matematicheskie formuly* [Tables of Integrals and Other Mathematical Data], Translated by Levi, N.V., Edited by Semendiaev K.A., Nauka, Moscow, Russia.

Received 11.03.19

О.І. Красильніков

СІМ'Я РОЗПОДІЛІВ СУБОТІНА ТА ЇЇ КЛАСИФІКАЦІЯ

Досліджено властивості щільності ймовірностей, її параметри, центральні моменти та кумулянтні коефіцієнти сім'ї розподілів Суботіна. На основі властивостей похідної щільності ймовірностей і кумулянтних коефіцієнтів запропоновано класифікацію сім'ї розподілів Суботіна та встановлено критерії вибору щільності ймовірностей для апроксимації розподілів негаусових випадкових величин.

Ключові слова: сім'я розподілів Суботіна, узагальнений гаусів розподіл, узагальнений нормальний розподіл, розподіл похибок.

A.I. Krasilnikov

FAMILY OF SUBBOTIN DISTRIBUTIONS AND ITS CLASSIFICATION

The properties of the probability density, its parameters, the central moments, and the cumulant coefficients of the Subbotin distribution family were investigated. Based on the properties of the derivative of the probability density and cumulant coefficients, a classification of the Subbotin family of distributions was proposed, and criteria for choosing the probability density for approximating the distributions of non-Gaussian random variables were established.

Key words: family of Subbotin distributions, generalized Gaussian distribution, generalized normal distribution, error distribution.

КРАСИЛЬНИКОВ Александр Иванович, канд. физ.-мат. наук, доцент, вед. науч. сотр. Ин-та технической теплофизики НАН Украины. В 1973 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — математические модели, вероятностные характеристики и методы статистической обработки флуктуационных сигналов в системах шумовой диагностики.