doi

УДК 004.94

В.А. Іванюк, канд. техн. наук, **В.А. Федорчук**, д-р техн. наук
Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка
(Україна, 32300, Кам'янець-Подільський, вул. Симона Петлюри, 1,
тел. (03849) 31601; e-mail: wivanyuk@gmail.com; fedvolod@gmail.com)

Адаптивний метод ідентифікації моделей нелінійних динамічних систем інтегральними рядами Вольтерри

Розглянуто задачу ідентифікації моделей нелінійних динамічних систем, поданих у формі інтегральних рядів Вольтерри. При застосуванні традиційного підходу основною проблемою є проведення великої кількості необхідних експериментів, яка зростає в експоненціальній залежності відносно розмірності ядра. Велике число експериментів в багатьох випадках унеможливлює застосування методу рядів Вольтерри для дослідження нелінійних динамічних систем. Запропоновано адаптивний метод ідентифікації моделей нелінійних динамічних систем, який дає змогу отримувати моделі у вигляді рядів Вольтерри із збереженням адекватності по відношенню до моделей, що отримуються традиційним методом, але при цьому кількість необхідних експериментів для побудови ядер є меншою приблизно на порядок. Запропонований метод розглянуто на прикладі задачі ідентифікації двовимірного ядра. Отриманні результати можна поширити і на випадки з ядрами Вольтерри вищих порядків.

Ключові слова: ідентифікація нелінійних динамічних систем, ряди Вольтерри, адаптивний метод ідентифікації.

Найбільш загальним з існуючих способів математичного опису нелінійних динамічних систем є подання їх за допомогою ряду Вольтерри [2]:

$$y(t)=\sum_{m=1}^{n} f_m(t),\ \ f_m=\int_0^t \dots \int_0^t K_m(s_1, ..., s_m)\prod_{i=1}^{m} x(t-s_i)\,ds_i,\ \ t\in[0,T], \tag{1}$$

де $x(t)$, $y(t)$ — відповідно вхідний і вихідний сигнали об'єкта; n — деяке натуральне число; T — час перехідного процесу; $K_m(s_1, ..., s_m)$ — ядра Вольтерри, при цьому $K_1(s)$ визначає лінійну складову динамічної системи.

Функціональні ряди Вольтерри досить давно використовуються в задачах математичного моделювання нелінійних динамічних систем. Як і будь-який універсальний апарат, апарат рядів Вольтерри разом з очевидними перевагами має і недоліки. Він дає змогу подати вихідний сигнал $y(t)$ системи, що трактується як «чорний ящик», на зовнішні впливи $x(t)$ у вигляді інтегро-степеневого ряду (1). Подання нелінійної динамічної системи за допомогою ряду Вольтерри є загальним та допускає ясну фізичну інтерпретацію і його можна розглядати як узагальнення лінійного випадку [2, 3]. Дійсно, якщо покласти $K_2 = K_3 = ... = K_m = 0$, то згідно (1) отримаємо оператор

$$y(t) = \int_0^t K(s)\, x(t-s)\, ds,$$

який широко використовується для опису лінійних систем і відомий як інтеграл згортки.

Основна проблема полягає у складності розв'язання типової оберненої задачі, а саме ідентифікації ядер Вольтерри в (1) за відомими реакціями системи на детерміновані тестові впливи [2]. Крім проблеми некоректності поставленої задачі існує також проблема проведення всієї множини необхідних експериментів, оскільки для побудови адекватної моделі необхідно проводити більше k^{n-1} експериментів для знаходження n-го ядра ряду, де k — кількість точок дискретизації за часом, $k = T/h + 1$; T — тривалість перехідного процесу; h — крок дискретизації.

Традиційний метод. Розглянемо підхід [1], який полягає в застосуванні ступінчастих сигналів різної амплітуди.

Одновимірне ядро. Загальний вигляд лінійної частини моделі системи задається формулою

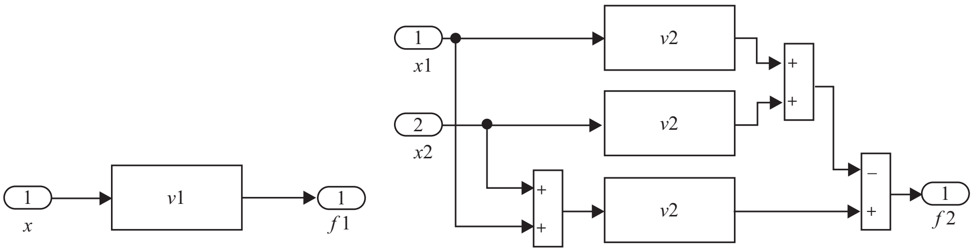
$$v_1[x(t)] = \int_{E^1} K_1(s)\, x(t-s)\, ds. \tag{2}$$

Вагова функція у (2) визначається експериментально, якщо в якості вхідного сигналу обрати ступінчастий вплив амплітуди $A\,(x(t) = A \cdot 1(t))$ (рис. 1, *а*). Тоді (2) набуває вигляду

$$v_1[A \cdot 1(t)] = \int_{E^1} K_1(s)\, A \cdot 1(t-s)\, ds = A \int_{E^1} K_1(s)\, ds = f(t).$$

Виконавши диференціювання по верхній межі, отримаємо

$$K_1(t) = \frac{1}{A} \frac{df(t)}{dt}.$$



а б

Рис. 1. Структурні схеми для ідентифікації одновимірного ядра Вольтерри (*а*) та двовимірного ядра (*б*)

Двовимірне ядро. Однорідний регулярний оператор другого степеня [2] має вигляд

$$v_2[x(t)] = \int_{E^2} K_2(s_1, s_2)\, x_1(t-s_1)\; x_2(t-s_2)\, ds_1 ds_2.$$

Використавши схему ідентифікації, наведену на рис. 1, *б* [1], формуємо експерименти при різних значеннях T_1 і T_2. Отримуємо деяку поверхню $f_2(t_1, t_2)$ в тривимірному просторі:

$$v_2[A \cdot 1(t-T_1),\; A \cdot 1(t-T_2)] =$$

$$= 2A^2 \int_{E^2} K_2(s_1, s_2)\, 1(t-T_1-s_1)\; 1(t-T_2-s_2)\, ds_1 ds_2 =$$

$$= 2A^2 \int_{E^2} K_2(s_1, s_2)\, ds_1 ds_2 = f_2(t_1, t_2).$$

Для визначення $K_2(t_1, t_2)$ потрібно диференціювати $f_2(t_1, t_2)$ по t_1 та t_2, тобто

$$K_2(t_1, t_2) = \frac{1}{2A^2} \frac{\partial^2 f_2(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}. \tag{3}$$

Тривимірне ядро. Однорідний регулярний оператор третього степеня [2]

$$v_3[x(t)] = \int_{E^3} K_3(s_1, s_2, s_3)\, x_1(t-s_1)\, x_2(t-s_2)\, x_3(t-s_3)\, ds_1 ds_2 ds_3$$

можна визначити, використавши структурну схему, наведену на рис. 2 [1].

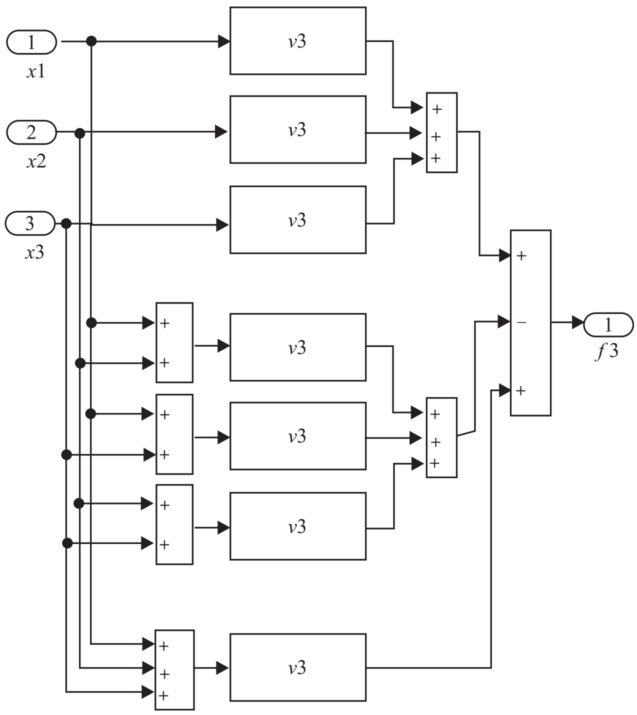


Рис. 2. Структурна схема для ідентифікації тривимірного ядра

На вхід системи подаються ступінчасті сигнали з амплітудою A. В результаті отримуємо трьохвимірну функцію

$$v_3[A\cdot 1(t-T_1), A\cdot 1(t-T_2), A\cdot 1(t-T_3)]=$$

$$=3!A^3\int\limits_{E^3} K_3(s_1,s_2,s_3)1(t-T_1-s_1)1(t-T_2-s_2)1(t-T_3-s_3)\,ds_1ds_2ds_3=$$

$$=3!A^3\int\limits_{E^3} K_3(s_1,s_2,s_3)\,ds_1ds_2ds_3=f_3(t_1,t_2,t_3).$$

Тривимірне ядро Вольтерри визначається за формулою

$$K_3(t_1,t_2,t_3)=\frac{1}{3!A^3}\frac{\partial^3 f_3(t_1,t_2,t_3)}{\partial t_1\partial t_2\partial t_3}.$$

Основна складність при застосуванні розглянутого підходу полягає в необхідності проведення значної кількості експериментів для побудови ядер Вольтерри. Для знаходження ядра лінійної частини моделі необхідно здійснити один експеримент, для побудови ядра другого порядку — $2k+1$ експериментів, для побудови тривимірного ядра — $2k^2+4k+1$ експериментів. Наприклад, при $k=101$ ($T=10$, $h=0{,}1$) кількість експериментів для побудови двовимірного ядра буде $2k+1=203$, для тривимірного ядра — $2k^2+4k+1=$ $=20807$. Для ядер вищих порядків кількість експериментів буде зростати в показниковій залежності відносно розмірності ядра. Отже, велика кількість експериментів унеможливлює в багатьох випадках застосування методу рядів Вольтерри для дослідження нелінійних динамічних систем.

Адаптивний метод. Для зменшення кількості експериментів пропонується метод ідентифікації рядів Вольтерри за допомогою ефективного планування експериментів. Суть даного методу розглянемо на прикладі побудови двовимірного ядра Вольтерри.

Для реєстрації результатів експериментів формуємо квадратну матрицю:

$$F=\begin{bmatrix} f_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{2,1} & f_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \\ f_{i-1,1} & f_{i-1,2} & f_{i-1,i-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{i,1} & f_{i,2} & f_{i,i-1} & f_{i,i} & 0 & 0 & 0 \\ f_{i+1,1} & f_{i+1,2} & f_{i+1,i-1} & f_{i+1,i} & f_{i+1,i+1} & 0 & 0 \\ & & & & & & \\ f_{n-1,1} & f_{n-1,2} & f_{n-1,i-1} & f_{n-1,i} & f_{i+1,i+1} & f_{n-1,n-1} & 0 \\ f_{n,1} & f_{n,2} & f_{n,i-1} & f_{n,i} & f_{n,i+1} & f_{n,n-1} & f_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Кожний стовпець даної матриці, відповідно до розбиття за часом з кроком h, відображає результат i-го експерименту, що проводиться при вхідних впливах $x_1(t)=1(t)$ і $x_2(t)=1(t-T_{2,i})$, де $T_{2,i}$ $(i=\overline{1,n})$ — елемент вектора $T_2=[0:h:T]$, який визначає величину зміщення в часі ступінчастого сигналу. Згідно алгоритму побудови ядра для однорідного регулярного оператора другого степеня в матрицю вводимо результати експериментів, які враховують тільки вплив нелінійності, без врахування лінійних складових. Внаслідок цього матриця буде мати вигляд нижньотрикутної.

В основі запропонованого методу лежить властивість, яка полягає в тому, що вплив нелінійності на результат різних експериментів є однаковий (в межах заданої похибки), але зміщений у часі, відповідно до зміщення ступінчастого вхідного сигналу. Тобто результати, подані у стовпцях, наприклад i та j, $f_{i,i}, f_{i+1,i}, f_{i+2,i}, \ldots$ та $f_{j,j}, f_{j+1,j}, f_{j+2,j}, \ldots$, повинні задовольняти умову

$$\|f_i, f_j\| \le \varepsilon, \tag{4}$$

де

$$\|f_i, f_j\| = \sqrt{\sum_g \left(\frac{d^2 f_{i+g,i}}{dt^2} - \frac{d^2 f_{j+g,j}}{dt^2} \right)^2}\,.$$

Якщо стовпці i та j експериментів задовольняють (4), можна припустити, що результати експериментів від $i + 1$ до $j - 1$ будуть однаковими у визначеному розумінні, тобто будуть відрізнятися один від одного в межах заданої похибки ε. Тому експерименти з $i + 1$ до $j - 1$ можна не проводити, а матрицю заповнити, використавши сплайн інтерполяцію окремо по кожній діагоналі матриці:

$$\begin{array}{l} \boxed{f_{i,i}},\, f_{i+1,i+1},\, f_{i+2,i+2},\, \ldots,\, f_{j-2,j-2},\, f_{j-1,j-1},\, \boxed{f_{j,j}}, \\ \boxed{f_{i+1,i}},\, f_{i+2,i+1},\, f_{i+3,i+2},\, \ldots,\, f_{j-1,j-2},\, f_{j,j-1},\, \boxed{f_{j+1,j}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Проведення експериментів починається із визначення першого ($i = 1$) та останнього ($j = n$) стовпців. Отримані результати оцінюються за умовою (4). Якщо умова не виконується, тоді проводяться експерименти для заповнення стовпця $\left[\frac{i+j}{2}\right]$. Далі аналогічно розглядаються стовпці i та $\left[\frac{i+j}{2}\right]$, а також $\left[\frac{i+j}{2}\right]$ та j, тобто на основі дихотомічного підходу виконуються всі експерименти, які не задовольняють умову (4).

В результаті проведених експериментів отримаємо матрицю, в якій частина стовпців не заповнена, оскільки не всі експерименти проводились. Після цього застосовується метод сплайн інтерполяції по кожній діагоналі матриці для покриття всієї визначеної множини експериментів. На завершення, провівши подвійне диференціювання за формулою (3), отримуємо двовимірне ядро ряду Вольтерри.

Запропонований метод описуємо за допомогою такого рекурсивного алгоритму, вважаючи, що i-й та j-й експерименти вже проведено:

1. Оцінити результати i-го та j-го експериментів. Якщо умова (4) не виконується і експерименти не послідовні (стовпці не сусідні: $i+1 \neq j$), то переходимо до 1.1.

1.1. Провести експерименти при $x_1 = 1(t)$ і $x_2 = 1\left(t - T_{2,\left[\frac{i+j}{2}\right]}\right)$ для заповнення $\left[\frac{i+j}{2}\right]$ стовпця матриці.

1.2. Повернутися до п. 1 за умови, що i не змінюється, а $j = \left[\frac{i+j}{2}\right]$.

1.3. Повернутися до п. 1 за умови, що $i = \left[\frac{i+j}{2}\right]$, а j не змінюється.

2. Провести сплайн інтерполяцію по діагоналям матриці.

3. Виконати чисельне диференціювання відповідно до формули (3).

Модельні експерименти. Ефективність наведеного підходу перевірено на модельних експериментах. Розглянемо випадок, коли нелінійна динамічна система має вигляд, показаний на рис. 3, де $A(x(t))$ — лінійна складова, а $F(u(t))$ — нелінійна складова. Як лінійну частину розглянемо різні типові ланки: інерційну, коливальну, напівінтегральну, напівінерційну та ланку затухання (або напівзапізнення). Математичний опис нелінійної частини має вигляд $F(u(t)) = au + bu^2$ $(a, b \in R)$, тобто макромодель вказаної системи можна точно описати рядом Вольтерри із двома членами [2].

У таблиці наведено кількість проведених експериментів для ідентифікації двовимірного ядра Вольтерри традиційним та адаптивним методами, коли лінійна частина визначається різними типовими ланками. Експерименти проведено при $T = 10$, $h = 0{,}1$, $\varepsilon = 0{,}01$, $a = 1$, $b = 1$. Оцінку якості отриманих моделей виконано на основі аналізу результатів обчислювальних експериментів. Було розглянуто два типові випадки: у першому випадку застосування адаптивного методу для побудови двовимірного ядра Вольтерри дозволило скоротити кількість експериментів від 203 до 59, у другому — від 203 до семи. У першому випадку використано модель із напівінтегральною ланкою.

На рис. 4, *а*, наведено перехідні характеристики, отримані з використанням моделей, побудованих традиційним та адаптивним методами, які практично співпадають з точним значенням перехідної характеристики.

Кількість експериментів для побудови двовимірного ядра Вольтерри

Тип ланки для лінійної складової моделі	Передатна функція	Кількість експериментів	
		Традиційний метод	Адаптивний метод
Напівінтегральна	$\frac{1}{\sqrt{p}}$	203	59
Інерційна ланка	$\frac{1}{1+p}$	203	7
Коливальна ланка	$\frac{1}{1+p+p^2}$	203	7
Напівінерційна	$\frac{1}{1+\sqrt{p}}$	203	7
Напівзапізнення	$e^{-\sqrt{p}}$	203	7

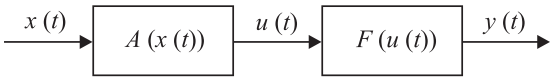


Рис. 3. Структурна схема моделі нелінійного динамічного об'єкта

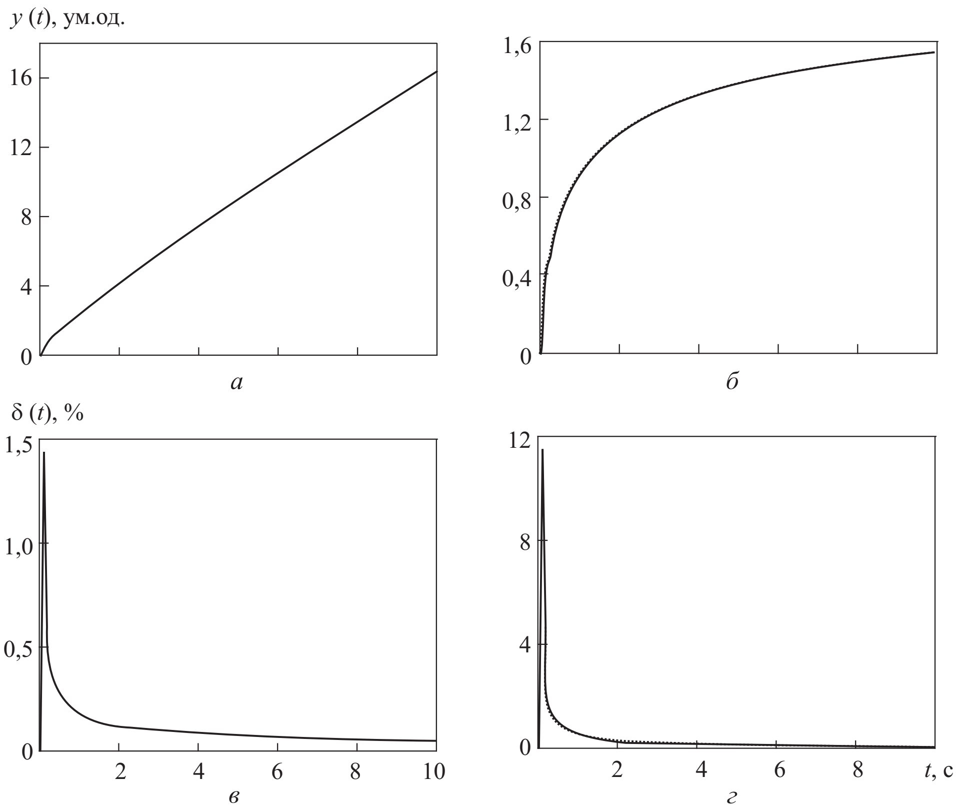


Рис. 4. Перехідні характеристики моделі із напівінтегральною (*а*) і напівінерційною (*б*) ланкою та їх відносні похибки для моделі із напівінтегральною (*в*) і напівінерційною (*г*) ланкою

На рис. 4, *в*, наведено відносні похибки для отриманих перехідних характеристик, які також співпадають.

У другому випадку розглянуто системи, які під час перехідного процесу виходять на усталений режим роботи. На рис. 4, *б*, наведено перехідні характеристики для моделей, отриманих за допомогою традиційного та адаптивного методів, а також точне значення перехідної характеристики для моделі із напівінерційною ланкою в лінійній частині. Відносні похибки перехідних характеристик наведено на рис. 4, *г*.

Отримані результати свідчать про те, що перехідні характеристики, отримані із використанням моделей, які побудовано на основі звичайного та адаптивного методів, практично співпадають.

Висновки

Запропонований адаптивний метод ідентифікації нелінійних динамічних моделей дозволяє отримувати моделі у вигляді рядів Вольтерри із збереженням адекватності моделі, але при цьому кількість необхідних експериментів для побудови ядер відрізняється на порядок. Цей метод дає значний економічний ефект, оскільки дозволяє скоротити часові та фінансові затрати на проведення натурних експериментів. Проведені дослідження щодо оцінки методу стосувались випадку з двовимірними ядрами Вольтерри. Аналогічні міркування можна поширити і на випадки моделей з ядрами Вольтерри вищих порядків. Ефект скорочення кількості експериментів спостерігається на моделях як із зосередженими, так і з розподіленими параметрами. Запропонований метод показав високу ефективність при ідентифікації моделей нелінійних систем, які під час перехідного процесу виходять на усталений режим роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Іванюк В.А., Понеділок В.В., Грищук В.А.* Комп'ютерна реалізація детермінованого способу ідентифікації інтегральних моделей нелінійних динамічних об'єктів// Зб. наук. праць «Математичне та комп'ютерне моделювання». Серія: Технічні науки. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка, 2014, Вип. 10, с. 59—67.
2. *Пупков К.А., Капалин В.И., Ющенко А.С.* Функциональные ряды в теории нелинейных систем. М : Наука, 1976, 448 с.
3. *Сидоров Д.Н.* Методы анализа интегральных динамических моделей: теория и приложения. Иркутск: Из-во ИГУ, 2013, 293 с.

Отримано 19.03.19

REFERENCES

1. Ivanyuk, V.A., Ponedilok, V.V. and Hryshchuk, V.A. (2014), "Computer realization deterministic method of identifying integrated models of nonlinear dynamic objects", *Zbirnyk naukovykh prats "Matematychne ta kompyuterne modelyuvannya". Seriya: Tekhnichni nauky: Kamyanets-Podilskyy: Kamyanets-Podilskyy natsionalnyy universytet imeni Ivana Ohiyenka*, no. 10, pp. 59-67.
2. Pupkov, K.A., Kapalin, V.I. and Yushchenko, A.S. (1976), *Funktsionalnyye ryady v teorii nelineynykh sistem* [Functional series in the theory of nonlinear systems], Nauka, Moscow, USSR.
3. Sidorov, D. (2013), *Metody analiza integralnykh dinamicheskikh modeley: teoriya i prilozheniya* [Methods of analysis of integral dynamic models: theory and applications], Izdatelstvo IGU, Irkutsk, Russia.

Received 19.03.19

В.А. Иванюк, В.А. Федорчук

АДАПТИВНЫЙ МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ РЯДАМИ ВОЛЬТЕРРЫ

Рассмотрена задача идентификации моделей нелинейных динамических систем, представленных в форме интегральных рядов Вольтерры. При применении традиционного подхода основной проблемой является проведение большого числа необходимых экспериментов, которое возрастает в экспоненциальной зависимости относительно размерности ядра. Значительное число экспериментов во многих случаях приводит к невозможности применения метода рядов Вольтерры для исследования нелинейных динамических систем. Предложен адаптивный метод идентификации моделей нелинейных динамических систем, который позволяет получать модели в виде рядов Вольтерры с сохранением адекватности по отношению к моделям, получаемым традиционным методом, но при этом число необходимых экспериментов для построения ядер меньше примерно на порядок. Предложенный метод рассмотрен на примере задачи идентификации двумерного ядра. Полученные результаты можно распространить и на случаи с ядрами Вольтерры высших порядков.

К л ю ч е в ы е с л о в а: идентификация нелинейных динамических систем, ряды Вольтерры, адаптивный метод идентификации.

V.A. Ivaniuk, V.A. Fedorchuk

ADAPTIVE METHOD OF IDENTIFICATION OF MODELS OF NONLINEAR DYNAMIC SYSTEMS WITH USING INTEGRAL VOLTERRA SERIES

The article is devoted to the problem of identifying models of nonlinear dynamic systems, presented in the form of Volterra integral series. When applying the traditional approach, the key problem is to conduct numerous necessary experiments, which grows in an exponential relationship with respect to the dimension of the nucleus. A significant number of experiments, in many cases, make it impossible to use the Volterra series method for studying nonlinear dynamical systems. An adaptive method for identifying models of nonlinear dynamic systems is proposed, which allows obtaining models in the form of Volterra series with preservation of adequacy with respect to models obtained by the traditional method, but the number of necessary experiments to build nuclei is less by about a one order of magnitude. The proposed method is considered to identify thetwo-dimensional kernel. The results can be extended to cases with higher-order Volterra kernels.

K e y w o r d s: identification of nonlinear dynamic systems, Volterra series, adaptive method of identification.

ІВАНЮК Віталій Анатолійович, канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри інформатики Кам'янець-Подільського національного університету ім. Івана Огієнка. У 2003 р. закінчив Кам'янець-Подільський держуніверситет. Область наукових досліджень — математичне та комп'ютерне моделювання динамічних об'єктів.

ФЕДОРЧУК Володимир Анатолійович, д-р техн. наук, професор, зав. кафедри інформатики Кам'янець-Подільського національного університету ім. Івана Огієнка. У 1984 р. закінчив Кам'янець-Подільський державний педагогічний ін-т. Область наукових досліджень — математичне та комп'ютерне моделювання динамічних процесів у керованих електромеханічних системах.