doi

УДК 004.942

Я.А. Калиновский[1], д-р техн. наук, **Ю.Е. Бояринова**[1,2], канд. техн. наук,
Я.В. Хицко[2], канд. техн. наук
[1] Институт проблем регистрации информации НАН Украины
(Украина, 03113, Киев, ул. Н. Шпака, 2,
тел. (044) 454 21 38; e-mail: kalinovsky@i.ua),
[2] Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический ин-т им. Игоря Сикорского»
(Украина, 03113, Киев, пр-т Победы, 37)

Методика выбора гиперкомплексных числовых систем для моделирования цифровых реверсивных фильтров третьего и четвертого порядков

Представлена методика выбора гиперкомплексных числовых систем (ГЧС) для моделирования цифровых реверсивных фильтров, основанная на анализе выражения нормы знаменателя гиперкомплексной передаточной функции. Выбраны ГЧС, позволяющие получить в передаточной функции фильтра полный набор степеней оператора сдвига. Эти ГЧС имеют слабозаполненные изоморфизмы, переход к которым позволяет существенно сократить число вещественных операций при функционировании фильтра.

Ключевые слова: гиперкомплексная числовая система, линейная свертка, изоморфизм, умножение, бикомплексные числа, квадриплексные числа, система компьютерной алгебры.

Цифровой фильтр — это цифровая система, которая используется для фильтрации дискретного сигнала. Он может быть реализован как программным методом, так и с помощью специальной аппаратуры. В обоих случаях цифровой фильтр можно применять для фильтрации в реальном времени и для предварительно сохраненного значения сигнала. Будем рассматривать только алгоритмы синтеза структуры программного фильтра, заметив однако, что на их основе могут быть реализованы и аппаратные решения цифровых фильтров. Поскольку цифровые фильтры с гиперкомплексными параметрами имеют большее быстродействие и лучшие характеристики по интегральной параметрической чувствительности [1—12], применение ГЧС для синтеза структур цифровых фильтров может быть весьма эффективны.

© Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е., Хицко Я.В., 2019

Введем следующие обозначения:

1. Элементы базиса ГЧС будем обозначать только индексами с предшествующим знаком с помощью символов шрифта Arial Black 10. Например: $-e_2$ обозначим как *–2* , а $e_2 e_1$ — как *21*. В случаях, когда такая символика не отражает истинного смысла выражений, применяется обычная запись.

2. Поскольку рассматриваются только коммутативные ГЧС, таблицы умножения Кэли ГЧС записаны не в табличном виде, а в виде одной строки, состоящей из подстрок таблицы, начинающихся с элемента главной диагонали, с учетом пункта 1. Например, таблица Кэли для триплексных чисел

	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	$(e_3 - e_1)/2$	$-e_2$
e_3	e_3	$-e_2$	e_1

будет записана в виде: *1 2 3* (*3–1*)/2 *–2 1*.

Принцип перехода от вещественных фильтров к гиперкомплексным эквивалентам. Представление передаточной функции цифрового фильтра с действительными параметрами в виде передаточной функции с гиперкомплексными параметрами основано на следующем.

Пусть есть ГЧС $\Gamma(e,m)$ размерности m. Рассмотрим отношение двух полиномов с гиперкомплексными коэффициентами от оператора сдвига $z = e^{j\omega}$:

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \tag{1}$$

где полиномы в числителе и знаменателе имеют вид

$$P(z) = \sum_{i=0}^{l} p_i z^{-i}, \quad Q(z) = \sum_{i=0}^{l} q_i z^{-i}, \quad p_i, q_i \in \Gamma(e,m), \; q_0 = 1. \tag{2}$$

Функция $R(z)$ (1) принадлежит классу дробно-рациональных функций, у которых в числителе и знаменателе присутствуют элементы базиса $e = \{e_1, ..., e_m\}$ некоторой ГЧС $\Gamma(e,m)$. Приведем функцию (1) к виду гиперкомплексной функции, напомнив, что гиперкомплексная функция имеет следующую форму [9]:

$$f(X) = \sum_{i=1}^{m} f_1(x_1, ..., x_m)\, e_i, \quad X = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i \in \Gamma, \quad x_i \in R .$$

Теоретической основой такого преобразования является алгоритм деления двух гиперкомплексных чисел [13]. Для его реализации необходимо числитель и знаменатель выражения (1) умножить на полином, сопряженный знаменателю и имеющий вид [13]

$$\overline{Q(z)} = \sum_{i=0}^{l} q_i z^{-i}. \tag{3}$$

Произведение $Q(z)\overline{Q(z)}$ есть норма полинома $Q(z)$, умноженная на единичный элемент ε системы $\Gamma(e, m)$:

$$Q(z)\overline{Q(z)} = N(Q(z))\varepsilon, \tag{4}$$

где $N(Q(z)) \in R$. Норма гиперкомплексного числа есть форма m-й степени относительно компонентов этого числа. Поскольку $Q(z)$ — полином l-й степени, норма $N(Q(z))$ будет формой $l\,m$-й степени относительно оператора z. Соответственно и сопряженное число $\overline{Q(z)}$ будет формой степени $l(m-l)$, а произведение $P(z)\overline{Q(z)}$ — формой степени m относительно элементов гиперкомплексного числа, а относительно оператора z — формой степени $m\,l$.

Таким образом, (1) превращается в функцию

$$R(z) = \frac{P(z)\overline{Q(z)}}{N(Q(z))}, \tag{5}$$

которую можно представить в виде гиперкомплексной функции, так как ее знаменатель — вещественное число

$$\frac{P(z)\overline{Q(z)}}{N(Q(z))} = \sum_{i=1}^{m} \frac{f_i(z)}{N(Q(z))} e_i = \sum_{i=1}^{m} R_i(z)\, e_i. \tag{6}$$

Полиномы, стоящие в числителях и знаменателях компонент гиперкомплексной функции (5), параметрически зависят от коэффициентов полиномов (3). Поскольку в соответствии с (2) $q_0 = 1$, знаменатель в (6) можно представить в виде $N(Q(z)) = N^*(Q(z)) + 1$.

Гиперкомплексная передаточная функция. Представим, что (2) — передаточная функция цифрового фильтра, в котором информация имеет гиперкомплексную структуру и преобразуется по законам выполнения гиперкомплексных операций. Передаточная функция такого фильтра также будет гиперкомплексная,

$$R(z) = R_1(z)\,e_1 + R_2(z)\,e_2 + \ldots + R_m(z)\,e_m, \tag{7}$$

образуя по каждой размерности свой действительный фильтр. Заметим, что сигнал на входе имеет только одну ненулевую компоненту, но после первой же операции он преобразуется в полное гиперкомплексное число.

Пусть задан также цифровой фильтр l m-го порядка с действительной передаточной функцией

$$H = \frac{\sum_{i=0}^{ml} \varphi_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{ml} \varphi_i z^{-i} + 1}. \tag{8}$$

Выбирая для $k \in \overline{1, ..., ml}$ такой набор параметров полиномов $f_k(z)$ и $N^*(Q(z))$, что функция (7) принимает вид

$$R_k(z) = \frac{f_k(z)}{N^*(Q(z))+1} = \frac{\sum_{i=0}^{ml} \varphi_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{ml} \varphi_i z^{-i} + 1}, \tag{9}$$

и, полагая для определенности без ограничения общности $k = 1$, видим, что фильтр с передаточной функцией (8) фильтрует входной сигнал по каналу первой размерности точно так же, как и фильтр с передаточной функцией (9). При этом на выходе получаем сигнал по каналу первой размерности, но первый фильтр имеет порядок, равный l, а второй — порядок, равный ml.

Синтез гиперкомплексного фильтра по его вещественному оригиналу. Рассмотрим процесс синтеза гиперкомплексного фильтра по его вещественному оригиналу — фильтру третьего порядка. Пусть передаточная функция такого фильтра имеет вид

$$H_R = \frac{\varphi_3 z^{-3} + \varphi_2 z^{-3} 2 + \varphi_1 z^{-1} + \varphi_0}{\varphi_3 z^{-3} + \varphi_2 z^{-3} 2 + \varphi_1 z^{-1} + 1}, \tag{10}$$

где все коэффициенты вещественные. Необходимо синтезировать гиперкомплексный фильтр, эквивалентный данному, но порядок которого равен единице, т.е. передаточная функция (1) принимает вид

$$H_{\text{г}} = \frac{A + Bz^{-1}}{\varepsilon + Cz^{-1}}, \tag{11}$$

где A, B и C — гиперкомплексные числа, принадлежащие некоторой коммутативной ГЧС третьей размерности. В соответствии с (6) запишем

$$H_{\text{г}} = \frac{A + Bz^{-1}}{\varepsilon + Cz^{-1}} = \sum_{i=1}^{3} (A + Bz^{-1}) \overline{(\varepsilon + Cz^{-1})} / N(\varepsilon + Cz^{-1}) =$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,c_1,c_2,c_3,z^{-1})*e_i/\beta(c_1,c_2,c_3,z^{-1}),$$

где $\alpha_i(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,c_1,c_2,c_3,z^{-1})$ и $\beta(c_1,c_2,c_3,z^{-1})$ — полиномы третьей степени относительно оператора сдвига z^{-1}, а остальные переменные — параметры. При условии, что сигнал обрабатывается по первому каналу, т.е. $i=1$, передаточная функция по первому каналу будет иметь вид

$$H_{\text{г}}^1=\frac{\alpha_i(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,c_1,c_2,c_3,z^{-1})}{\beta(c_1,c_2,c_3,z^{-1})},$$

а условием эквивалентности будет возможность выбора параметра a_1,a_2, $a_3,b_1,b_2,b_3,c_1,c_2,c_3$такого, что

$$H_{\text{г}}^1=H_{\text{г}}. \tag{12}$$

Если полиномы $\alpha_i(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,c_1,c_2,c_3,z^{-1})$ и $\beta(c_1,c_2,c_3,z^{-1})$ представить в виде

$$\alpha_1(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,c_1,c_2,c_3,z^{-1})=$$

$$=\sum_{j=0}^{3}\alpha_1^j(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,c_1,c_2,c_3)\,z^{-j},$$

$$\beta(c_1,c_2,c_3)=\sum_{i=1}^{3}\beta^j(c_1,c_2,c_3)\,z^{-j},$$

то, используя метод неопределенных коэффициентов, равенство (12) можно преобразовать в систему из семи уравнений с девятью неизвестными:

$$\begin{gathered}\alpha_1^j(a_1,\,a_2,\,a_3,\,b_1,\,b_2,\,b_3,\,c_1,\,c_2,\,c_3)=\varphi_j,\;\; j=0,\,...,\,3,\\ \beta^j(c_1,\,c_2,\,c_3)=\varphi_j,\;\; j=0,\,...,\,3.\end{gathered} \tag{13}$$

Таким образом, синтез гиперкомплексного фильтра по его вещественному оригиналу сводится к определению гиперкомплексных параметров в выражении (11), компоненты которых являются решениями системы (13). Однако при этом остается открытым вопрос выбора ГЧС, с помощью которой будет построена система (13).

Необходимым условием существования вещественных решений системы (13) является существование вещественных решений автономной системы из трех последних уравнений (13). Естественно, существование вещественных решений этой системы не гарантирует существования вещественных решений системы (13), однако отсутствие их свидетельствует о том, что ГЧС, в которой построено выражение нормы, не пригодна для синтеза структуры фильтра. Кроме того, для выбора ГЧС существенным является требование существования изоморфной ГЧС с незаполненной структурой, переход к которой позволит сократить число вещественных операций при функционировании фильтра.

Анализ различных ГЧС для синтеза фильтра третьего порядка. Задача синтеза гиперкомплексного фильтра сводится к выбору подходящей ГЧС третьей размерности и определении гиперкомплексных чисел A, B и C таких, что в соответствии с (4) передаточная функция (11) становится эквивалентна (10).

В табл. 1 приведены (в обозначениях [13]) таблицы умножения Кэли возможных коммутативных ГЧС третьей размерности, а также нормы знаменателя функции (11) в них.

Составим для ГЧС G_{31} систему эквивалентирования (8) для коэффициентов c_1, c_2, c_3:

$$3c_1 = \varphi_1,$$
$$3c_2 = \varphi_2,$$
$$c_1^3 = \varphi_3.$$

Эта система в общем случае не имеет решений, и это значит, что ГЧС не пригодна для синтеза гиперкомплексного фильтра.

Таблица 1. **Таблицы Кэли и нормы для различных ГЧС третьего порядка**

ГЧС	Таблица Кэли	Норма знаменателя передаточной функции
G_{31}	*1 2 3 0 0 0*	$1+3c_1 z^{-1}+3c_1^2 z^{-2}+c_1^3 z^{-3}$
G_{32}	*1 2 3 3 0 0*	$1+3c_1 z^{-1}+3c_1^2 z^{-2}+c_1^3 z^{-3}$
G_{33}	*1 2 3 3 1 2*	$1+3c_1 z^{-1}+(3c_1^2-3c_2c_3)z^{-2}+(c_1^3-3c_1c_2c_3+c_2^3+c_3^2)z^{-3}$
T	*1 2 3 (3–1)/2 – 2 1*	$1+(3c_1-c_3)z^{-1}+(c_2^2+3c_1^2-3c_1c_3-c_3^2)z^{-2}+$ $+(c_1c_2^2+c_2^2c_3+c_1^3-c_3c_1^2+c_3^3-c_1c_3^2)z^{-3}$
$3R$	*1 0 0 1 0 1*	$c_2c_3 z^{-2}+c_1c_2c_3 z^{-3}$
$R\oplus W$	*1 0 0 2 3 2*	$(c_2^2-c_3^2)z^{-2}+c_1(c_2^2-c_3^2)z^{-3}$
$R\oplus C$	*1 0 0 2 3 -2*	$(c_2^2-c_3^2)z^{-2}+c_1(c_2^2+c_3^2)z^{-3}$
$R\oplus Du$	*1 0 0 2 3 0*	$c_2^2 z^{-2}+c_1c_2^2 z^{-3}$

Рассмотрим ГЧС G_{33}. Для нее система (8) принимает вид

$$3c_1 = \varphi_1,$$
$$3c_1^2 - 3c_2c_3 = \varphi_2,$$
$$c_1^3 - 3c_1c_2c_3 + c_2^3 + c_3^3 = \varphi_3.$$

Эта система может иметь вещественные решения при соответствующих значениях правых частей уравнений.

Анализ остальных ГЧС третьей размерности показывает, что сформулированным требованиям удовлетворяют только рассмотренная ГЧС G_{33}, а также система триплексных чисел T. Однако, как показано в [1, 13], системы T, G_{33} и $R \oplus C$ изоморфны: $T \cong G_{33} \cong R \oplus C$. При моделировании функционирования фильтра для сокращения числа вещественных операций целесообразно выполнить изоморфный переход из систем T или G_{33} в изоморфную им ГЧС $R \oplus C$, выполнить вычисления, и возвратиться обратно. Но если матрица оператора изоморфизма систем T и $R \oplus C$ имеет простой вид [13],

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

и не добавляет вещественных умножений, то оператор изоморфизма систем G_{33} и $R \oplus C$ имеет более сложный вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 1 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

Как видим, при изоморфном переходе из G_{33} в $R \oplus C$ и обратно потребуется компоненты сигнала умножать на иррациональное число, что, естественно, приведет к увеличению числа умножений. Следовательно, для моделирования гиперкомплексного фильтра целесообразно использовать гиперкомплексную числовую систему триплексных чисел T.

Выбор ГЧС для синтеза фильтра четвертого порядка. Рассмотрим канонические ГЧС четвертой размерности [11, 12]. В табл. 2 приведены таблицы Кэли для этих ГЧС, а в табл. 3 — общий вид нормы знаменателя передаточной функции (11) для этих же ГЧС.

Как видно из табл. 2, полный набор степеней оператора сдвига z^{-1} от 0 до 4 имеется только в выражениях норм таких ГЧС: K, G_{41} — G_{46}, $Dk\,(C, W, 4)$, $Dk\,(C, Du, 4)$, $Dk\,(W, W, 4)$, $Dk\,(W, Du, 4)$, $Dk\,(Du, Du, 4)$. Однако полный набор компонент гиперкомплексного числа присутствует не во всех выражениях норм. Этим требованиям удовлетворяют только ГЧС K и $Dk\,(W, W, 4)$.

Далее необходимо определить, имеют ли ГЧС K и $Dk\,(W, W, 4)$ изоморфные им слабозаполненные системы. В соответствии с теоремой Ведерберна—Артина [14, 15] такие ГЧС без нильпотентных элементов должны иметь изоморфные ГЧС в виде прямых произведений вещественных R и комплексных C полей. Для четвертой размерности есть три варианта таких прямых произведений: $C \oplus C$, $R \oplus R \oplus C$ и $R \oplus R \oplus R \oplus R$. В соответствии с табл. 2 это гиперкомплексные числовые системы $2C$, $W1C$ и $4R$.

Таким образом, необходимо установить истинность таких изоморфизмов:

$$K \cong 2C,\ \ K \cong W1C,\ \ K \cong 4R, \tag{14}$$

$$Dk\,(W, W, 4) \cong 2C,\quad Dk\,(W, W, 4) \cong W1C,\quad Dk\,(W, W, 4) \cong 4R. \tag{15}$$

Из [13] следует, что для проверки истинности каждого из этих изоморфизмов необходимо составить и решить систему из 64-х нелинейных (а именно, квадратичных) уравнений с 16-ю неизвестными:

$$\sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4} x_{ik}x_{jl}\delta_{kl}^{s} = \sum_{m=1}^{4} x_{ms}\gamma_{ij}^{m},\quad i, j, s = 1, ..., 4,$$

где δ_{ij}^{k} и γ_{ij}^{k}, $i, j, k = 1, ..., 4$ — структурные константы обоих ГЧС, стоящих в левой и правой частях условия изоморфизма, а x_{ij} — неизвестные компоненты

Таблица 2. **Таблицы Кэли для различных ГЧС четвертого порядка**

ГЧС	Таблица Кэли	ГЧС	Таблица Кэли
K	*1 2 3 4 -1 4 -3 -1-2 1*	G_{44}	*1 2 3 4 4 0 0 4 0 0*
$2C$	*1 2 0 0 -1 0 0 3 4 -3*	G_{45}	*1 2 3 4 4 0 0 -4 0 0*
$W1C$	*1 0 0 0 2 0 0 3 4 4*	G_{46}	*1 2 3 4 4 4 0 0 0 0*
$4R$	*1 0 0 0 2 0 0 3 0 4*	$Dk\,(C, W, 4)$	*1 2 3 4 -1 4 -3 1 2 -1*
$W1Du$	*1 0 0 0 2 0 0 3 4 0*	$Dk\,(C, Du, 4)$	*1 2 3 4 -1 4 -3 0 0 0*
CDu	*1 2 0 0 -1 0 0 3 4 0*	$Dk\,(W, W, 4)$	*1 2 3 4 1 4 3 1 2 1*
$2Du$	*1 2 0 0 0 0 0 3 4 0*	$Dk\,(W, Du, 4)$	*1 2 3 4 1 4 3 0 0 0*
$2W$	*1 2 0 0 1 0 0 3 4 3*	$Dk\,(Du, Du, 4)$	*1 2 3 4 0 4 0 0 0 0*
CW	*1 2 0 0-1 0 0 3 4 3*	RT	*1 0 0 0 2 3 4 (4-2)/2 -3 2*
DuW	*1 2 0 0 0 0 0 1 2 1*	RG_{31}	*1 0 0 0 2 3 4 0 0 0*
G_{41}	*1 2 3 4 -1 4 -3 0 0 0*	RG_{32}	*1 0 0 0 2 3 4 4 0 0*
G_{42}	*1 2 3 4 0 0 0 0 0 0*	RG_{33}	*1 0 0 0 2 3 4 4 2 3*
G_{43}	*1 2 3 4 4 0 0 0 0 0*		

Таблица 3. **Общий вид норм знаменателя передаточной функции для различных ГЧС четвертого порядка**

ГЧС	Норма знаменателя передаточной функции
K	$1+4c_1z^{-1}+(-2c_4^2+6c_1^2+2c_3^2+2c_2^2)z^{-2}+(4c_1c_2^2-4c_1c_4^2+4c_1c_3^2+4c_1^3+$ $+8c_2c_3c_4)z^{-3}+(c_1^4+c_2^4+c_3^4+c_4^4+2c_1^2c_2^2+2c_1^2c_3^2-2c_1^2c_4^2-$ $-2c_2^2c_3^2+2c_2^2c_4^2+2c_3^2c_4^2+8c_1c_2c_3c_4)z^{-4}$
$2C$	$(c_3^2+c_4^2)z^{-2}+2c_1(c_3^2+c_4^2)z^{-3}+(c_1^2(c_3^2+c_4^2)+c_2^2(c_3^2+c_4^2)z^{-4}$
$W1C$	$(c_2(c_3^2+c_4^2)z^{-3}+(c_1c_2(c_3^2+c_4^2)z^{-4}$
$4R$	$c_2c_3c_4z^{-1}+c_1c_2c_3c_4z^{-2}$
$W1Du$	$c_2c_3^2z^{-3}+c_1c_2c_3^2z^{-4}$
CDu	$c_3^2z^{-2}+2c_1c_3^2z^{-3}+c_3^2(c_1^2+c_2^2)z^{-4}$
$2Du$	$c_3^2z^{-2}+2c_1c_3^2z^{-3}+c_1^2c_3^2z^{-4}$
$2W$	$(c_3^2-c_4^2)z^{-2}+2c_1(c_3^2-c_4^2)z^{-3}+(c_3^2c_1^2-c_3^2c_2^2-c_4^2c_1^2+c_4^2c_2^2)z^{-4}$
CW	$(c_3^2-c_4^2)z^{-2}+2c_1(c_3^2-c_4^2)z^{-3}+(c_3^2c_1^2+c_3^2c_2^2-c_4^2c_1^2-c_4^2c_2^2)z^{-4}$
DuW	$(c_3^2-c_4^2)z^{-2}+2c_1(c_3^2-c_4^2)z^{-3}+(c_3^2c_1^2-c_4^2c_1^2)z^{-4}$
G_{41}	$1+4c_1z^{-1}(6c_1^2+2c_2^2)z^{-2}+4c_1(c_1^2+c_2^2)z^{-3}+(c_1^2+c_2^2)z^{-4}$
G_{42}—G_{46}	$1+4c_1z^{-1}+6c_1^2z^{-2}+4c_1^3z^{-3}+c_1^4z^{-4}$
$Dk\,(C, W, 4)$	$1+4c_1z^{-1}+(6c_1^2+2c_2^2-2c_3^2+2c_4^2)z^{-2}+(c_1(4c_1^2+4c_2^2-2c_3^2+2c_4^2)-$ $-8c_2c_3c_4)z^{-3}+(c_1^4+c_2^4+c_3^4+c_4^4+2c_1^2c_2^2-2c_1^2c_3^2+2c_1^2c_4^2+$ $+2c_2^2c_3^2-2c_2^2c_4^2+2c_3^2c_4^2-8c_1c_2c_3c_4)z^{-4}$
$Dk\,(W, Du, 4)$	$1+4c_1z^{-1}(6c_1^2+2c_2^2)z^{-2}+4c_1(c_1^2+c_2^2)z^{-3}+(c_1^2+c_2^2)^2z^{-4}$
$Dk\,(W, W, 4)$	$1+4c_1z^{-1}+(6c_1^2-2c_2^2-2c_3^2-2c_4^2)z^{-2}+(c_1(4c_1^2-4c_2^2-2c_3^2-2c_4^2)+$ $+8c_2c_3c_4)z^{-3}+(c_1^4+c_2^4+c_3^4+c_4^4-2c_1^2c_2^2-2c_1^2c_3^2-2c_1^2c_4^2-$ $-2c_2^2c_3^2-2c_2^2c_4^2-2c_3^2c_4^2+8c_1c_2c_3c_4)z^{-4}$
$Dk\,(W, Du, 4)$	$1+4c_1z^{-1}+(6c_1^2-2c_2^2)z^{-2}+4c_1(c_1^2-c_2^2)z^{-3}+(c_1^2-c_2^2)^2z^{-4}$
$Dk\,(Du, Du, 4)$	$1+4c_1z^{-1}+6c_1^2z^{-2}+4c_1^3z^{-3}+c_1^4z^{-4}$
RT	$(c_3^2+c_4^2-c_2c_4^2+c_2c_3^2+c_3c_4^2-c_2c_4^2)z^{-2}+$ $+(c_1c_2^3+c_1c_4^3-c_1c_2c_4^2+c_1c_2c_3^2-c_1c_4c_2^2+c_1c_4c_3^2)z^{-4}$
RG_{31}—RG_{32}	$c_2^3z^{-3}+c_1c_2^3z^{-4}$
RG_{33}	$(c_2^3+c_3^3+c_4^3-3c_2c_3c_4)z^{-3}+c_1(c_2^3+c_3^3+c_4^3-3c_2c_3c_4)z^{-4}$

оператора изоморфизма. Решения системы (14) можно представить в виде матрицы

$$L = \|x_{ij}\|, \tag{16}$$

которая и является выражением оператора изоморфизма двух ГЧС. Однако не всякое решение системы (16) будет оператором изоморфизма. Такое решение должно удовлетворять двум требованиям:

1) все его компоненты должны быть вещественными;

2) детерминант матрицы должен быть отличен от нуля, так как кроме этого оператора должен существовать и обратный.

Решение, удовлетворяющее этим требованиям, называется нетривиальным. Система (15) всегда имеет хотя бы одно тривиальное решение: $x_{ij} = 0$; $i, j = 1, \ldots, 4$. Если есть хотя бы одно нетривиальное решение, то эти две гиперкомплексные числовые системы являются изоморфными. Если таких решений нет, то они не изоморфны.

Следовательно, небходимо проанализировать все решения системы (16) и выбрать те, которые соответствуют требованиям 1 и 2. Поскольку выполнить это вручную крайне сложно, использован разработанный программный комплекс для гиперкомплексных вычислений [15, 16]. Он включает специальную процедуру *Izo*3 для определения изоморфизма двух ГЧС. Следует заметить, что выражения норм в табл. 1 и 3 также были получены с помощью этого программного комплекса.

В начале сеанса работы осуществляется вызов и присоединение программного комплекса для гиперкомплексных вычислений, который имеет идентификатор *HYP*4:

```
restart
read ("F:\\HyperMaple\\HYP4.mw"):
with (HYP4) : with (linalg)
```

Затем вызываются из памяти таблицы Кэли всех участвующих в расчетах ГЧС:

```
K := SearchHNS (K, LibHNS()) :
Dk (W, W, 4) := SearchHNS (Dk (W, W, 4), LibHNS()) :
R4 := SearchHNS (4 R, LibHNS()) :
C2 := SearchHNS (2 C, LibHNS()) :
W1C := SearchHNS (W1C, LibHNS()) :
```

Далее в процедуре *Izo*3 используется процедура Maple решения систем уравнений solve, в которой по умолчанию определяется 100 решений. Поскольку система (14) может иметь гораздо больше решений, следует назначить большее число решений, например:

```
_MaxSols := 1000:
```

Теперь можно применять процедуру определения изоморфизма *Izo*3. Так, для ГЧС $Dk\,(W,\,W,\,4)$ и $W1C$ решение имеет вид

Izo3 (*Dk* (*W*, *W*, 4), *R4*) [1]

"ns := ", 625, *Systema are isomorphic* .

Здесь первое сообщение показывает число решений (625), а второе — сообщает, что системы изоморфны: $Dk\,(W,\,W,\,4) \cong 4R$. Для всех остальных случаев получаем

*Izo*3 (*Dk* (*W*, *W*, 4), *W*1*C*) [1] "ns := ", 350, *Systema are nonisomorphic* ,

*Izo*3 (*Dk* (*W*, *W*, 4), *C*2) [1] "ns := ", 196, *Systema are nonisomorphic* ,

*Izo*3 (*K*, *C*2) [1] "ns := ", 188, *Systema are isomorphic* ,

*Izo*3 (*K*, *R*4) [1] "ns := ", 16, *Systema are nonisomorphic* ,

*Izo*3 (*K*, *W*1*C*) [1] "ns := ", 56, *Systema are nonisomorphic* .

Для получения этих результатов требуется от двух до 30 с машинного времени.

Таким образом, из шести изоморфизмов (14), (15) истинны только два: $K \cong 2C$ и $Dk\,(W,\,W,\,4) \cong 4R$. Поскольку отношение изоморфности транзитивно, из $K \cong 2C$ и $Dk\,(W,\,W,\,4) \ncong 2C$ или $K \ncong 4R$ и $Dk\,(W,\,W,\,4) \cong 4R$ следует: $K \ncong Dk\,(W,\,W,\,4)$. Прямое доказательство этого факта с помощью процедуры Izo3 требует многих часов машинного времени.

Для проектирования структуры гиперкомплексного цифрового фильтра также необходимы явные виды операторов изоморфизма, что может обеспечить процедура *Izo*3. Так, для изоморфизма $K \cong 2C$ существует восемь операторов, матрицы которых имеют вид

*Izo*3 (*K*, *C*2) [2]

$$\begin{bmatrix} 1. & 0. & 1. & 0. \\ 0. & 1. & 0. & 1. \\ 0. & -1. & 0. & 1. \\ 1. & 0. & -1. & 0. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1. & 0. & 1. & 0. \\ 0. & 1. & 0. & -1. \\ 0. & -1. & 0. & -1. \\ 1. & 0. & -1. & 0. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1. & 0. & 1. & 0. \\ 0. & -1. & 0. & 1. \\ 0. & 1. & 0. & 1. \\ 1. & 0. & -1. & 0. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1. & 0. & 1. & 0. \\ 0. & -1. & 0. & -1. \\ 0. & 1. & 0. & -1. \\ 1. & 0. & -1. & 0. \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1. & 0. & 1. & 0. \\ 0. & 1. & 0. & 1. \\ 0. & 1. & 0. & -1. \\ -1. & 0. & 1. & 0. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1. & 0. & 1. & 0. \\ 0. & 1. & 0. & -1. \\ 0. & 1. & 0. & 1. \\ -1. & 0. & 1. & 0. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1. & 0. & 1. & 0. \\ 0. & -1. & 0. & 1. \\ 0. & -1. & 0. & -1. \\ -1. & 0. & -1. & 0. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1. & 0. & 1. & 0. \\ 0. & -1. & 0. & -1. \\ 0. & -1. & 0. & 1. \\ -1. & 0. & 1. & 0. \end{bmatrix},$$

Для изоморфизма $Dk\,(W,\,W,\,4) \cong 4R$ существует 24 оператора, матрицы которых имеют вид

$$\begin{bmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ -1. & -1. & 1. & 1. \\ 1. & -1. & -1. & 1. \\ -1. & 1. & -1. & 1. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ -1. & -1. & 1. & 1. \\ 1. & -1. & 1. & -1. \\ -1. & 1. & 1. & -1. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ -1. & 1. & -1. & 1. \\ 1. & -1. & -1. & 1. \\ -1. & -1. & 1. & 1. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ -1. & 1. & 1. & -1. \\ 1. & -1. & 1. & -1. \\ -1. & -1. & 1. & 1. \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ -1. & 1. & -1. & 1. \\ 1. & 1. & -1. & -1. \\ -1. & 1. & 1. & 1. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ -1. & 1. & 1. & -1. \\ 1. & 1. & -1. & -1. \\ -1. & 1. & -1. & 1. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ 1. & -1. & -1. & 1. \\ -1. & -1. & 1. & 1. \\ -1. & 1. & -1. & 1. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ 1. & -1. & 1. & -1. \\ -1. & -1. & 1. & 1. \\ -1. & 1. & 1. & -1. \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ 1. & -1. & -1. & 1. \\ -1. & 1. & -1. & 1. \\ -1. & -1. & 1. & 1. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ 1. & -1. & 1. & -1. \\ -1. & 1. & 1. & -1. \\ -1. & -1. & 1. & 1. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ 1. & 1. & -1. & -1. \\ -1. & 1. & -1. & 1. \\ -1. & 1. & 1. & -1. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ 1. & 1. & -1. & -1. \\ -1. & 1. & 1. & -1. \\ -1. & 1. & -1. & 1. \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ 1. & -1. & -1. & 1. \\ 1. & -1. & 1. & -1. \\ 1. & 1. & -1. & -1. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ 1. & -1. & 1. & -1. \\ 1. & -1. & -1. & 1. \\ 1. & 1. & -1. & -1. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ 1. & 1. & -1. & -1. \\ 1. & -1. & -1. & 1. \\ 1. & -1. & 1. & -1. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ 1. & 1. & -1. & -1. \\ 1. & -1. & 1. & -1. \\ 1. & -1. & -1. & 1. \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ 1. & -1. & -1. & 1. \\ 1. & 1. & -1. & -1. \\ 1. & -1. & 1. & -1. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ 1. & -1. & 1. & -1. \\ 1. & 1. & -1. & -1. \\ 1. & -1. & -1. & 1. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ -1. & 1. & 1. & -1. \\ -1. & 1. & -1. & 1. \\ 1. & 1. & -1. & -1. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ -1. & 1. & -1. & 1. \\ -1. & 1. & 1. & -1. \\ 1. & 1. & -1. & -1. \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ -1. & 1. & -1. & 1. \\ -1. & -1. & 1. & 1. \\ 1. & -1. & -1. & 1. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ -1. & 1. & 1. & -1. \\ -1. & -1. & 1. & 1. \\ 1. & -1. & 1. & -1. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ -1. & -1. & 1. & 1. \\ -1. & 1. & 1. & -1. \\ 1. & -1. & 1. & -1. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ -1. & -1. & 1. & 1. \\ -1. & 1. & -1. & 1. \\ 1. & -1. & -1. & 1. \end{bmatrix}.$$

Структура всех операторов изоморфизма такова, что при изоморфном переходе от одной ГЧС к изоморфной ей и обратно не требуются дополнительные операции вещественного умножения, а только — дополнительные операции сложения. Например, при переходе $K \Leftrightarrow 2C$ требуется восемь сложений и при переходе $Dk\,(W, W, 4) \Leftrightarrow 4R$ — восемь сложений.

ISSN 0204–3572. Electronic Modeling. 2019. V. 41. № 4

Выводы

Предложенный метод анализа выражений для норм знаменателя передаточной функции гиперкомплексного фильтра позволяет эффективно выбрать ГЧС, обладающие необходимыми свойствами. Эти ГЧС позволяют получить в передаточной функции фильтра полный набор степеней оператора сдвига. Они имеют изоморфные слабозаполненные ГЧС, переход к которым позволяет значительно сократить число вещественных операций при функционировании фильтра [19]. Все преобразования и вычисления в гиперкомплексной области, выполненные с использованием программного комплекса для гиперкомплексных вычислений в среде компьютерной алгебры Maple, свидетельствуют о его эффективности.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калиновский Я.А., Ландэ Д.В., Бояринова Ю.Е., Хицко Я.В.* Гиперкомплексные числовые системы и быстрые алгоритмы цифровой обработки информации. Киев: ИПРИ НАНУ, 2014, 130с.
2. *Toyoshima H.* Computationally Efficient Implementation of Hypercomplex Digital Filters // IEICE Trans. Fundamentals, 2002, E85-A, 8, p. 1870—1876.
3. *Schutte H.D.* Digitalfilter zur Verarbeitung komplexer und hypercomplexer Signale. Dissertation. Paderborn, 1991, 100 s.
4. *Schulz D., Seitz J., LustosadaCosta J.P.* Widely Linear SIMO Filtering for Hypercomplex Numbers / IEEE Information Theory Workshop, 2011, p. 390—394.
5. *Toyoshima H., Higuchi S.* Design of Hypercomplex All-Pass Filters to Realize Complex Transfer Functions // Proc. Second Int. Conf. Information, Communications and Signal Processing,1999, B3.4, 2, p. 1—5.
6. *Toyoshima H.* Computationally Efficient Bicomplex Multipliers for Digital Signal Processing // IEICE Trans. Inf. & Syst, 1998, E81-D, 2, p. 236—238.
7. *Bulow T., Sommer G.* Hypercomplex Signals — A Novel Extension of the Analytic Signal to the Multidimensional Case // IEEE Transactions on Signal Processing, 2001, Vol. 49, No. 11, P. 2844—2852.
8. *Parfieniuk M., Petrovsky A.* Quaternionic building block for paraunitary filter banks // Proc. of the 12th European Signal Processing Conference (EUSIPCO ‘04). Vienna, Austria, 2004, p. 1237—1240.
9. *Alfsmann D., Gųckler H.G.* Design of Hypercomplex Allpass-Based Paraunitary Filter Banks applying Reduced Biquaternions // Proc. EUROCON 2005. Belgrade, Serbia & Montenegro, 2005, p. 92—95.
10. *Ueda K., Takahashi S.* Digital Filtrs with hypercomplex Coefficients // ISCAP, 1993, p. 479—482.
11. *Каліновський Я.О.* Розвиток методів теорії гіперкомплексних числових систем для математичного моделювання і комп’ютерних обчислень: Дис. д-ра техн. наук. Київ, 2007, 308 с.
12. *Kalinovsky Y.A., Boyarinova Y.E., Khitsko Y.V.* Reversible Digital Filters Total Parametric Sensitivity Optimization using Non-canonical Hypercomplex Number Systems. http://arxiv.org/abs/1506.01701 (Submitted on 25 Jan 2015) P.9.

13. *Sinkov M.V., Kalinovsky Ya.A., Boyarinova Yu.E.* Konechnomernyie giperkompleksnyie chislovyie sistemy. Київ: Infodruck, 2010, p. 388.
14. *Мельников О.В., Ремесленников В.Н., Романьков В.А. и др.* Общая алгебра. М.: Наука, 1990, Т. 1, 591 с.
15. *Дрозд Ю.А., Кириченко В.В.* Конечномерные алгебры. Київ: Вища школа, 1980, 192 с.
16. *Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е., Хицко Я.В., Сукало А.С.* Программный комплекс для гиперкомплексных вычислений // Электрон. моделирование, 2017, 39, № 5, с. 81—96.

Получена 15.04.19

REFERENCES

1. Kalinovsky, Y.A., Lande, D.V., Bojarinova, J.E. and Khitsko, Y.V. (2014), *Giperkompleksnyye chislovyye sistemy i bystryye algoritmy tsifrovoy obrabotki informatsii* [Hypercomplex numbers systems and fast algorithms for digital information processing], IPRI NANU, Kyiv, Ukraine.
2. Toyoshima, H. (2002), “Computationally Efficient Implementation of Hypercomplex Digital Filters”, *Fundamentals*, pp. 1870-1876.
3. Schutte, H.D. (1991), Digital filter for processing complex and hypercomplex signals, Paderborn, Germany.
4. Schulz, D., Seitz, J. and LustosadaCosta J.P. (2011), “Widely Linear SIMO Filtering for Hypercomplex Numbers”, *IEEE Information Theory Workshop*, pp. 390-394.
5. Toyoshima, H. and Higuchi, S. (1999), “Design of Hypercomplex All-Pass Filters to Realize Complex Transfer Functions”, *Conference proceedings of the second International conference on Information, Communications and Signal Processing*, pp. 1-5.
6. Toyoshima, H. (1998), “Computationally Efficient Bicomplex Multipliers for Digital Signal Processing”, Inf. & Syst, pp. 236-238.
7. Bulow, T. and Sommer, G. (2001), “Hypercomplex Signals — A Novel Extension of the Analytic Signal to the Multidimensional Case”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 49, no. 11, pp. 2844-2852.
8. Parfieniuk, M. and Petrovsky, A. (2004), “Quaternionic building block for paraunitary filter banks”, *Proceeding of the 12th European Signal Processing Conference (EUSIPCO '04)*, Vienna, Austria, 2004, pp. 1237-1240.
9. Alfsmann, D. and Gцckler, H. G. (2005), “Design of Hypercomplex Allpass-Based Paraunitary Filter Banks applying Reduced Biquaternions”, Proceeding of EUROCON 2005, Belgrade, Serbia & Montenegro, 2005, pp. 92-95.
10. Ueda, K. and Takahashi, S. (1993) “Digital Filtrs with hypercomplex Coefficients”, *ISCAP*, pp. 479-482.
11. Kalinovsky, Ya.O. (2007), “Development of methods of the theory of hypercomplex numbers systems for mathematical modeling and computer calculations”, Abstract of Cand. Sci. (Tech.) dissertation, Kyiv, Ukraine.
12. Kalinovsky, Y.A., Boyarinova, Y.E. and Khitsko, Y.V. (2015), “Reversible Digital Filters Total Parametric Sensitivity Optimization using Non-canonical Hypercomplex Number Systems”, available at: http://arxiv.org/abs/1506.01701 (accessed June 23, 2019).
13. Sinkov, M.V., Kalinovsky, Ya.A. and Boyarinova, Yu.E. (2010), *Konechnomernyie giperkompleksnyie chislovyie sistemy* [Finite-dimensional hypercomplex number systems], Infodruk, Kyiv, Ukraine.
14. Mel'nikov O.V., Remeslennikov V.N. and Roman'kov V.A.(1990), “General algebra”, *Nauka*, Vol. 1.

15. Drozd, Yu.A., Kirichenko, V.V. (1980), *Konechnomernyye algebry* [Finite-dimensional algebras], Vyshcha shkola, Kyiv, Ukraine.
16. Kalinovskiy, Ya.A., Boyarinova, Yu.Ye., Khitsko, Ya.V., Sukalo, A.S. (2017), “Software complex for hypercomplex computing”, *Elektronnoye. modelirovaniye*, Vol. 39, no. 5, pp. 81-96.

Received 15.04.19

Я.О. Калиновський, Ю.Є. Бояринова, Я.В. Хіцко

МЕТОДИКА ВИБОРУ ГІПЕРКОМПЛЕКСНИХ
ЧИСЛОВИХ СИСТЕМ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ЦИФРОВИХ
РЕВЕРСИВНИХ ФІЛЬТРІВ ТРЕТЬОГО І ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКІВ

Наведено методику вибору гіперкомплексних числових систем (ГЧС) для моделювання цифрових реверсивних фільтрів, засновану на аналізі виразу норми знаменника гіперкомплексної передавальної функції. Обрано ГЧС, які дозволяють отримати в передавальній функції фільтра повний набір ступенів оператора зсуву. Ці ГЧС мають слабозаповнені ізоморфізми, перехід до яких дозволяє істотно скоротити число дійсних операцій при функціонуванні фільтра

К л ю ч о в і с л о в а: гіперкомплексна числова система, лінійна згортка, ізоморфізм, множення, бікомплексні числа, квадриплексні числа, система комп'ютерної алгебри.

J.A. Kalinovsky, Y.E. Boyarinova , J.V. Khitsko

METHOD OF SELECTING HYPERCOMPLEX NUMBER SYSTEMS
FOR MODELING DIGITAL REVERSING FILTERS OF THE 3RD AND 4th ORDERS

The article presents the method of selecting hypercomplex number systems (HNS) for modeling digital reversible filters based on the analysis of the expression of the norm of the hypercomplex transfer function denominator. The selected HNS, allowing to obtain in the transfer function of the filter a complete set of powers of the shift operator. These HNS have weakly filled isomorphisms, the transition to which can significantly reduce the number of real operations in the operation of the filter.

K e y w o r d s: hypercomplex number system, linear convolution, isomorphism, multiplication, bicomplex numbers, quadriplex numbers, computer algebra system.

КАЛИНОВСКИЙ Яков Александрович, д-р техн. наук, ст. науч. сотр. Ин-та проблем регистрации информации НАН Украины. В 1965 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — теория гиперкомплексных числовых систем и их применение в математическом моделировании.

БОЯРИНОВА Юлия Евгеньевна, канд. техн. наук, ст. науч. сотр. Ин-та проблем регистрации информации НАН Украины, доцент Национального технического университета Украины «Киевский политехнический ин-т им. Игоря Сикорского», который окончила в 1997 г. Область научных исследований — теория гиперкомплексных числовых систем и их применение в математическом моделировании.

ХИЦКО Яна Владимировна, канд. техн. наук, ст. преподаватель Национального технического университета Украины «Киевский политехнический ин-т им. Игоря Сикорского», который окончила в 2005 г. Область научных исследований — теория гиперкомплексных числовых систем и их применение в математическом моделировании.