doi: https://doi.org/10.15407/emodel.41.06.015
УДК 004.942; 512.552

С.И. Клипков, канд. техн. наук
Частное акционерное общество НЭК «Укрэнерго»
(Украина, 01032, Киев, ул. С. Петлюры, 25,
тел. (044) 2491216, E-mail: klipkov.s@gmail.com)

Кватернионный анализ режимов электрических систем

Исследованы свойства полигенных функций комплексного и кватернионного переменных, используемых в задачах электроэнергетики при дифференциальном исчислении. Введено понятие внутренней псевдопроизводной и получены выражения для правого и левого отношений дифференциала произвольной кватернионной функции к дифференциалу ее аргумента. Сформулированы условия дифференцируемости функций кватернионного переменного. Приведен пример кватернионного анализа режимов простой двухузловой схемы электрической системы.

Ключевые слова: параметрическая гиперкомплексная числовая система, псевдопроизводная, комплексные числа, кватернионы, квадриплексные числа.

Неоднозначность решения системы нелинейных алгебраических уравнений, описывающих установившийся режим электрических систем (ЭС) переменного тока, обусловливает необходимость исследования получаемых математических решений относительно вероятности их физической реализации в конкретных условиях эксплуатации. Одним из возможных подходов к такой оценке может быть анализ физической устойчивости установившихся режимов ЭС, соответствующих указанным математическим решениям [1]. В этом случае под физической устойчивостью подразумевается апериодическая статическая устойчивость режима, условия нарушения которой определяются на основании анализа дифференциальных свойств рассматриваемой системы нелинейных алгебраических уравнений. Критерием, указывающим на предельный режим по условию физической устойчивости, является изменение знака определителя матрицы первого приближения, вычисляемой при линеаризации системы нелинейных уравнений в точке, соответствующей исследуемому режиму [2].

Уравнения установившегося режима ЭС формируются с использованием символического (комплексного) метода. Этот метод основан на изображении гармонически изменяющихся во времени напряжений и токов комплексными числами и позволяет при описании цепей переменного тока использовать формальную аналогию с описанием цепей постоянного тока. Следует заметить, что символический метод не может быть строго использован для нелинейной алгебраической операции умножения гармонических величин, так как произведению синусоидального напряжения на синусоидальный ток нельзя поставить в соответствие произведение их комплексных изображений.

Попытка распространения символического метода на нелинейную операцию умножения синусоидальных напряжений на синусоидальные токи привела к возникновению математического понятия комплексной мощности, которая определяется как произведение комплексного напряжения на сопряженное значение комплексного тока. Такое определение комплексной мощности стало причиной того, что одна из основных функций, используемых для расчета и анализа режимов электрических систем (зависимость узловой мощности от узловых напряжений), содержит нелинейные комбинации прямых и сопряженных комплексов напряжений и поэтому не удовлетворяет условиям Коши—Римана, являясь, как и комплексная функция $w = \hat{z}$, полигенной [3].

Как известно, для полигенной функции (в отличие от моногенной) предел

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

зависит от пути приближения точки z к точке z_0 и имеет бесконечно много значений. Указанный предел для полигенной функции назван псевдопроизводной [4]. Это обстоятельство усложняет анализ предельных режимов в комплексной форме, так как комплексная матрица первого приближения зависит не только от характеристик исследуемого режима, но и от направления его изменения. Диагональные элементы такой матрицы определяются по формуле [4]

$$J_{ff} = Y_f \hat{U}_f + I_f e^{-i2\alpha_f}, \tag{1}$$

где $Y_f = \sum_{l=1}^{n} Y_{fl} + Y_{f0} = g_f + ib_f$ — собственные узловые комплексные проводимости; $\hat{U}_f$ — узловые сопряженные комплексные напряжения;

$I_f = Y_f U_f - \sum_{l=1}^{n} Y_{fl} U_l$ — узловые комплексные токи; $\alpha_f = \mathrm{arctg}\dfrac{dU''_f}{dU'_f}$ — углы комплексных дифференциалов напряжений dU_f в узлах, обуславливающие бесконечное число возможных направлений изменения режима относительно исходного.

В [5] показано, что при переходе от гармонического анализа предельных режимов ЭС к комплексному изменению знака одной или всех гармонических составляющих определителя гармонической матрицы первого приближения соответствует изменение знака определителя комплексной матрицы первого приближения. При этом фазы дифференциалов мгновенного напряжения и углы дифференциалов комплексного напряжения, которые определяют условия предельности режимов, совпадают, что позволяет считать математически корректным переход от гармонических уравнений установившегося режима ЭС к комплексным уравнениям.

В то же время, исследование предельных режимов на основе общепринятой матрицы Якоби действительных уравнений установившегося режима, соответствующих комплексным уравнениям, приводит к результатам, отличающимся от анализа предельных режимов с использованием комплексной матрицы первого приближения [4]. Несоответствие заключается в том, что дискриминантная поверхность равного нулю определителя действительной матрицы Якоби, ограничивающая область существования режимов, является лишь подмножеством множества предельных режимов равного нулю определителя комплексной матрицы.

Таким образом, замена комплексного уравнения двумя действительными уравнениями для описания установившихся режимов ЭС, являясь математически корректной с алгебраической точки зрения, приводит к неодинаковым результатам при анализе их дифференциальных свойств, что обусловлено, по всей видимости, потерей существующей зависимости между действительными составляющими, образующими комплексные величины в составе полигенных функций.

Заметим также, что множество предельных режимов равного нулю определителя комплексной матрицы первого приближения связано с решениями уравнений параметрической системы гиперкомплексных чисел, которые являются алгебраическим расширением нелинейных комплексных уравнений установившегося режима ЭС в гиперкомплексную область [6, 7]. В этом случае гиперкомплексные напряжения и токи представляются в виде действительных и мнимых комплексных составляющих:

$$\widehat{U}_f = U_{df} + U_{mf} j,\ \widehat{I}_f = I_{df} + I_{mf} j.$$

В результате указанного обобщения, каждый из независимых узлов ЭС описывается уже двумя комплексными уравнениями, одно из которых имеет вид [4]

$$(Y_f \hat{U}_{df} + I_{df} e^{-i2(k'\alpha_{df} + \alpha_{mf})}) U_{mf} - \sum_{l=1}^{n} Y_{fl} \hat{U}_{df} U_{ml} = 0. \qquad (2)$$

Сопоставление выражений (1) и (2) позволяет установить взаимосвязь в области предельных режимов между углами комплексных дифференциалов напряжений dU_f, при которых определитель комплексной матрицы первого приближения становится равным нулю в некоторой точке области существования установившихся режимов и гиперкомплексным решением, действительные комплексные составляющие которого соответствуют этой же точке области существования, так как отображение вектора U_{df} в пространство P_f, Q_f однозначно [4]: $\alpha_f = k'\alpha_{df} + \alpha_{mf}$, где α_{df} — углы действительных комплексных составляющих U_{df}; α_{mf} — углы мнимых комплексных составляющих U_{mf}; k' — действительная составляющая комплексного параметра $k = k' + ik''$ гиперкомплексной числовой системы (k'' при решении рассматриваемой прикладной задачи принимается равным нулю).

Как следует из изложенного, рассмотренный подход используется для анализа особых точек, соответствующих предельным режимам в области существования установившихся режимов ЭС. Для выяснения возможностей появления указанных особенностей вне области существования необходимо рассматривать матрицы первых приближений используемых гиперкомплексных уравнений. В связи с этим целесообразно выяснить возможности и условия дифференцирования в рассматриваемых числовых системах.

Некоммутативность мнимых единиц i, j в параметрической системе гиперкомплексных чисел, представляющих собой алгебры удвоенной размерности по отношению к комплексным числам, описывается соотношением $ij = R_G ji$ [6, 7]. Поэтому результаты умножения базисных элементов $j \cdot i$, $j \cdot ij$, $ij \cdot i$ $ij \cdot ij$ определяются значениями комплексного числа R_G, которое, в свою очередь, зависит от параметра гиперкомплексной числовой системы $k = k' + ik''$ и комплексного числа $G = G' + iG''$, относительно которого перемещается мнимая единица *j*:

$$R'_G = \frac{e^{2k''\alpha_G}[G''\cos(2k'\alpha_G) - G'\sin(2k'\alpha_G)]}{G''},$$

$$R''_G = -\frac{e^{2k''\alpha_G}[G'\cos(2k'\alpha_G) + G''\sin(2k'\alpha_G)] - G'}{G''},$$

где $\alpha_G = \operatorname{arctg} G''/G'$ — угол комплексного числа *G*.

Анализ показывает, что только при значениях k, соответствующих двум каноническим числовым системам — кватернионам ($k = 1 + i0$, $R_G = -1 + i0$) и квадриплексным числам ($k = 0 + i0$, $R_G = 1 + i0$) значения R'_G, R''_G не зависят от значений G', G''. В числовых системах с другими значениями параметра k значения R'_G, R''_G оказываются зависимыми от значений G', G'', и это свидетельствует о том, что в таких гиперкомплексных системах чисел в принципе не может быть нелинейных моногенных функций, так как в этом случае произведение приращения гиперкомплексной функции на величину, обратную приращению гиперкомплексного аргумента, всегда будет зависеть от приращения аргумента. Для квадриплексных чисел проблемой является также анализ влияния на возможность дифференцирования делителей нуля.

Необходимо заметить, что и для кватернионов, являющихся наиболее исследованной числовой системой после комплексных чисел, дифференцирование даже простейших функций вызывает значительные трудности, что в первую очередь связано с некоммутативностью их умножения [8—11]. Кроме того, в случае использования кватернионных уравнений функция узловой мощности, как и для комплексных уравнений, является полигенной, поскольку зависит не только от кватернионных напряжений узлов, но и от их частично-сопряженных значений. Указанная специфика кватернионных уравнений еще в большей степени усложняет их анализ и требует использования новых подходов к вопросам дифференцирования.

Попытаемся найти инструмент, который мог бы в некоторой степени упростить подход к решению рассматриваемой задачи. Таким инструментом могут быть предлагаемые внутренние псевдопроизводные числовых систем. Заметим, что в [5] псевдопроизводные dU_m / du, $d\phi / du$ гармонических функций времени вида $u = U_m \sin(\omega t + \phi)$ предложено использовать для вычисления упоминавшейся выше матрицы первого приближения гармонических уравнений установившегося режима ЭС.

Определение. Пусть элементы $\widehat{x}$ числовой системы в общем случае имеют вид

$$\widehat{x} = \sum_{l=1}^{n} e_l x_l , \tag{3}$$

где n — размерность системы; e_l — базис; x_l — действительные составляющие. Внутренними псевдопроизводными $\widehat{\pi}_l$ числовой системы (3) или просто псевдопроизводными будем называть отношения дифференциалов составляющих x_l к дифференциалу самого элемента $\widehat{x}$:

$$\widehat{\pi}_l = dx_l / d\widehat{x} . \tag{4}$$

Указанные отношения дифференциалов названы псевдопроизводными, так как их значения в общем случае зависят от дифференциала $d\widehat{x}$. Количество псевдопроизводных любой числовой системы соответствует ее размерности.

Рассмотрим использование псевдопроизводных для решения вопросов, связанных с дифференцированием функций в числовых системах, используемых в задачах энергетики.

Комплексные числа. Система комплексных чисел содержит два базисных элемента — обычную единицу и мнимую единицу i, а общему выражению (3) соответствует комплексное число, которое может быть записано в виде $z = x + iy$. В этом случае $dz = dx + idy$, что в соответствии с выражением (4) позволяет определить две комплексные псевдопроизводные:

$$\pi_1 = \frac{dx}{dx + idy} = \frac{1}{1 + i\upsilon_y}, \quad \pi_i = \frac{dy}{dx + idy} = \frac{\upsilon_y}{1 + i\upsilon_y}, \tag{5}$$

где $\upsilon_y = dy / dx$ — величина, связанная с углом φ дифференциала $dz = \varepsilon e^{i\varphi}$, так как $\varphi = \operatorname{arctg} dy / dx = \operatorname{arctg}(\upsilon_y)$. Величину υ_y, от которой зависят рассматриваемые псевдопроизводные, можно интерпретировать как мгновенную скорость изменения координаты y при изменении координаты x в комплексной плоскости x, y. Указанная величина свидетельствует о том, что составляющие x, y комплексного числа z зависимы одна от другой [12], так как в общем случае $\upsilon_y \neq 0$.

Рассмотрим использование псевдопроизводных (5) при дифференцировании функций комплексного переменного. Пусть комплексная функция $w = u + iv$ является произвольной функцией комплексного аргумента $z = x + iy$. Если в некоторой точке комплексной плоскости существуют непрерывные частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, то отношение дифференциалов dw и dz можно представить в виде

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x}\pi_1 + \frac{\partial u}{\partial y}\pi_i + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\pi_1 + \frac{\partial v}{\partial y}\pi_i\right),$$

или, с учетом выражений (5), в виде

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{1}{1+i\upsilon_y}\right) + \frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{i\upsilon_y}{1+i\upsilon_y}\right) + i\left[\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{1}{1+i\upsilon_y}\right) - \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{i\upsilon_y}{1+i\upsilon_y}\right)\right]. \qquad (6)$$

Таким образом, псевдопроизводные позволяют ввести в выражение для отношения дифференциалов dw и dz скорость изменения координаты y при изменении координаты x—υ_y. Соотношение (6), в свою очередь, может быть преобразовано к виду

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)i\right] + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)i\right]\frac{1-i\upsilon_y}{1+i\upsilon_y}, \qquad (7)$$

соответствующему формуле Римана [13], так как

$$\upsilon_y = \mathrm{tg}\,(\varphi),\ \ \frac{1-i\upsilon_y}{1+i\upsilon_y} = e^{-i2\varphi}.$$

Из выражения (7) непосредственно следуют необходимые условия дифференцируемости функции комплексного переменного (условия Коши—Римана) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, в соответствии с которыми требуется, чтобы второе слагаемое, связанное с углом φ дифференциала аргумента dz, равнялось нулю.

Как следует из изложенного, дифференцирование функций комплексного переменного с использованием псевдопроизводных приводит к известным результатам. Необходимо лишь заметить, что отличительной особенностью выражения (7), в данном случае есть появление во втором слагаемом дроби, зависящей от скорости υ_y.

Кватернионы. Система кватернионов содержит четыре базисных элемента – обычную единицу и три мнимых единицы, *i*, *j*, *k*, с известными правилами умножения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $ji = -k$, $jk = i$, $kj = -i$, $ki = j$, $ik = -j$. Выражению (3) соответствует кватернион, который можно представить в виде $\mathbf{z} = t + ix + jy + kz$. Учитывая, что $d\mathbf{z} = dt + idx + jdy + kdz$, на основании (4) можно определить четыре псевдопроизводные:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\pi}_1 &= \frac{dt}{dt + idx + jdy + kdz} = \frac{1}{1 + i\upsilon_x + j\upsilon_y + k\upsilon_z}, \\
\boldsymbol{\pi}_i &= \frac{dx}{dt + idx + jdy + kdz} = \frac{\upsilon_x}{1 + i\upsilon_x + j\upsilon_y + k\upsilon_z}, \\
\boldsymbol{\pi}_j &= \frac{dy}{dt + idx + jdy + kdz} = \frac{\upsilon_y}{1 + i\upsilon_x + j\upsilon_y + k\upsilon_z}, \\
\boldsymbol{\pi}_k &= \frac{dz}{dt + idx + jdy + kdz} = \frac{\upsilon_z}{1 + i\upsilon_x + j\upsilon_y + k\upsilon_z},
\end{aligned} \tag{8}$$

где $\upsilon_x = \dfrac{dx}{dt}$, $\upsilon_y = \dfrac{dy}{dt}$, $\upsilon_z = \dfrac{dz}{dt}$ — величины, которые можно рассматривать в четырехмерном кватернионном пространстве как скорость изменения координат *x*, *y*, *z* при изменении координаты *t*. Поскольку числители в выражениях (8) — действительные числа, при вычислении псевдопроизводных они могут быть умножены на кватернион $(1 + i\upsilon_x + j\upsilon_y + k\upsilon_z)^{-1}$ с любой стороны. При этом рассматриваемые псевдопроизводные являются однозначными характеристиками системы кватернионов.

Если кватернионная функция $\mathbf{w} = u + iv + jp + kq$ является произвольной функцией кватернионного аргумента $\mathbf{z} = t + ix + jy + kz$ и существуют непрерывные производные

$$\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}, \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}, \frac{\partial q}{\partial t}, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial y}, \frac{\partial q}{\partial z},$$

то произведение дифференциала $d\mathbf{w} = du + idv + jdp + kdq$ на величину, обратную дифференциалу $d\mathbf{z} = dt + idx + jdy + kdz$ справа, можно представить в следующем виде:

$$d\mathbf{w}d\mathbf{z}^{-1} = \frac{\partial u}{\partial t}\boldsymbol{\pi}_1 + \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{\pi}_i + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{\pi}_j + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{\pi}_k + i\left(\frac{\partial v}{\partial t}\boldsymbol{\pi}_1 + \frac{\partial v}{\partial x}\boldsymbol{\pi}_i + \frac{\partial v}{\partial y}\boldsymbol{\pi}_j + \frac{\partial v}{\partial z}\boldsymbol{\pi}_k\right) +$$

$$+ j\left(\frac{\partial p}{\partial t}\boldsymbol{\pi}_1 + \frac{\partial p}{\partial x}\boldsymbol{\pi}_i + \frac{\partial p}{\partial y}\boldsymbol{\pi}_j + \frac{\partial p}{\partial z}\boldsymbol{\pi}_k\right) + k\left(\frac{\partial q}{\partial t}\boldsymbol{\pi}_1 + \frac{\partial q}{\partial x}\boldsymbol{\pi}_i + \frac{\partial q}{\partial y}\boldsymbol{\pi}_j + \frac{\partial q}{\partial z}\boldsymbol{\pi}_k\right),$$

или

$$d\mathbf{w}d\mathbf{z}^{-1} = \frac{\partial u}{\partial t}\boldsymbol{\pi}_1 + \frac{\partial v}{\partial x}i\boldsymbol{\pi}_i + \frac{\partial p}{\partial y}j\boldsymbol{\pi}_j + \frac{\partial q}{\partial z}k\boldsymbol{\pi}_k + i\left(\frac{\partial v}{\partial t}\boldsymbol{\pi}_1 - \frac{\partial u}{\partial x}i\boldsymbol{\pi}_i + \frac{\partial q}{\partial y}j\boldsymbol{\pi}_j - \frac{\partial p}{\partial z}k\boldsymbol{\pi}_k\right) +$$

$$+ j\left(\frac{\partial p}{\partial t}\boldsymbol{\pi}_1 - \frac{\partial q}{\partial x}i\boldsymbol{\pi}_i - \frac{\partial u}{\partial y}j\boldsymbol{\pi}_j + \frac{\partial v}{\partial z}k\boldsymbol{\pi}_k\right) + k\left(\frac{\partial q}{\partial t}\boldsymbol{\pi}_1 + \frac{\partial p}{\partial x}i\boldsymbol{\pi}_i - \frac{\partial v}{\partial y}j\boldsymbol{\pi}_j - \frac{\partial u}{\partial z}k\boldsymbol{\pi}_k\right). \tag{9}$$

С учетом соотношений (8) выражение (9) может быть приведено к форме, позволяющей сформулировать по аналогии с (7) условия дифференцирования функций кватернионного переменного справа в наиболее общем виде:

$$d\mathbf{w}d\mathbf{z}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial z} + i\left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial z}\right) +\right.$$

$$\left. + j\left(\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) + k\left(\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} + i\frac{\partial v}{\partial t} + j\frac{\partial p}{\partial t} + k\frac{\partial q}{\partial t}\right)\frac{1 - i\upsilon_x - j\upsilon_y - k\upsilon_z}{1 + i\upsilon_x + j\upsilon_y + k\upsilon_z} +\right.$$

$$+ \left(\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial x} - j\frac{\partial q}{\partial x} + k\frac{\partial p}{\partial x}\right)\frac{-1 + i\upsilon_x - j\upsilon_y - k\upsilon_z}{1 + i\upsilon_x + j\upsilon_y + k\upsilon_z} +$$

$$+\left(\frac{\partial p}{\partial y}+i\,\frac{\partial q}{\partial y}-j\,\frac{\partial u}{\partial y}-k\,\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{-1-i\upsilon_x+j\upsilon_y-k\upsilon_z}{1+i\upsilon_x+j\upsilon_y+k\upsilon_z}+$$
$$+\left(\frac{\partial q}{\partial z}-i\,\frac{\partial p}{\partial z}+j\,\frac{\partial v}{\partial z}-k\,\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{-1-i\upsilon_x-j\upsilon_y+k\upsilon_z}{1+i\upsilon_x+j\upsilon_y+k\upsilon_z}\Bigg]. \qquad (10)$$

Как следует из (9), при умножении кватернионов в выражении (10) кватернион $(1+i\upsilon_x+j\upsilon_y+k\upsilon_z)^{-1}$ должен располагаться в каждом из слагаемых справа.

Утверждение 1. Для того чтобы функция кватернионного переменного $\mathbf{w}\,(\mathbf{z})$, где $\mathbf{w}=u+iv+jp+kq$, $\mathbf{z}=t+ix+jy+kz$, была дифференцируемой справа (имела правую производную), необходимо выполнение следующих условий:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial z},\quad \frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial q}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial z},$$
$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\frac{\partial q}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial z},\quad \frac{\partial q}{\partial t}=\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial z}. \qquad (11)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При выполнении условий (11) выражение (10) может быть преобразовано к виду

$$d\mathbf{w}d\mathbf{z}^{-1}=2\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\ i\,\frac{\partial v}{\partial t}+j\,\frac{\partial p}{\partial t}+k\,\frac{\partial q}{\partial t}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+i\,\frac{\partial v}{\partial t}+j\,\frac{\partial p}{\partial t}+k\,\frac{\partial q}{\partial t}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{1-i\upsilon_x-j\upsilon_y-k\upsilon_z}{1+i\upsilon_x+j\upsilon_y+k\upsilon_z}+\frac{-1+i\upsilon_x-j\upsilon_y-k\upsilon_z}{1+i\upsilon_x+j\upsilon_y+k\upsilon_z}+\frac{-1-i\upsilon_x+j\upsilon_y-k\upsilon_z}{1+i\upsilon_x+j\upsilon_y+k\upsilon_z}+\right.$$
$$\left.+\frac{-1-i\upsilon_x-j\upsilon_y+k\upsilon_z}{1+i\upsilon_x+j\upsilon_y+k\upsilon_z}\right)=2\left(\frac{\partial u}{\partial t}+i\frac{\partial v}{\partial t}+j\frac{\partial p}{\partial t}+k\frac{\partial q}{\partial t}\right)-$$
$$-\left(\frac{\partial u}{\partial t}+i\frac{\partial v}{\partial t}+j\frac{\partial p}{\partial t}+k\frac{\partial q}{\partial t}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}+i\frac{\partial v}{\partial t}+j\frac{\partial p}{\partial t}+k\frac{\partial q}{\partial t}. \qquad (12)$$

Как следует из (12), в анализируемом случае произведение $d\mathbf{w}d\mathbf{z}^{-1}$ не зависит от величин υ_x, υ_y, υ_z, а следовательно, и от дифференциала аргумента $d\mathbf{z}$. Утверждение доказано.

Дополнительное требование непрерывности всех частных производных, входящих в необходимые условия дифференцируемости (11), делает их также достаточными условиями для существования правой производной. Заметим, что условия существования правой производной функции кватернионного переменного (11) с использованием другого подхода получены в работе [14].

В качестве примера рассмотрим линейную кватернионную функцию $\mathbf{w} = \boldsymbol{\kappa}\mathbf{z}$, где $\boldsymbol{\kappa} = \kappa_1 + i\kappa_i + j\kappa_j + k\kappa_k$. Умножая кватернионы $\boldsymbol{\kappa}$ и $\mathbf{z}$, получаем

$$\mathbf{w} = u + iv + jp + kq = \kappa_1 t - \kappa_i x - \kappa_j y - \kappa_k z + i\,(\kappa_i t + \kappa_1 x - \kappa_k y + \kappa_j z) +$$
$$+\, j\,(\kappa_j t + \kappa_k x + \kappa_1 y - \kappa_i z) + k\,(\kappa_k t - \kappa_j x + \kappa_i y + \kappa_1 z).$$

При этом частные производные принимают следующие значения:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa_1, \; \frac{\partial u}{\partial x} = -\kappa_i, \; \frac{\partial u}{\partial y} = -\kappa_j, \; \frac{\partial u}{\partial z} = -\kappa_k, \\
\frac{\partial v}{\partial t} = \kappa_i, \; \frac{\partial v}{\partial x} = \kappa_1, \; \frac{\partial v}{\partial y} = -\kappa_k, \; \frac{\partial v}{\partial z} = \kappa_j, \\
\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa_j, \; \frac{\partial p}{\partial x} = \kappa_k, \; \frac{\partial p}{\partial y} = \kappa_1, \; \frac{\partial p}{\partial z} = -\kappa_i, \\
\frac{\partial q}{\partial t} = \kappa_k, \; \frac{\partial q}{\partial x} = -\kappa_j, \; \frac{\partial q}{\partial y} = \kappa_i, \; \frac{\partial q}{\partial z} = \kappa_1.
\end{gathered} \tag{13}$$

Проанализировав полученные частные производные, видим, что условия дифференцируемости (11) выполняются, а правая производная рассматриваемой кватернионной функции в соответствии с (12) равна $\boldsymbol{\kappa}$. Действительно,

$$d\mathbf{w}d\mathbf{z}^{-1} = \frac{\partial u}{\partial t} + i\frac{\partial v}{\partial t} + j\frac{\partial p}{\partial t} + k\frac{\partial q}{\partial t} = \kappa_1 + i\kappa_i + j\kappa_j + k\kappa_k = \boldsymbol{\kappa}.$$

Теперь рассмотрим произведение дифференциала $d\mathbf{w}$ на величину, обратную дифференциалу $d\mathbf{z}$ слева. В этом случае

$$d\mathbf{z}^{-1}d\mathbf{w} = \frac{\partial u}{\partial t}\boldsymbol{\pi}_1 + \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{\pi}_i + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{\pi}_j + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{\pi}_k + i\left(\frac{\partial v}{\partial t}\boldsymbol{\pi}_1^i + \frac{\partial v}{\partial x}\boldsymbol{\pi}_i^i + \frac{\partial v}{\partial y}\boldsymbol{\pi}_j^i + \frac{\partial v}{\partial z}\boldsymbol{\pi}_k^i\right) +$$
$$+\, j\left(\frac{\partial p}{\partial t}\boldsymbol{\pi}_1^j + \frac{\partial p}{\partial x}\boldsymbol{\pi}_i^j + \frac{\partial p}{\partial y}\boldsymbol{\pi}_j^j + \frac{\partial p}{\partial z}\boldsymbol{\pi}_k^j\right) + k\left(\frac{\partial q}{\partial t}\boldsymbol{\pi}_1^k + \frac{\partial q}{\partial x}\boldsymbol{\pi}_i^k + \frac{\partial q}{\partial y}\boldsymbol{\pi}_j^k + \frac{\partial q}{\partial z}\boldsymbol{\pi}_k^k\right),$$

или

$$dz^{-1}d\mathbf{w} = \frac{\partial u}{\partial t}\boldsymbol{\pi}_1 + \frac{\partial v}{\partial x}i\boldsymbol{\pi}_i^i + \frac{\partial p}{\partial y}j\boldsymbol{\pi}_j^j + \frac{\partial q}{\partial z}k\boldsymbol{\pi}_k^k + i\left(\frac{\partial v}{\partial t}\boldsymbol{\pi}_1^i - \frac{\partial u}{\partial x}i\boldsymbol{\pi}_i + \frac{\partial q}{\partial y}j\boldsymbol{\pi}_j^k - \frac{\partial p}{\partial z}k\boldsymbol{\pi}_k^j\right) +$$

$$+ j\left(\frac{\partial p}{\partial t}\boldsymbol{\pi}_1^j - \frac{\partial q}{\partial x}i\boldsymbol{\pi}_i^k - \frac{\partial u}{\partial y}j\boldsymbol{\pi}_j + \frac{\partial v}{\partial z}k\boldsymbol{\pi}_k^i\right) + k\left(\frac{\partial q}{\partial t}\boldsymbol{\pi}_1^k + \frac{\partial p}{\partial x}i\boldsymbol{\pi}_i^j - \frac{\partial v}{\partial y}j\boldsymbol{\pi}_j^i - \frac{\partial u}{\partial z}k\boldsymbol{\pi}_k\right), \tag{14}$$

где

$$\boldsymbol{\pi}_1^i = \frac{1}{1 + i\upsilon_x - j\upsilon_y - k\upsilon_z},\ \boldsymbol{\pi}_i^i = \frac{\upsilon_x}{1 + i\upsilon_x - j\upsilon_y - k\upsilon_z},\ \boldsymbol{\pi}_j^i = \frac{\upsilon_y}{1 + i\upsilon_x - j\upsilon_y - k\upsilon_z},$$

$$\boldsymbol{\pi}_k^i = \frac{\upsilon_z}{1 + i\upsilon_x - j\upsilon_y - k\upsilon_z},\ \boldsymbol{\pi}_1^j = \frac{1}{1 - i\upsilon_x + j\upsilon_y - k\upsilon_z},\ \boldsymbol{\pi}_i^j = \frac{\upsilon_x}{1 - i\upsilon_x + j\upsilon_y - k\upsilon_z},$$

$$\boldsymbol{\pi}_j^j = \frac{\upsilon_y}{1 - i\upsilon_x + j\upsilon_y - k\upsilon_z},\ \boldsymbol{\pi}_k^j = \frac{\upsilon_z}{1 - i\upsilon_x + j\upsilon_y - k\upsilon_z},\ \boldsymbol{\pi}_1^k = \frac{1}{1 - i\upsilon_x - j\upsilon_y + k\upsilon_z},$$

$$\boldsymbol{\pi}_i^k = \frac{\upsilon_x}{1 - i\upsilon_x - j\upsilon_y + k\upsilon_z},\ \boldsymbol{\pi}_j^k = \frac{\upsilon_y}{1 - i\upsilon_x - j\upsilon_y + k\upsilon_z},\ \boldsymbol{\pi}_k^k = \frac{\upsilon_z}{1 - i\upsilon_x - j\upsilon_y + k\upsilon_z}.$$

Это кватернионы, образуемые перемещением элементов базиса i, j, k относительно псевдопроизводных $\boldsymbol{\pi}_1$, $\boldsymbol{\pi}_i$, $\boldsymbol{\pi}_j$, $\boldsymbol{\pi}_k$ справа налево:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\pi}_1 i = i\boldsymbol{\pi}_1^i,\ \boldsymbol{\pi}_1 j = j\boldsymbol{\pi}_1^j,\ \boldsymbol{\pi}_1 k = k\boldsymbol{\pi}_1^k,\ \boldsymbol{\pi}_i i = i\boldsymbol{\pi}_i^i,\ \boldsymbol{\pi}_i j = j\boldsymbol{\pi}_i^j,\ \boldsymbol{\pi}_i k = k\boldsymbol{\pi}_i^k, \\ \boldsymbol{\pi}_j i = i\boldsymbol{\pi}_j^i,\ \boldsymbol{\pi}_j j = j\boldsymbol{\pi}_j^j,\ \boldsymbol{\pi}_j k = k\boldsymbol{\pi}_j^k,\ \boldsymbol{\pi}_k i = i\boldsymbol{\pi}_k^i,\ \boldsymbol{\pi}_k j = j\boldsymbol{\pi}_k^j,\ \boldsymbol{\pi}_k k = k\boldsymbol{\pi}_k^k.\end{gathered} \tag{15}$$

Учитывая (8) и (15), соотношение (14) можно представить в виде

$$dz^{-1}d\mathbf{w} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial z} + i\left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) +\right.$$

$$\left. + k\left(\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{1 - i\upsilon_x - j\upsilon_y - k\upsilon_z}{1 + i\upsilon_x + j\upsilon_y + k\upsilon_z} - i\frac{\partial u}{\partial x}\frac{-1 + i\upsilon_x - j\upsilon_y - k\upsilon_z}{1 + i\upsilon_x + j\upsilon_y + k\upsilon_z} -\right.$$

$$\left. - j\frac{\partial u}{\partial y}\frac{-1 - i\upsilon_x + j\upsilon_y - k\upsilon_z}{1 + i\upsilon_x + j\upsilon_y + k\upsilon_z} - k\frac{\partial u}{\partial z}\frac{-1 - i\upsilon_x - j\upsilon_y + k\upsilon_z}{1 + i\upsilon_x + j\upsilon_y + k\upsilon_z}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{-1 + i\upsilon_x + j\upsilon_y + k\upsilon_z}{1 + i\upsilon_x - j\upsilon_y - k\upsilon_z} +\right.$$

$$+i\frac{\partial v}{\partial t}\frac{1-i\upsilon_x+j\upsilon_y+k\upsilon_z}{1+i\upsilon_x-j\upsilon_y-k\upsilon_z}-j\frac{\partial v}{\partial z}\frac{-1-i\upsilon_x+j\upsilon_y-k\upsilon_z}{1+i\upsilon_x-j\upsilon_y-k\upsilon_z}+k\frac{\partial v}{\partial y}\frac{-1-i\upsilon_x-j\upsilon_y+k\upsilon_z}{1+i\upsilon_x-j\upsilon_y-k\upsilon_z}\Bigg)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\frac{-1+i\upsilon_x+j\upsilon_y+k\upsilon_z}{1-i\upsilon_x+j\upsilon_y-k\upsilon_z}+i\frac{\partial p}{\partial z}\frac{-1+i\upsilon_x-j\upsilon_y-k\upsilon_z}{1-i\upsilon_x+j\upsilon_y-k\upsilon_z}+j\frac{\partial p}{\partial t}\frac{1+i\upsilon_x-j\upsilon_y+k\upsilon_z}{1-i\upsilon_x+j\upsilon_y-k\upsilon_z}-\right.$$

$$\left.-k\frac{\partial p}{\partial x}\frac{-1-i\upsilon_x-j\upsilon_y+k\upsilon_z}{1-i\upsilon_x+j\upsilon_y-k\upsilon_z}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial z}\frac{-1+i\upsilon_x+j\upsilon_y+k\upsilon_z}{1-i\upsilon_x-j\upsilon_y+k\upsilon_z}-i\frac{\partial q}{\partial y}\frac{-1+i\upsilon_x-j\upsilon_y-k\upsilon_z}{1-i\upsilon_x-j\upsilon_y+k\upsilon_z}+\right.$$

$$\left.+j\frac{\partial q}{\partial x}\frac{-1-i\upsilon_x+j\upsilon_y-k\upsilon_z}{1-i\upsilon_x-j\upsilon_y+k\upsilon_z}+k\frac{\partial q}{\partial t}\frac{1+i\upsilon_x+j\upsilon_y-k\upsilon_z}{1-i\upsilon_x-j\upsilon_y+k\upsilon_z}\right). \qquad (16)$$

Полученное выражение (16) позволяет сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 2. Для того чтобы функция кватернионного переменного $\mathbf{w}(\mathbf{z})$, где $\mathbf{w}=u+iv+jp+kq$, $\mathbf{z}=t+ix+jy+kz$, была дифференцируемой слева (имела левую производную), необходимо выполнение следующих условий:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial z},\ \frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial q}{\partial y}=\frac{\partial p}{\partial z},$$
$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\partial q}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial z},\ \frac{\partial q}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial z}. \qquad (17)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выполнение условий (17) позволяет преобразовать выражение (16) к следующему виду:

$$d\mathbf{z}^{-1}d\mathbf{w}=2\left(\frac{\partial u}{\partial t}+i\frac{\partial v}{\partial t}+j\frac{\partial p}{\partial t}+k\frac{\partial q}{\partial t}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{1-i\upsilon_x-j\upsilon_y-k\upsilon_z}{1+i\upsilon_x+j\upsilon_y+k\upsilon_z}+\frac{-1+i\upsilon_x+j\upsilon_y+k\upsilon_z}{1+i\upsilon_x-j\upsilon_y-k\upsilon_z}+\frac{-1+i\upsilon_x+j\upsilon_y+k\upsilon_z}{1-i\upsilon_x+j\upsilon_y-k\upsilon_z}+\right.$$

$$\left.+\frac{-1+i\upsilon_x+j\upsilon_y+k\upsilon_z}{1-i\upsilon_x-j\upsilon_y+k\upsilon_z}\right)+\frac{1}{2}i\frac{dv}{dt}\left(\frac{1-i\upsilon_x+j\upsilon_y+k\upsilon_z}{1+i\upsilon_x-j\upsilon_y-k\upsilon_z}+\frac{-1+i\upsilon_x-j\upsilon_y-k\upsilon_z}{1+i\upsilon_x+j\upsilon_y+k\upsilon_z}+\right.$$

$$\left.+\frac{-1+i\upsilon_x-j\upsilon_y-k\upsilon_z}{1-i\upsilon_x-j\upsilon_y+k\upsilon_z}+\frac{-1+i\upsilon_x-j\upsilon_y-k\upsilon_z}{1-i\upsilon_x+j\upsilon_y-k\upsilon_z}\right)+\frac{1}{2}j\frac{\partial p}{\partial t}\left(\frac{-1-i\upsilon_x+j\upsilon_y-k\upsilon_z}{1+i\upsilon_x+j\upsilon_y+k\upsilon_z}+\right.$$

$$+\frac{-1-i\upsilon_x+j\upsilon_y-k\upsilon_z}{1+i\upsilon_x-j\upsilon_y-k\upsilon_z}+\frac{1+i\upsilon_x-j\upsilon_y+k\upsilon_z}{1-i\upsilon_x+j\upsilon_y-k\upsilon_z}+\frac{-1-i\upsilon_x+j\upsilon_y-k\upsilon_z}{1-i\upsilon_x-j\upsilon_y+k\upsilon_z}\Bigg)+$$

$$+\frac{1}{2}k\frac{\partial q}{\partial t}\left(\frac{-1-i\upsilon_x-j\upsilon_y+k\upsilon_z}{1+i\upsilon_x+j\upsilon_y+k\upsilon_z}+\frac{-1-i\upsilon_x-j\upsilon_y+k\upsilon_z}{1+i\upsilon_x-j\upsilon_y-k\upsilon_z}+\right.$$

$$\left.+\frac{-1-i\upsilon_x-j\upsilon_y+k\upsilon_z}{1-i\upsilon_x+j\upsilon_y-k\upsilon_z}+\frac{1+i\upsilon_x+j\upsilon_y-k\upsilon_z}{1-i\upsilon_x-j\upsilon_y+k\upsilon_z}\right). \qquad (18)$$

В (18) четыре выражения в круглых скобках, содержащие величины υ_x, υ_y, υ_z, равняются –2. Поэтому

$$d\mathbf{z}^{-1}d\mathbf{w}=2\left(\frac{\partial u}{\partial t}+i\frac{\partial v}{\partial t}+j\frac{\partial p}{\partial t}+k\frac{\partial q}{\partial t}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial t}+i\frac{\partial v}{\partial t}+j\frac{\partial p}{\partial t}+k\frac{\partial q}{\partial t}\right)=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial t}+i\frac{\partial v}{\partial t}+j\frac{\partial p}{\partial t}+k\frac{\partial q}{\partial t}. \qquad (19)$$

Таким образом, выполнение условий (17) позволяет избавиться в выражении (16) от величин υ_x, υ_y, υ_z и, как следует из выражения (19), произведение $d\mathbf{z}^{-1}d\mathbf{w}$ в этом случае не зависит от дифференциала аргумента $d\mathbf{z}$. Утверждение доказано.

Как и для правой производной, дополнительное требование непрерывности всех частных производных, входящих в необходимые условия дифференцируемости (17), делает их также достаточными условиями для существования левой производной. Заметим, что условия существования левой производной функции кватернионной переменной (17) с использованием другого подхода получены в [15].

Из условий дифференцируемости (17) для частных производных (13) линейной кватернионной функции $\mathbf{w}=\boldsymbol{\kappa}\mathbf{z}$ следует, что рассматриваемая функция, имея правую производную, не имеет левой. В то же время, линейная кватернионная функция $\mathbf{w}=\mathbf{z}\boldsymbol{\kappa}$, наоборот, имеет левую производную, но не имеет правой. Поскольку в случае использования кватернионных уравнений функция узловой мощности зависит не только от кватернионных напряжений узлов, но и от их частично-сопряженных значений, при их использовании необходимо рассматривать отношение дифференциалов $d\mathbf{w}d\mathbf{z}^{-1}$ кватернионной функции $\mathbf{w}=\overline{\mathbf{z}}$, где $\overline{\mathbf{z}}=t-ix+jy-kz$.

Частные производные указанной функции принимают следующие значения:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=1,\ \frac{\partial u}{\partial x}=0,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \frac{\partial u}{\partial z}=0,\ \frac{\partial v}{\partial t}=0,\ \frac{\partial v}{\partial x}=-1,\ \frac{\partial v}{\partial y}=0,\ \frac{\partial v}{\partial z}=0,$$
$$\frac{\partial p}{\partial t}=0,\ \frac{\partial p}{\partial x}=0,\ \frac{\partial p}{\partial y}=1,\ \frac{\partial p}{\partial z}=0,\ \frac{\partial q}{\partial t}=0,\ \frac{\partial q}{\partial x}=0,\ \frac{\partial q}{\partial y}=0,\ \frac{\partial q}{\partial z}=-1. \tag{20}$$

Полученные значения частных производных (20) не удовлетворяют условиям дифференцируемости (11), что указывает на полигенность этой функции. Для определения отношения дифференциалов в этом слчае представим выражение (10) в виде кватерниона $d\mathbf{w}d\mathbf{z}^{-1}=\mathbf{w}'=u'+$ $+iv'+jp'+kq'$, умножая входящие в его состав кватернионы. Как упомянуто выше, при умножении кватернионов в выражении (10) кватернион $(1+i\upsilon_x+j\upsilon_y+k\upsilon_z)^{-1}$ должен располагаться в каждом из слагаемых справа. В результате получим

$$u'=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial q}{\partial z}\right)+\frac{1}{1+\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t}(1-\upsilon_x^2-\upsilon_y^2-\upsilon_z^2)+\frac{\partial v}{\partial t}\upsilon_x+\right.$$

$$+\frac{\partial p}{\partial t}\upsilon_y+\frac{\partial q}{\partial t}\upsilon_z+\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}(-1+\upsilon_x^2-\upsilon_y^2-\upsilon_z^2)+\frac{\partial u}{\partial x}\upsilon_x+\frac{\partial p}{\partial x}\upsilon_x\upsilon_y+\frac{\partial q}{\partial x}\upsilon_x\upsilon_z+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial y}(-1-\upsilon_x^2+\upsilon_y^2-\upsilon_z^2)+\frac{\partial u}{\partial y}\upsilon_y+\frac{\partial v}{\partial y}\upsilon_x\upsilon_y+\frac{\partial q}{\partial y}\upsilon_y\upsilon_z+$$

$$\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial z}(-1-\upsilon_x^2-\upsilon_y^2+\upsilon_z^2)+\frac{\partial u}{\partial z}\upsilon_z+\frac{\partial v}{\partial z}\upsilon_x\upsilon_z+\frac{\partial p}{\partial z}\upsilon_y\upsilon_z\right],$$

$$v'=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}-\frac{\partial p}{\partial z}\right)+\frac{1}{1+\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial t}(1-\upsilon_x^2-\upsilon_y^2-\upsilon_z^2)-\right.$$

$$-\frac{\partial u}{\partial t}\upsilon_x+\frac{\partial q}{\partial t}\upsilon_y-\frac{\partial p}{\partial t}\upsilon_z-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}(-1+\upsilon_x^2-\upsilon_y^2-\upsilon_z^2)+\frac{\partial v}{\partial x}\upsilon_x+\frac{\partial q}{\partial x}\upsilon_x\upsilon_y-$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\upsilon_x\upsilon_z+\frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial y}(-1-\upsilon_x^2+\upsilon_y^2-\upsilon_z^2)+\frac{\partial v}{\partial y}\upsilon_y-\frac{\partial u}{\partial y}\upsilon_x\upsilon_y-\frac{\partial p}{\partial y}\upsilon_y\upsilon_z-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial z}(-1-\upsilon_x^2-\upsilon_y^2+\upsilon_z^2)+\frac{\partial v}{\partial z}\upsilon_z-\frac{\partial u}{\partial z}\upsilon_x\upsilon_z+\frac{\partial q}{\partial z}\upsilon_y\upsilon_z\Bigg], \tag{21}$$

$$p'=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{1}{1+\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2}\Bigg[\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial t}(1-\upsilon_x^2-\upsilon_y^2-\upsilon_z^2)-\frac{\partial q}{\partial t}\upsilon_x-$$

$$-\frac{\partial u}{\partial t}\upsilon_y+\frac{\partial v}{\partial t}\upsilon_z-\frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial x}(-1+\upsilon_x^2-\upsilon_y^2-\upsilon_z^2)+\frac{\partial p}{\partial x}\upsilon_x-\frac{\partial u}{\partial x}\upsilon_x\upsilon_y+\frac{\partial v}{\partial x}\upsilon_x\upsilon_z-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}(-1-\upsilon_x^2+\upsilon_y^2-\upsilon_z^2)+\frac{\partial p}{\partial y}\upsilon_y-\frac{\partial q}{\partial y}\upsilon_x\upsilon_y+\frac{\partial v}{\partial y}\upsilon_y\upsilon_z+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial z}(-1-\upsilon_x^2-\upsilon_y^2+\upsilon_z^2)+\frac{\partial p}{\partial z}\upsilon_z-\frac{\partial q}{\partial z}\upsilon_x\upsilon_z-\frac{\partial u}{\partial z}\upsilon_y\upsilon_z\Bigg],$$

$$q'=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{1}{1+\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2}\Bigg[\frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial t}(1-\upsilon_x^2-\upsilon_y^2-\upsilon_z^2)+$$

$$+\frac{\partial p}{\partial t}\upsilon_x-\frac{\partial v}{\partial t}\upsilon_y-\frac{\partial u}{\partial t}\upsilon_z+\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}(-1+\upsilon_x^2-\upsilon_y^2-\upsilon_z^2)+\frac{\partial q}{\partial x}\upsilon_x-$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x}\upsilon_x\upsilon_y-\frac{\partial u}{\partial x}\upsilon_x\upsilon_z-\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y}(-1-\upsilon_x^2+\upsilon_y^2-\upsilon_z^2)+\frac{\partial q}{\partial y}\upsilon_y+\frac{\partial p}{\partial y}\upsilon_x\upsilon_y-$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y}\upsilon_y\upsilon_z-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial z}(-1-\upsilon_x^2-\upsilon_y^2+\upsilon_z^2)+\frac{\partial q}{\partial z}\upsilon_z+\frac{\partial p}{\partial z}\upsilon_x\upsilon_z-\frac{\partial v}{\partial z}\upsilon_y\upsilon_z\Bigg].$$

Подставляя в (21) значения частных производных (20), получаем следующее выражение для отношения дифференциалов рассматриваемой полигенной функции:

$$d\mathbf{w}d\mathbf{z}^{-1}=\mathbf{w}'=\frac{1-\upsilon_x^2+\upsilon_y^2-\upsilon_z^2}{1+\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2}-i2\frac{\upsilon_x+\upsilon_y\upsilon_z}{1+\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2}+j0-k2\frac{\upsilon_z-\upsilon_x\upsilon_y}{1+\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2}. \tag{22}$$

Заметим, что характерной особенностью полученного выражения (22) является равенство нулю составляющей кватерниона $\mathbf{w}'$, связанной с базисной единицей j. Кроме того, легко проверить, что норма кватерниона $\mathbf{w}'$ равна единице.

Пример. Рассмотрим простую двухузловую схему ЭС, один из узлов которой является балансирующим. В этом случае установившийся режим описывается одним кватернионным уравнением, определяющим равновесное состояние узла, в котором задано сопряженное значение комплексной мощности $\hat{S} = P - iQ$:

$$Z\hat{S} = \mathbf{U}\overline{\mathbf{U}} - U'_{bu}\overline{\mathbf{U}}\,, \tag{23}$$

где $\mathbf{U} = U_d + U_m j$ — кватернионное напряжение в расчетном узле; $\overline{\mathbf{U}} = \hat{U}_d + \hat{U}_m j$ — частично-сопряженное кватернионное напряжение; U'_{bu} — напряжение в балансирующем узле; $Z = R + iX$ — комплексное сопротивление ветви, соединяющей узлы. Составляющие кватерниона $\mathbf{U}$ в этом случае определяются с помощью решения системы действительных уравнений [16]

$$U'^2_d + U''^2_d - U'^2_m + U'^2_m - U'_{bu}U'_d = PR + QX\,,$$

$$-2U'_m U'_m + U'_{bu}U''_d = PX - QR\,,$$

$$2U'_d U'_m - U'_{bu}U'_m = 0\,,$$

$$2U''_d U'_m + U'_{bu}U''_m = 0\,,$$

что при анализе значений активной P и реактивной Q мощностей вне области существования установившихся режимов приводит к следующим результатам:

$$U'_d = \frac{U'_{bu}}{2}\,,\; U''_d = -\frac{2U'_{bu}(PX - QR)}{4y + U'^2_{bu}}\,,\; U'_m = \sqrt{y}\,,\; U''_m = \frac{2\,(PX - QR)}{4y + U'^2_{bu}}\,U'_m\,, \tag{24}$$

где

$$y = -\frac{U'^2_{bu}}{4} - PR - QX + \frac{\sqrt{(R^2 + X^2)(P^2 + Q^2)}}{2}\,.$$

Для анализа предельных условий кватернионного уравнения (23) вне области существования установившихся режимов продифференцируем указанное уравнение по $\mathbf{U}$ и приравняем полученный результат к нулю. В результатате получим выражение

$$d\,(Z\hat{S})\,d\,\mathbf{U}^{-1} = \overline{\mathbf{U}} + \mathbf{U}\,(d\,\overline{\mathbf{U}}d\,\mathbf{U}^{-1}) - U'_{bu}(d\,\overline{\mathbf{U}}d\,\mathbf{U}^{-1}) = 0\,, \tag{25}$$

из которого следует соотношение

$$d\overline{\mathbf{U}}d\mathbf{U}^{-1} = (U'_{bu} - \mathbf{U})^{-1}\,\overline{\mathbf{U}} =$$

$$= (U'_{bu} - U'_d - U''_d i - U'_m j - U''_m k)^{-1}(U'_d - U''_d i + U'_m j - U''_m k). \tag{26}$$

Поскольку в анализируемом случае $U'_{\partial} = U'_{bu}/2$, равенство (26) может быть записано в виде

$$d\bar{U}d\mathbf{U}^{-1} = \left(U'_d - U''_d i - U'_m j - U''_m k\right)^{-1}\left(U'_d - U''_d i + U'_m j - U''_m k\right),$$

или

$$d\bar{U}d\mathbf{U}^{-1} = \frac{\left(U'_d + U''_d i + U'_m j + U''_m k\right)\left(U'_d - U''_d i + U'_m j - U''_m k\right)}{U'^2_d + U''^2_d + U'^2_m + U''^2_m} =$$

$$= \frac{U'^2_d + U''^2_d - U'^2_m + U'^2_m - 2U'_m U''_m i + 2U'_d U'_m j + 2U''_d U'_m k}{U'^2_d + U''^2_d + U'^2_m + U''^2_m}. \qquad (27)$$

Как следует из (22), для выполнения равенства (25), описывающего предельные условия кватернионного уравнения (23), необходимо, чтобы составляющая кватерниона (27), связанная с базисной единицей j, принимала нулевое значение. Это возможно при $U'_d = 0$ (тривиальный случай, соответствующий значению $U'_{bu} = 0$, при котором каждое решение является предельным случаем) или $U'_m = 0$, что для рассматриваемого примера соответствует границе области существования. Таким образом, предельное условие (25) не выполняется ни в одной из точек вне области существования установившихся режимов анализируемой двухузловой схемы ЭС.

Выводы

Внутренние псевдопроизводные являются эффективным инструментом, позволяющим построить универсальный подход к дифференцированию в гиперкомплексных числовых системах, что, в свою очередь, создает условия для математического анализа как моногенных, так и полигенных функций, рассматриваемых в рамках соответствующих числовых систем.

Наличие в выражениях для производных полигенных функций величин $\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z$, которые в общем случае не равны нулю, свидетельствует о взаимозависимости базисных элементов числовых систем.

Кватернионный анализ простейшей двухузловой схемы ЭС показывает, что предельное условие (25) кватернионного уравнения установившихся режимов (23) для кватернионных решений вне области существования режимов не выполняется ни в одной из точек.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sekene Y.* , *Yokojama A.* Multisolutions for load flow problem of power System and their physical stability// Proc. 7th Power Syst. Comput. Conf. Lausanne, 1981, p. 819—826.
2. *Веников В.А.* Переходные электромеханические процессы в электрических системах. М.: Высшая школа, 1985, 536 с.
3. *Kasner E.* A complete characterization of the derivative of a polygenic function// Proc. of the National Academy of Sciences 1936, Vol. 22, p. 172—177.
4. *Клипков С.И.* Использование гиперкомплексных числовых систем для математического моделирования предельных режимов электрических систем // Реєстрація, зберігання і обробка даних, 2012, **14**, № 4, с. 11—23.
5. *Клипков С.И.* Особенности гармонического анализа предельных режимов электрических систем // Электрон. моделирование, 2015, **37**, № 1, с. 113—127.
6. *Клипков С.И.* Гиперкомплексные параметрические числовые системы в математическом моделировании // Реєстрація, зберігання і обробка даних, 2013, **15**, № 1, с. 3—13.
7. *Клипков С.И.* О новом подходе к построению гиперкомплексных числовых систем ранга два над полем комплексных чисел // Укр. мат. журн., 2011, **63**, № 1, с. 130–139.
8. *Синьков М.В., Бояринова Ю.Е., Калиновский Я.А.* Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения. Київ: Інфодрук, 2010, 388 с.
9. *Ефремов А.П.* Кватернионы: алгебра, геометрия и физические теории // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2004, № 1, с. 111—127.
10. *Садбери А.* Кватернионный анализ // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2004, № 2, с. 130—157.
11. *Кассандров В.В.* Кватернионный анализ и алгебродинамика // Там же, 2006, № 2, с. 58—84.
12. *Петров А.М.* Кватернионное представление вихревых движений. М.: Компания Спутник+, 2006, 33 с.
13. *Риман Б.* Сочинения. М. - Л.: Гостехиздат, 1948, 543 с.
14. *Карпенко И.И., Тышкевич Д.Л., Сухтаев А.И.* Об одном подходе к дифференцированию функций кватернионного переменного // Ученые записки ТНУ им. В.И. Вернандского. Серия «Математика. Механика. Информатика и Кибернетика», 2004, **17** (56), № 1, с. 30—37.
15. *Ошоров Б.Б.* Об одном четырехмерном аналоге системы уравнений Коши—Римана. // Сб. науч. работ «Неклассические уравнения математической физики». Труды международной конференции «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения», Новосибирск, 2007, с. 212—220.
16. *Щербина Ю.В., Задерей А.В., Клипков С.И.* Об одном методе исследования существования установившихся режимов электрических систем // Электрон. моделирование, 1984, **6**, № 5, с. 61—64.

Получена 18.09.19

REFERENCES

1. Sekene, Y. and Yokojama, A. (1981), “Multisolutions for load flow problem of power System and their physical stability”, *Power Systems Computer Conference*, *Proceeding of the 7th Power Syst. Comput. Conf*, Lausanne, pp. 819-826.
2. Venikov, V.A. (1985), *Perekhodnyye elektromekhanicheskiye protsessy v elektricheskikh sistemakh* [Transient electromechanical processes in electrical systems], Vysshaya shkola, Moscow, USSR.

3. Kasner, E. (1936), "A complete characterization of the derivative of a polygenic function", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Vol. 22, pp. 172-177.
4. Klipkov, S.I. (2012), "The use of hypercomplex numerical systems for mathematical modeling of limiting modes of electrical systems", *Reyestratsiya, zberihannya i obrobka danykh*, Vol. 14, no. 4, pp. 11-23.
5. Klipkov, S.I. (2015), "Features of harmonic analysis of limiting modes of electrical systems", *Elektronnoye modelirovaniye*, Vol. 37, no. 1, pp. 113-127.
6. Klipkov, S.I. (2013), "Hypercomplex parametric numerical systems in mathematical modeling", *Reyestratsiya, zberihannya i obrobka danykh*, Vol. 15, no. 1, pp. 3-13.
7. Klipkov, S.I. (2011), "On a new approach to constructing hypercomplex numerical systems of rank two over the field of complex numbers", *Ukrainskiy matematicheskiy zhurnal*, Vol. 63, no. 1, pp. 130-139.
8. Sin'kov, M.V., Boyarinova, Yu.Ye. and Kalinovskiy, Ya.A. (2010), Konechnomernyye giperkompleksnyye chislovyye sistemy. Osnovy teorii. Primeneniya [Finite-dimensional hypercomplex numerical systems. Fundamentals of the theory. Applications], *Infodruk*, Kyiv, Ukraine.
9. Jefremov, A.P. (2004), "Quaternions: Algebra, Geometry and Physical Theories", *Giperkompleksnyje chisla v geometriji i fizike*, no. 1, pp. 111-127.
10. Sadberi, A. (2004), "Quaternion Analysis", *Giperkompleksnyje chisla v geometriji i fizike*, no. 2, pp. 130-157.
11. Kassandrov, V.V. (2006), "Quaternion Analysis and Algerodynamics", *Giperkompleksnyje chisla v geometriji i fizike*, no. 2, pp. 58-84.
12. Petrov, A.M. (2006), *Kvaternionnoje predstavlenije vikhrevykh dvizheniy* [Quaternion representation of vortex motions], Kompanija Sputnik+, Moscow, Russia.
13. Riman, B. (1948), *Sochineniya* [Works], Gostekhizdat, Moscow, USSR.
14. Karpenko, I.I., Tyshkevich, D.L. and Sukhtajev, A.I. (2004), "On an approach to the differentiation of functions of a quaternion variable", *Uchenyye zapiski TNU. Matematika*, Vol. 17 (56), no. 1, pp. 30-37.
15. Oshorov, B.B. (2007), "On a four-dimensional analogue of the Cauchy-Riemann system of equations", *Neklassicheskiye uravneniya matematicheskoy fiziki. Tr. mezhdunar. konf. «Differentsial'nyye uravneniya, teoriya funktsiy i prilozheniya»*, pp. 212-220.
16. Shcherbina Ju.V., Zaderey A.V., Klipkov S.I. (1984), "About one method of studying the existence of steady-state modes of electrical systems", *Elektronnoye modelirovaniye*, Vol. 6, no. 5, pp. 61-64.

Received 18.09.19

С.І. Кліпков

КВАТЕРНІОННИЙ АНАЛІЗ
РЕЖИМІВ ЕЛЕКТРИЧНИХ СИСТЕМ

Досліджено властивості полігенних функцій комплексного і кватерніонного змінних, що використовуються в задачах електроенергетики при диференціальному обчисленні. Введено поняття внутрішньої псевдопохідної та отримано вирази для правого і лівого відношень диференціалу довільної кватерніонної функції до диференціалу її аргументу. Визначено умови диференційованості функцій кватерніонного змінного. Наведено приклад кватерніонного аналізу режимів простої двохвузлової схеми електричної системи.

Ключові слова: параметрична гіперкомплексна числова система, псевдопохідна, комплексні числа, кватерніони, квадриплексні числа.

S.I. Klipkov

QUATERNION ANALYSIS
OF THE MODES OF ELECTRICAL SYSTEMS

The properties of the polygenic functions of the complex and quaternionic variables used in the problems of the electric power industry are studied from the point of view of differential calculus. Based on the introduced concept of internal pseudo-derivative, expressions are obtained for the right and left quotients of the differential of an arbitrary quaternion function to the differential of its argument. The conditions for the differentiability of functions of a quaternionic variable are formulated. An example of a quaternion analysis of the modes of a simple two-node circuit of an electrical system is given.

K e y w o r d s: parametric hypercomplex numerical system, pseudo-derivative, complex numbers, quaternions, quadriplex numbers.

КЛИПКОВ Сергей Иванович, канд. техн. наук, вед. инженер Частного акционерного общества Национальной энергетической кампании «Укрэнерго». В 1974 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — электроэнергетика, гиперкомплексные числовые системы.