doi: https://doi.org/10.15407/emodel.42.01.025
УДК 539.2:519.63

Х.М. Гамзаев, д-р техн. наук
Азербайджанский государственный университет
нефти и промышленности
(Азербайджанская Республика, AZ 1010, Баку, пр-т Азадлыг, 20,
тел. (994 55) 6826701, e-mail: xan.h@rambler.ru)

Алгоритм определения траектории движения источника тепла вдоль нагреваемого одномерного стержня

Рассмотрен процесс нагрева одномерного стержня подвижным источником тепла, описываемым параболическим уравнением с правой частью. Поставлена задача идентификации траектории подвижного источника по заданному температурному режиму в заданной точке стержня. Данная задача относится к классу обратных задач, связанных с восстановлением правых частей дифференциальных уравнений в частных производных. Построен дискретный аналог задачи с использованием обычных конечно-разностных аппроксимаций по времени и пространству. Предложено полученную разностную задачу разделить на три взаимно независимые разностные задачи второго порядка. В результате получено квадратное уравнение для определения положения подвижного источника при каждом дискретном значении временной переменной.

К л ю ч е в ы е с л о в а: подвижный источник, закон движения источника, функция источника, обратная задача, разностная задача.

Известно, что для осуществления ряда технологических процессов применяется нагрев материалов подвижным источником тепла различной физической природы. Нагрев лазерным и электронным лучом, пламенем газовой горелки, электрической дугой и другие технологические процессы характеризуются наличием подвижных источников теплового воздействия. Подвижные источники тепла применяются в процессах плавки и рафинирования металла в металлургии, при термообработке, сварке и микрообработке в машиностроении, приборостроении и др. [1, 2].

Одной из основных задач, которые возникают при исследовании технологических процессов с подвижными источниками, является определение параметров модели подвижного источника, т.е. формы, мощности и законов движения источника (траектория источника). В литературе данная задача в зависимости от поставленной цели представляется как задача оптимального управления и для ее решения исследуются в основном вопросы существования и единственности решения поставленных задач [2—6].

Следует заметить, что при решении задачи оптимального управления требуется большой объем вычислений, связанных с процедурой определения градиента функционала, и поиском нужного значения параметра регуляризации. При этом решение задачи осуществляется одновременно, что приводит к потере оперативности определения решения. В связи с этим задачу определения закона движения источника будем рассматривать как обратную задачу определения правой части одномерного параболического уравнения, зависящего от времени.

Постановка задачи и метод решения. Рассмотрим процесс нагрева неоднородного одномерного металлического стержня подвижным источником. Предположим, что функция, описывающая подвижный тепловой источник, имеет вид $q(t)(\alpha - \beta(x - s(t))^2)$, где α, β — заданные положительные числа; $q(t)$ — мощность источника; $s(t)$ — функция движения источника тепла. Предполагаем, что концы стержня теплоизолированы, а на боковой поверхности стержня происходит теплообмен по закону Ньютона с окружающей средой, имеющей заданную температуру. Математическую модель процесса нагрева стержня подвижным источником представим в следующем виде:

$$c_p \rho \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) -$$

$$- \gamma(u(x,t) - \theta(x,t)) + q(t)(\alpha - \beta(x - s(t))^2), \ 0 < x < l, \ 0 < t \le T, \quad (1)$$

$$u(x,0) = \phi(x), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

где $u(x,t)$ — температура в сечении стержня с абсциссой x в момент времени t; $\lambda(x)$ — коэффициент теплопроводности стержня; c_p — теплоемкость стержня; ρ — плотность материала стержня; $\theta(x,t)$ —температура окружающей среды; γ — коэффициент теплообмена с окружающей средой; l — длина стержня.

Предположим, что траектория движения подвижного точечного источника заранее неизвестна и требуется найти такой закон движения источника, который обеспечивал бы в заданной точке стержня $x=\xi$ заданный температурный режим

$$u(\xi,t)=f(t), \tag{5}$$

где $f(t)$ — заданная функция.

Таким образом, задача состоит в определении функций $u(x,t)$ и $s(t)$, удовлетворяющих уравнению (1) и условиям (2)—(5), и относится к классу обратных задач, связанных с восстановлением правых частей дифференциальных уравнений в частных производных [7—10].

Теперь построим дискретный аналог дифференциальной задачи (1)—(5). Для этого введем равномерную разностную сетку,

$$\overline{\omega}=\{(t_j,x_i):x_i=i\Delta x,\ t_j=j\Delta t,\ i=0,1,2,\dots n,\ j=0,1,2,\ \dots m\},$$

в прямоугольной области $\{0\le x\le l,\ 0\le t\le T\}$ с шагом $\Delta x=l/n$ по переменной x и $\Delta t=T/m$ по времени t. Предполагаем, что точка $x_k=\xi=$ $=k\Delta x$ совпадает с одним из внутренних узлов разностной сетки $\overline{\omega}$. Используя неявную аппроксимацию по времени для значений искомой функции в краевых точках, дискретный аналог задачи (1)—(5) на сетке $\overline{\omega}$ представим в виде

$$c_p\rho\frac{u_i^j-u_i^{j-1}}{\Delta t}=\frac{1}{\Delta x}\left[\lambda_{i+1/2}\frac{u_{i+1}^j-u_i^j}{\Delta x}-\lambda_{i-1/2}\frac{u_i^j-u_{i-1}^j}{\Delta x}\right]-$$

$$-\gamma(u_i^j-\theta_i^j)+q^j(\alpha-\beta x_i^2+2\beta x_i s^j-\beta(s^j)^2),\quad i=1,2,\dots n-1,$$

$$\frac{u_1^j-u_0^j}{\Delta x}=0,$$

$$\frac{u_n^j-u_{n-1}^j}{\Delta x}=0,$$

$$u_k^j=f^j,\ j=1,2,\dots,m,$$

$$u_i^0=\phi(x_i),\ \ i=0,2,\dots,n,$$

где $u_i^j\approx u(x_i,t_j),\ s^j\approx s(t_j),\ \lambda_{i\pm1/2}=\lambda(x_i\pm\Delta x/2),\ q^j=q(t_j),\ \theta_i^j=\theta(x_i,t_j)$.

Построенная разностная задача представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, в которой неизвестными являются приближенные значения искомых функций $u(x,t)$ и $s(t)$ в узлах разностной сетки $\overline{\omega}$, т.е. u_i^j, s^j, $i=0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n$, $j=1,2,3,...,m$. Данную систему разностных уравнений представим в виде

$$a_i u_{i-1}^j - c_i u_i^j + b_i u_{i+1}^j = -c_p \rho \Delta x^2 u_i^{j-1} - \gamma \Delta x^2 \Delta t \theta_i^j - \Delta x^2 \Delta t q^j (\alpha - \beta x_i^2) -$$
$$- 2\Delta x^2 \Delta t q^j \beta x_i s^j + \Delta x^2 \Delta t q^j \beta\,(s^j)^2,\ \ i=1,\ 2,\ ...,\ n-1, \tag{6}$$

$$u_0^j = u_1^j, \tag{7}$$

$$u_n^j = u_{n-1}^j, \tag{8}$$

$$u_k^j = f^j,\ \ j=1,\ 2,\ ...,\ m, \tag{9}$$

$$u_i^0 = \phi(x_i),\ \ i=0,\ 2,\ ...\ n, \tag{10}$$

где $a_i = \Delta t\,\lambda_{i-1/2}$; $b_i = \Delta t\,\lambda_{i+1/2}$; $c_i = a_i + b_i + \Delta x^2 c_p \rho + \gamma \Delta x^2 \Delta t$.

Для того чтобы разделить задачи (6)—(10) на взаимно независимые подзадачи, каждая из которых может быть решена самостоятельно, представим решение системы (6)—(10) при каждом фиксированном значении $j=1,\ 2,\ ...,\ m$ в виде

$$u_i^j = w_i^j + v_i^j s^j + z_i^j (s^j)^2,\ \ i=0,\ 2,...,n, \tag{11}$$

где w_i^j, v_i^j, z_i^j – неизвестные переменные. Подставив значение u_i^j в каждое уравнение системы (6)–(8), получим

$$\left[a_i w_{i-1}^j - c_i w_i^j + b_i w_{i+1}^j + c_p \rho \Delta x^2 u_i^{j-1} + \gamma \Delta x^2 \Delta t \theta_i^j + \Delta x^2 \Delta t q^j (\alpha - \beta x_i^2)\right] +$$
$$+ s^j \left[a_i v_{i-1}^j - c_i v_i^j + b_i v_{i+1}^j + 2\Delta x^2 \Delta t q^j \beta x_i\right] +$$
$$+ (s^j)^2 \left[a_i z_{i-1}^j - c_i z_i^j + b_i z_{i+1}^j - \Delta x^2 \Delta t q^j \beta\right] = 0, \tag{12}$$

$$w_0^j + v_0^j s^j + z_0^j (s^j)^2 = w_1^j + v_1^j s^j + z_1^j (s^j)^2, \tag{13}$$

$$w_n^j + v_n^j s^j + z_n^j (s^j)^2 = w_{n-1}^j + v_{n-1}^j s^j + z_{n-1}^j (s^j)^2. \tag{14}$$

Из соотношений (12)—(14) получим следующие разностные задачи для определения вспомогательных переменных w_i^j, v_i^j, z_i^j:

$$a_i w_{i-1}^j - c_i w_i^j + b_i w_{i+1}^j + c_p \rho \Delta x^2 u_i^{j-1} +$$
$$+ \gamma \Delta x^2 \Delta t \theta_i^j + \Delta x^2 \Delta t q^j (\alpha - \beta x_i^2) = 0,\ \ i=1,2,\ ...,n-1, \tag{15}$$

$$w_0^j = w_1^j, \tag{16}$$

$$w_n^j = w_{n-1}^j. \tag{17}$$

$$a_i v_{i-1}^j - c_i v_i^j + b_i v_{i+1}^j + 2\Delta x^2 \Delta t q^j \beta x_i = 0\,,\ i = 1, 2, ..., n-1\,, \tag{18}$$

$$v_0^j = v_1^j\,, \tag{19}$$

$$v_n^j = v_{n-1}^j. \tag{20}$$

$$a_i z_{i-1}^j - c_i z_i^j + b_i z_{i+1}^j - \Delta x^2 \Delta t q^j \beta = 0\,, \tag{21}$$

$$z_0^j = z_1^j\,, \tag{22}$$

$$z_n^j = z_{n-1}^j\,,\ \ j = 1, 2, 3, ..., m. \tag{23}$$

Полученные разностные задачи (15)—(17), (18)—(20) и (21)—(23) при каждом фиксированном значении $j = 1, 2, ..., m$ представляют собой систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей и решения этих систем независимо от s^j можно найти методом Томаса [7]. Подставив (11) в уравнение (9), получим квадратное уравнение относительно s^j:

$$w_k^j + v_k^j s^j + z_k^j (s^j)^2 = f^j. \tag{24}$$

Положительный корень уравнения (24) можно использовать как значение s^j.

Таким образом, вычислительный алгоритм решения разностной задачи (6)—(10) по определению $u_i^j, i = \overline{0, n},$ и s^j при каждом фиксированном значении $j = 1, 2, ..., m$ основан на решении трех линейных разностных задач второго порядка (15)—(17), (18)—(20) и (21)—(23) относительно вспомогательных переменных w_i^j, v_i^j, z_i^j, $i = \overline{0, n}$, определении s^j из (24) и использовании (11) для определения u_i^j, $i = \overline{0, n}$.

Результаты численных расчетов. Предложенный вычислительный алгоритм опробован на модельных задачах. Численные расчеты проводились по следующей схеме: для заданной функций $s(t)$, $0 \le t \le T$, определяется решение задачи (1)—(4), т.е. функция $u(x, t)$, $0 \le x \le l$, $0 \le t \le T$; найденная зависимость $f(t) = u(\xi, t)$ принимается в качестве точных данных для решения обратной задачи по восстановлению $s(t)$.

Численные расчеты выполнены на пространственно–временной разностной сетке с шагами $\Delta x = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$ м, $\Delta t = 0{,}1$ с для параметров: $c_p =$

$= 650$ Дж/(кг·град); $\rho = 7850$ кг/м^3; $\lambda(x) = 58$ Вт/(м·град); $s(t) = 0{,}5 + 0{,}5\cos 10t$ м; $s(t) = 1 - 0{,}2\sqrt{t}$ м; $q(t) = 2 \cdot 10^3$ Вт/м^3; $\theta(x,t) = 25^{\circ} C$, $\phi(x) = 25^{\circ} C$; $l = 1$ м; $\gamma = 0{,}32$, $\alpha = 1$; $\xi = 0{,}05$ м; $\beta = 1$. Численные эксперименты показали, что максимальная относительная погрешность восстановления значений функции $s(t)$ не превышает 0,0005%.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что с помощью предложенного вычислительного алгоритма искомая функция $s(t)$ определяется с высокой точностью. Анализ результатов численных расчетов показывает, что предложенный вычислительный алгоритм можно применять при исследовании процессов нагрева материалов подвижным источником тепла.

Выводы

Предложенный численный метод, основанный на дискретизации рассматриваемой обратной задачи по времени и пространству и использовании разделения искомых переменных, позволяет в каждом временном слое последовательно определить положение подвижного источника и распределение температуры по длине стержня.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рэди Дж.* Промышленные применения лазеров. М.: Мир, 1981, 638с.
2. *Бутковский А.Г., Пустыльников Л.М* Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1980, 383 с.
3. *Кубышкин В.А, Финягина В.И.* Подвижное управление в системах с распределенными параметрами. М.: СИНТЕГ, 2005, 232 с.
4. *Кубышкин В.А.* Подвижное управление колебаниями в системах с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика, 2011, № 10, с. 117–128.
5. *Теймуров Р.А.* Об одной задаче оптимального управления подвижными источниками // Там же, 2013, № 7, с. 29–45.
6. *Бардыбахин А.И.* Оптимальный локальный нагрев полубесконечного стержня подвижным точечным источником тепла // Там же, 1997, №6, с. 27–41.
7. *Samarskii, A.A., Vabishchevich P.N.* Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics. Walter de Gruyter, 2007.
8. *Borukhov V.T., Zayats G.M.* Identification of a time-dependent source term in nonlinear hyperbolic or parabolic heat equation//International Journal of Heat and Mass Transfer, 2015, Vol. 91, p. 1106—1113.
9. *Vabishchevich P.N., Vasil'ev V.I.* Computational algorithms for solving the coefficient inverse problem for parabolic equations // Inverse Problems in Science and Engineering, 2016, № 1, p. 42–59.
10. *Gamzaev Kh.M.* Numerical Solution of Combined Inverse Problem for Generalized Burgers Equation// Journal of Mathematical Sciences, 2017, Vol. 221, N 6, p. 833—839.

Получена 28.11.19

REFERENCES

1. John, F.R. (1997), *Promyshlennyye primeneniya lazerov* [Industrial Applications of Lasers. Elsevier Science], Mir.
2. Butkovsky, A.G. and Pustylnikov, L.M. (1980), *Teoriya podvizhnogo upravleniya sistemami s raspredelennymi parametrami* [The theory of mobile control systems with distributed parameters], Nauka, Moscow, Russia.
3. Kubyshkin, V.A. and Finyagina, V.I. (2005), *Podvizhnoye upravleniye v sistemakh s raspredelennymi parametrami* [Mobile Control in the Systems with the Distributed Parameters], SINTEG, Moscow, Russia.
4. Kubyshkin, V. A. (2011), "Mobile control of vibrations in systems with distributed parameters", *Automation and Remote Control*, Vol. 72, no. 10, pp. 2112-2122.
5. Teymurov, R. A. (2013), "On a problem of optimal control of mobile sources", *Automation and Remote Control*, Vol. **74**, no. 7, pp.1082-1096.
6. Bardybakhin, A. I. (1997), "Local Optimal Heating of a Semi-Infinite Bar by a Mobile Point Heat Source", *Automation Remote Control*, Vol. 58, no. 6, pp. 905-917.
7. Samarskii, A.A. and Vabishchevich P.N. (2007), Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics. Walter de Gruyter.
8. Borukhov, V.T. and Zayats, G.M. (2015), "Identification of a time-dependent source term in nonlinear hyperbolic or parabolic heat equation", I*nternational Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 91, pp. 1106-1113.
9. Vabishchevich, P.N. and Vasil'ev, V.I. (2016), "Computational algorithms for solving the coefficient inverse problem for parabolic equations", *Inverse Problems in Science and Engineering*, no. 1, pp. 42-59.
10. Gamzaev, Kh.M. (2017), "Numerical Solution of Combined Inverse Problem for Generalized Burgers Equation", *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 221, no. 6, pp. 833-839.

Received 28.11.19

Х.М. Гамзаєв

АЛГОРИТМ ВИЗНАЧЕННЯ ТРАЄКТОРІЇ РУХУ ДЖЕРЕЛА ТЕПЛА ВЗДОВЖ ОДНОВИМІРНОГО СТРИЖНЯ, ЩО НАГРІВАЄТЬСЯ

Розглянуто процес нагрівання одновимірного стрижня рухомим джерелом тепла, що описується параболічним рівнянням з правою частиною. Поставлено задачу ідентифікації траєкторії рухомого джерела за заданим температурним режимом у заданій точці стрижня. Дана задача належить класу звортних задач, пов'язаних з відновленням правих частин диференціальних рівнянь у частинних похідних. Побудовано дискретний аналог задачі з використанням звичайних скінченно-різницевих апроксимацій за часом і простором. Запропоновано отриману різницеву задачу поділити на три взаємно незалежні різницеві задачі другого порядку. В результаті отримано квадратне рівняння для визначення положення рухомого джерела за кожним дискретним значенням змінної за часом.

К л ю ч о в і с л о в а: рухоме джерело, закон рухомого джерела, функція джерела, зворотня задача, різницева задача.

Kh.M. Gamzaev

IDENTIFICATION OF A TRAJECTORY OF A MOBILE POINT
SOURCE WHEN HEATING A ONE-DIMENSIONAL ROD

The process of heating a one-dimensional rod by a movable heat source described by the parabolic equation with the right part is considered. The problem of identification of the trajectory of the mobile source for a given temperature regime at a given point of the rod is posed. This problem belongs to the class of inverse problems associated with the recovery of the right parts of partial differential equations. A discrete analogue of the problem is constructed using the usual finite-difference approximations in time and space. For the solution of the received difference problem the special representation allowing to split problems on three mutually independent difference problems of the second order is offered. The result is a quadratic equation for determining the position of the moving source for each discrete value of the time variable.

K e y w o r d s: mobile source, the law of motion of the source, the source function, inverse problem, difference problem.

ГАМЗАЕВ Ханлар Мехвали оглы, д-р техн. наук, профессор кафедры «Общая и прикладная математика» Азербайджанского государственного университета нефти и промышленности, который окончил 1976 г. Область научных исследований — математическое моделирование, вычислительная гидродинамика, численные методы.