
doi: <https://doi.org/10.15407/emodel.42.02.041>
УДК 534.1:519.876.5:621.671

С.С. Шевченко, канд. техн. наук,
ООО «Юнайтед Продакшенс – Атом»
(Украина, 40016, Сумы, ул. Прокофьева, 36,
e-mail: s.shevchenko@united.productions),

А.С. Шевченко, аспирант
Сумский госуниверситет
(Украина, 40007, Сумы, ул. Римского-Корсакова, 2,
e-mail: o.shevchenko@ecolog.sumdu.edu.ua)

Определение собственных частот ротора центробежной машины с системой автоматического уравнивания осевых сил

Предложена модель автоматического уравнивающего устройства ротора многоступенчатой центробежной машины, выполняющего функции гидравлического затвора и радиально-упорного гидростатического подшипника. Проведен анализ динамики системы. Получены линеаризованные уравнения совместных радиально-осевых колебаний ротора центробежного насоса с системой авторазгрузки. Выведены формулы для построения амплитудных и фазовых частотных характеристик.

К л ю ч е в ы е с л о в а: гидравлический затвор, гидропята, совместные радиально-осевые колебания, частотные характеристики.

В настоящее время для крупных высоконапорных многоступенчатых насосов самым эффективным способом уравнивания осевых сил является использование автоматических уравнивающих устройств – гидропят [1]. Гидропята (рис. 1) содержит цилиндрический дроссель 1, неподвижное опорное кольцо (подушку) 2, торцовый дроссель 3, камеру 4, разделяющую цилиндрический и радиальные дроссели, а также жестко закрепленный на валу разгрузочный диск 5, выполняющий роль упорного подшипника.

Полный перепад давления $\Delta p = p_1 - p_3$ на пяте соответствует разности между давлением нагнетания p_1 и давлением в камере за гидропятой. Часть общего перепада давления $\Delta p_2 = p_2 - p_3$ дросселируется на торцовом зазоре 4, проводимость которого зависит от ширины зазора z , т.е. от

© Шевченко С.С., Шевченко А.С., 2020

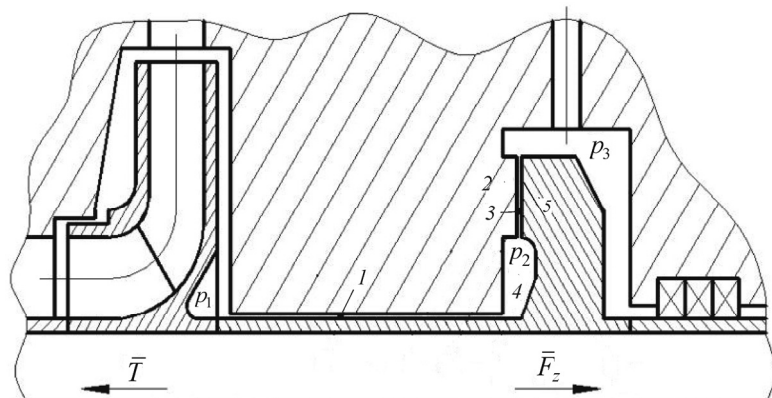


Рис. 1. Гидропята

осевого положения ротора. Если под действием избыточной осевой силы ротор смещается влево, то зазор z уменьшается, а давление увеличивается, восстанавливая равенство силы T , действующей на ротор, и силы F_z , действующей на разгрузочный диск. Таким образом, гидропята автоматически поддерживает осевое равновесие ротора.

Постановка задачи. Ротор центробежного насоса с системой авто-разгрузки имеет свободу осевых перемещений в пределах торцового зазора гидропяты. В простейшем случае ротор как абсолютно твердое тело совершает одномерные осевые колебания, характеристики которых определяются параметрами системы уравнивания [2]. Кроме того, в цилиндрическом дросселе возникают гидродинамические радиальные силы [3, 4], определяющие характер радиальных колебаний ротора. Одна из них — сила гидростатической жесткости — пропорциональна дросселируемому перепаду давления $\Delta p_1 = p_1 - p_2$, т.е. прямо зависит от давления p_2 в камере, а значит, и от осевых колебаний. Следовательно, радиальные и осевые колебания оказываются взаимосвязанными, что подтверждается результатами экспериментов [5,6].

В процессе работы насоса на ротор действуют близкие к гармоническим возмущения в виде пульсаций давления нагнетания и осевой силы. Частота пульсаций равна или кратна частоте вращения. Под действием этих возмущений ротор совершает вынужденные колебания, амплитуда которых зависит от удаленности частоты вращения от собственных частот системы ротор — уравнивающее устройство. В связи с этим для предотвращения возможных резонансных осевых колебаний необходимо знать собственные частоты системы, а для оценки амплитуд вынужденных колебаний в рабочих режимах следует строить амплитудные частотные характеристики.

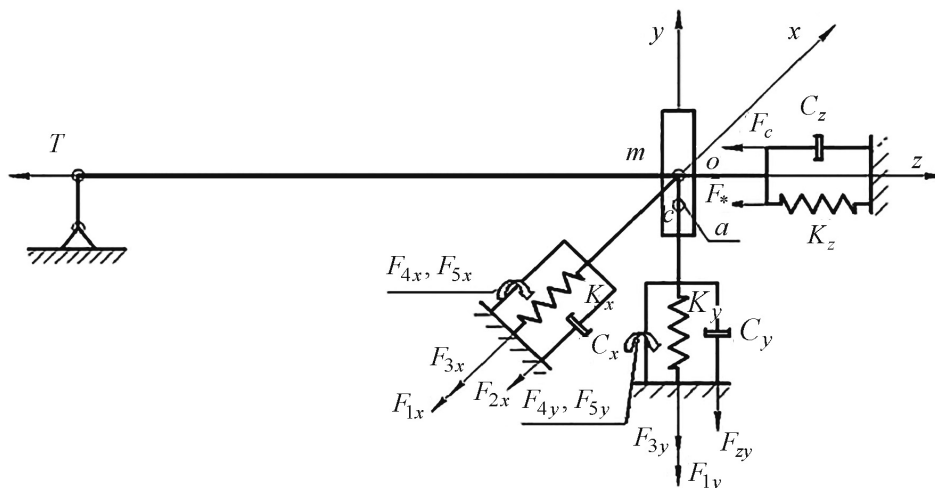


Рис. 2. Одномассовая модель жесткого ротора с автоматическим уравнивающим устройством

Неизбежные осевые колебания ротора приводят к тому, что движение жидкости в дросселирующих каналах систем авторазгрузки становится нестационарным, пульсирующим. Жидкость по инерции сопротивляется изменению скорости, в результате возникает дополнительное реактивное или инерционное сопротивление.

В работе [7] рассмотрены осевые колебания ротора, обусловленные его радиальными колебаниями, представляющими напередзаданные внешние кинематические воздействия. Рассмотрим задачу получения линеаризованных уравнений совместных радиально-осевых колебаний простейшей одномассовой модели жесткого ротора с автоматическим уравнивающим устройством (рис. 2).

Уравнения совместных радиально-осевых колебаний ротора центробежного насоса с системой авторазгрузки. В качестве уравнений вынужденных радиальных колебаний статически неуравновешенного ротора в проекциях на оси неподвижной системы координат используем уравнения [2]

$$\begin{aligned}
 a_1 \ddot{u}_x + a_2 \dot{u}_x + a_3 u_x + a_4 \dot{u}_y + a_5 u_y &= \frac{a}{H_2} \omega^2 \cos \omega t, \\
 a_1 \ddot{u}_y + a_2 \dot{u}_y + a_3 u_y - a_4 \dot{u}_x - a_5 u_x &= \frac{a}{H_2} \omega^2 \sin \omega t, \\
 u_x &= \frac{x}{H_2}, \quad u_y = \frac{y}{H_2},
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где H_2 — базовое значение торцового зазора гидропаты; ω — частота собственного вращения одномассового ротора.

Размерность всех слагаемых в этих уравнениях c^{-2} , а коэффициенты для ламинарных режимов течения определяются по формулам

$$a_1 = 1 + \frac{k_g}{m}, \quad a_2 = \frac{1}{m} (k_d + k_g K_i \theta) = \frac{k_d}{m} \left(1 + \frac{\rho}{\mu} q_0 \frac{H_1}{l_1} \theta \right),$$

$$a_3 = \frac{1}{m} k_p (\theta + 4\chi_s), [c^{-2}], \quad a_4 = a'_4 \omega, \quad (2)$$

$$a'_4 = \frac{k_g \kappa}{2m}, \quad a_5 = a'_5 \omega, \quad a'_5 = \frac{k_d \kappa}{2m},$$

где m — приведенная масса ротора; k_g, k_d, k_p — коэффициенты гидродинамических сил в щелевых уплотнениях; K_i — коэффициент, характеризующий влияние локального ускорения на демпфирующую радиальную силу; κ — коэффициент закрутки потока в кольцевом зазоре; χ_s — безразмерная осевая сила; ρ — плотность жидкости; μ — коэффициент динамической вязкости; θ — относительная обобщенная угловая координата; H_1 — средний радиальный зазор кольцевого дросселя; l_1 — длина кольцевого дросселя. Для турбулентных течений изменяются только коэффициенты демпфирования и гидростатической жесткости:

$$a_{2T} = \frac{1}{m} (k_{dT} + k_g K_{iT} \theta) = \frac{k_{dT}}{m} \left(1 + 600 \frac{H_1}{l_1} \theta \right), \quad a_{3T} = \frac{1}{m} k_p (\theta + \chi_{sT}).$$

Умножим второе уравнение (1) на мнимую единицу, сложим оба уравнения почленно и введем комплексную переменную $u_r = u_x + iu_y$. В результате вместо системы четвертого порядка получим спрессованную систему второго порядка с комплексными коэффициентами,

$$a_1 \ddot{u}_r + a_2 \dot{u}_r + a_3 u_r - i\omega (a'_4 \dot{u}_r + a'_5 u_r) = \frac{a}{H_2} \omega^2 e^{i\omega t},$$

или в операторной форме:

$$D_r(p) u_r = \omega^2 \frac{a}{H_2} e^{i\omega t}, \quad D_{rT}(p) u_r = \omega^2 \frac{a}{H_2} e^{i\omega t}, \quad (3)$$

где собственные операторы радиальных колебаний имеют вид

$$\begin{aligned} D_r(p) &= a_1 p^2 + a_2 p + a_3 - i\omega (a'_4 p + a'_5), \\ D_{rT}(p) &= a_1 p^2 + a_{2T} p + a_{3T} - i\omega (a'_4 p + a'_5). \end{aligned} \quad (4)$$

Заметим, что коэффициенты гироскопической и циркуляционной силы зависят от частоты вращения. Для неподвижного ротора $a_4(0) = 0$, $a_5(0) = 0$. Коэффициенты a_2 , a_3 собственных операторов зависят от давления p_2 в камере гидропаты, которое, в свою очередь, зависит от торцового зазора. В этом случае уравнения радиальных колебаний становятся нелинейными.

Линеаризуем нелинейные силы вязкого сопротивления и гидростатической жесткости в окрестности статического равновесия, переходя к их вариациям:

$$\delta(a_2 \dot{u}_r) = a_{20} \delta \dot{u}_r + \dot{u}_{r0} \delta a_2 = a_{20} \delta \dot{u}_r, \quad (\dot{u}_{r0} = 0), \quad a_{20} = a_2(\Delta p_1 = \Delta p_{10}),$$

$$\delta(a_3 u_r) = a_{30} \delta u_r + u_{r0} \delta a_3, \quad a_{30} = a_3(\Delta p_1 = \Delta p_{10}), \quad \delta a_3 = \frac{a_{30}}{\Delta p_{10}} (\delta p_1 - \delta p_2),$$

$$\delta(a_{2T} \dot{u}_r) = a_{2T0} \delta \dot{u}_r + \dot{u}_{r0} \delta a_{2T} = a_{2T0} \delta \dot{u}_r, \quad (\dot{u}_{r0} = 0), \quad a_{2T0} = a_{2T}(\Delta p_1 = \Delta p_{10}),$$

$$\delta(a_{3T} u_r) = a_{3T0} \delta u_r + u_{r0} \delta a_{3T}, \quad a_{3T0} = a_{3T}(\Delta p_1 = \Delta p_{10}), \quad \delta a_{3T} = \frac{a_{3T0}}{\Delta p_{10}} (\delta p_1 - \delta p_2).$$

Здесь u_{r0} — заданное начальное безразмерное радиальное отклонение диска, $u_{r0} = \mathbf{r}_0 / H_2$, $\varepsilon_0 = |\mathbf{r}_0| / H_1 = \bar{H} |u_{r0}|$; $\bar{H} = H_2 / H_1$, где \mathbf{r} — вектор радиального смещения центра диска. Вариации коэффициентов жесткости

$$\begin{aligned} \delta a_3 &= \delta \left[\frac{p_1 - p_2}{m} \frac{\pi R_1 l_1}{2H_1} (\theta + 4\chi_s) \right] = \\ &= \frac{a_{30}}{p_{10} - p_{20}} (\delta p_1 - \delta p_2) = \frac{a_{30}}{\sigma \Delta \psi_{10}} (\sigma \delta \psi_1 - \delta \varphi), \\ \delta a_{3T} &= \delta \left[\frac{p_1 - p_{2T}}{m} \frac{\pi R_1 l_1}{2H_1} (\theta + \chi_{sT}) \right] = \frac{a_{3T0}}{\sigma \Delta \psi_{10}} (\sigma \delta \psi_1 - \delta \varphi_T) \end{aligned}$$

зависят от регулирующего воздействия, которое, в свою очередь, зависит от осевого положения ротора. Здесь R_1 — средний радиус кольцевого зазора; $\Delta \psi$ — безразмерный перепад давления на уравновешивающем устройстве; φ — безразмерная уравновешивающая сила, $\varphi = F_z / A_0 p_n$; σ — безразмерная площадь, $\sigma = A_e / A_0$.

Теперь уравнения (3) в вариациях (знаки вариаций опущены) принимают вид

$$a_1 \ddot{u}_r + a_{20} \dot{u}_r + a_{30} u_r - i\omega (a'_4 \dot{u}_r + a'_5 u_r) + \frac{a_{30} u_{r0}}{\sigma \Delta \Psi_{10}} (\sigma \Psi_1 - \phi) = \omega^2 \frac{a}{H_2} e^{i\omega t}, \quad (5)$$

$$a_1 \ddot{u}_r + a_{2\tau 0} \dot{u}_r + a_{3\tau 0} u_r - i\omega (a'_4 \dot{u}_r + a'_5 u_r) - \frac{a_{3\tau 0} u_{r\tau 0}}{\sigma \Delta \Psi_{10}} (\sigma \Psi_1 - \phi_\tau) = \omega^2 \frac{a}{H_2} e^{i\omega t}.$$

Заметим, что $a_{30}/a_1 \approx \omega_{r*}^2$, т.е. отношение a_{30}/a_1 пропорционально квадрату парциальной собственной частоты незатухающих радиальных колебаний.

Запишем уравнения (5) в операторной форме и используем выражения безразмерной уравнивающей силы для ламинарных и турбулентных течений, связывающие радиальные и осевые колебания:

$$\begin{aligned} \phi &= \kappa_s \frac{\tau_2 p + 1}{T_2 p + 1} u_z + \frac{k_1}{T_2 p + 1} \Psi_1 + \frac{k_2}{T_2 p + 1} \varepsilon, \\ \phi_\tau &= \kappa_{s\tau} \frac{\tau_{2\tau} p + 1}{T_{2\tau} p + 1} u_z + \frac{k_{1\tau}}{T_{2\tau} p + 1} \Psi_1 + \frac{k_{2\tau}}{T_{2\tau} p + 1} \varepsilon, \end{aligned}$$

где $u_z = z/H_2$ — осевое смещение, отнесенное к базовому торцовому зазору H_2 ;

$$\varepsilon = \frac{|\mathbf{r}|}{H_1} = \frac{|\mathbf{r}|}{H_2} \frac{H_2}{H_1} = |\mathbf{u}_r| \bar{H};$$

τ_2, T_2 — постоянные времени; k_1, k_2 — приведенные коэффициенты жесткости вала. В результате получим

$$\begin{aligned} [D_{r0}(p)(T_2 p + 1) - k_2 \bar{H} \beta_0 u_{r0}] u_r - \beta_0 u_{r0} \kappa_s (\tau_2 p + 1) u_z &= \\ = \beta_0 u_{r0} [k_1 - \sigma (T_2 p + 1)] \Psi_{1a} e^{i\omega t} + (T_2 p + 1) \omega^2 \frac{a}{H_2} e^{i\omega t}, \\ [D_{r0\tau}(p)(T_{2\tau} p + 1) - k_{2\tau} \bar{H} \beta_{0\tau} u_{r0}] u_r - \beta_{0\tau} u_{r0} \kappa_{s\tau} (\tau_{2\tau} p + 1) u_z &= \\ = \beta_{0\tau} u_{r0} [k_{1\tau} - \sigma (T_{2\tau} p + 1)] \Psi_{1a} e^{i\omega t} + (T_{2\tau} p + 1) \omega^2 \frac{a}{H_2} e^{i\omega t}, \end{aligned}$$

где β_0 — перекрестный коэффициент угловой жесткости вала. Эти уравнения вместе с уравнениями осевых колебаний

$$\begin{aligned} D_z(p) u_z - K k_2 \bar{H} |\bar{u}_r| &= K [k_1 \Psi_{1a} - (T_2 p + 1) \tau_a] e^{i\omega t}, \\ D_{z\tau}(p) u_z - K k_{2\tau} \bar{H} |\bar{u}_r| &= K [k_{1\tau} \Psi_{1a} - (T_{2\tau} p + 1) \tau_a] e^{i\omega t} \end{aligned}$$

образуют две системы неоднородных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат u_z и $u_r = u_x + iu_y = |u_r|e^{i\alpha}$, $|u_r| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$, $\alpha = \arctg(u_y/u_x)$:

$$\begin{aligned} D_z(p) u_z - \bar{H}Kk_2|u_r| &= K [k_1\psi_{1a} - (T_2p + 1) \tau_a] e^{i\omega t}, \\ -\beta_0 u_{r0} \kappa_s (\tau_2 p + 1) u_z + [D_{r0}(p)(T_2 p + 1) - k_2 \bar{H} \beta_0 u_{r0}] u_r &= \quad (6) \\ &= \beta_0 u_{r0} [k_1 - \sigma (T_2 p + 1)] \psi_{1a} e^{i\omega t} + (T_2 p + 1) \omega^2 \frac{a}{H_2} e^{i\omega t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{zT}(p) u_z - \bar{H}Kk_{2T}|u_r| &= K [k_{1T}\psi_{1a} - (T_{2T}p + 1) \tau_a] e^{i\omega t}, \\ -\beta_{0T} u_{r0} \kappa_{sT} (\tau_{2T} p + 1) u_z + [D_{r0T}(p)(T_{2T} p + 1) - k_{2T} \bar{H} \beta_{0T} u_{r0}] u_r &= \quad (7) \\ &= \beta_{0T} u_{r0} [k_{1T} - \sigma (T_{2T} p + 1)] \psi_{1a} e^{i\omega t} + (T_{2T} p + 1) \omega^2 \frac{a}{H_2} e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

В отличие от (4) линеаризованные операторы содержат установившиеся значения коэффициентов демпфирования и жесткости a_{20}, a_{30} кольцевого дресселя:

$$\begin{aligned} D_{r0}(p) &= a_1 p^2 + a_{20} p + a_{30} - i\omega (a'_4 p + a'_5), \\ D_{r0T}(p) &= a_1 p^2 + a_{2T0} p + a_{3T0} - i\omega (a'_4 p + a'_5), \\ \beta &= \beta_0 |u_{r0}|, \quad \beta_0 = \frac{a_{30}}{\sigma \Delta \psi_{10}}, \quad \beta_T = \beta_{0T} |u_{r0}|, \quad \beta_{0T} = \frac{a_{3T0}}{\sigma \Delta \psi_{10}}. \end{aligned}$$

На основании формул (2) $a_{30} \sim \Delta \psi_{10}$, поэтому коэффициенты β, β_T не зависят от давления нагнетания.

Системы уравнений (6) и (7) содержат одну вещественную, u_z , и одну комплексную, $u_r = u_x + iu_y = |u_r|e^{i\alpha}$, неизвестные. Для того чтобы несколько упростить решение, не искажив при этом физическую суть процессов, воспользуемся тем, что рассматриваемая модель ротора осесимметрична, для нее все радиальные направления равноценны. Поэтому аргумент α вектора радиального смещения u_r (угол наклона относительно оси Ox в плоскости xOy неподвижной системы координат) не представляет интереса. Практическое значение имеет лишь модуль радиального смещения $|u_r|$. На этом основании примем $\alpha = 0$, $u_r = |u_r|$. Так же поступим и с вектором начального смещения $u_{r0} = |u_{r0}|e^{i\alpha_0}$, а именно запи-

шем $\alpha_0 = 0$, $u_{r0} = |u_{r0}|$. После таких упрощений уравнения (6) и (7) примут вид

$$D_{zz}(p) u_z + d_{zr} |u_r| = \Phi_z, \quad D_{rz}(p) u_z + D_{rr}(p) |u_r| = \Phi_r, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} D_{zz}(p) &= D_z(p), \quad d_{zr} = -\bar{H}Kk_2, \quad \Phi_z = K[k_1\psi_{1a} - (T_2p+1)\tau_a]e^{i\omega t}, \\ D_{rz}(p) &= -\kappa_s\beta(\tau_2p+1), \quad D_{rr}(p) = D_{r0}(p)(T_2p+1) - k_2\bar{H}\beta, \\ \Phi_r &= \beta[k_1 - \sigma(T_2p+1)]\psi_{1a}e^{i\omega t} + (T_2p+1)\omega^2 \frac{a}{H_2} e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (9)$$

Подобный вид имеют уравнения и их операторы для турбулентного режима течения в дросселирующих каналах. Операторы d_{zr} , D_{rz} обуславливают связанность осевых и радиальных колебаний.

Решая уравнения (8) для ламинарного и турбулентного течений, находим

$$u_z = \frac{1}{D} (D_{rr}\Phi_z - d_{zr}\Phi_r), \quad |u_r| = \frac{1}{D} (D_{zz}\Phi_r - D_{rz}\Phi_z), \quad (10)$$

$$u_{z\tau} = \frac{1}{D_\tau} (D_{rr\tau}\Phi_{z\tau} - d_{zr\tau}\Phi_{r\tau}), \quad |u_{r\tau}| = \frac{1}{D_\tau} (D_{zz\tau}\Phi_{r\tau} - D_{rz\tau}\Phi_{z\tau}). \quad (11)$$

Собственные операторы системы ротор—уравновешивающее устройство, учитывающие связанность осевых и радиальных колебаний, имеют вид

$$\begin{aligned} D(p) &= D_{zz}D_{rr} - d_{zr}D_{rz} = \\ &= D_z(p) [D_{r0}(p)(T_2p+1) - k_2\bar{H}\beta] - K\kappa_s k_2\bar{H}, \quad \beta(\tau_2p+1) = U_D - i\omega V_D, \\ D_\tau(p) &= D_{zz\tau}D_{rr\tau} - d_{zr\tau}D_{rz\tau} = \\ &= D_{z\tau}(p) [D_{r0\tau}(p)(T_2p+1) - k_{2\tau}\bar{H}\beta_\tau] - K\kappa_{s\tau} k_{2\tau}\bar{H}\beta_\tau(\tau_2p+1) = U_{D\tau} - i\omega V_{D\tau}. \end{aligned} \quad (12)$$

Операторы d_{zr} , $d_{zr\tau}$, D_{rz} , $D_{rz\tau}$ характеризуют связанность осевых и радиальных колебаний системы. При равенстве нулю этих операторов система (8) распадается на два независимых уравнения:

$$D_{zz}(p) u_z = \Phi_z, \quad D_{rr}(p) |u_r| = \Phi_r.$$

По уравнениям свободных колебаний $D_{zz}(p) u_z = 0$, $D_{rr}(p) |u_r| = 0$ можно вычислить собственные частоты и оценить устойчивость соответствующих парциальных систем, а по устойчивости парциальных систем можно судить об устойчивости связанной системы. В работе [8] доказано, что

при асимптотической устойчивости парциальных систем и при условии $|d_{zr}D_{rz}(is)| \ll |D_{zz}(is)D_{rr}(is)|$, ($p = is$), которое должно выполняться для всех $s \in (-\infty, \infty)$, связанная система тоже асимптотически устойчива. Таким образом, при слабой связанности устойчивость системы можно оценивать по результатам анализа более простых парциальных систем.

Сгруппируем внешние воздействия, входящие в правые части (10) и (11):

$$D(p)u_r = \left(M_{r\psi}\Psi_{1a} + M_{r\tau}\tau_a + M_{ra}\frac{a}{H_2} \right) e^{i\omega t}, \quad (13)$$

$$D(p)u_z = \left(M_{z\psi}\Psi_{1a} + M_{z\tau}\tau_a + M_{za}\frac{a}{H_2} \right) e^{i\omega t};$$

$$D_T(p)u_r = \left(M_{r\psi T}\Psi_{1a} + M_{r\tau T}\tau_a + M_{raT}\frac{a}{H_2} \right) e^{i\omega t}, \quad (14)$$

$$D_T(p)u_z = \left(M_{z\psi T}\Psi_{1a} + M_{z\tau T}\tau_a + M_{zaT}\frac{a}{H_2} \right) e^{i\omega t},$$

где с учетом (9) операторы внешних воздействий имеют вид

$$M_{r\psi} = k_1\beta \left\{ \left[1 - \frac{\sigma}{k_1}(T_2p+1) \right] D_z + K\kappa_s(\tau_2p+1) \right\}, \quad (15)$$

$$M_{r\tau} = -K\kappa_s\beta(\tau_2p+1)(T_2p+1), \quad M_{ra} = \omega^2(T_2p+1)D_z;$$

$$M_{z\psi} = Kk_1(T_2p+1) \left(D_{r0} - \frac{\sigma}{k_1}k_2\bar{H}\beta \right),$$

$$M_{z\tau} = -K(T_2p+1) \left[(T_2p+1)D_{r0} - \bar{H}k_2\beta \right], \quad (16)$$

$$M_{za} = \bar{H}Kk_2\omega^2(T_2p+1).$$

Для турбулентных течений структура этих выражений остается неизменной, необходимо только добавить индекс «Т» операторам D_z, D_{r0} , постоянным времени T_2, τ_2 и коэффициентам $k_1, k_2, \kappa_s, \beta$. Выполнив операции умножения, приведем вещественные и мнимые части собственных операторов (12) к виду

$$U_D = m_0p^6 + m_1p^5 + m_2p^4 + m_3p^3 + m_4p^2 + m_5p + m_6,$$

$$V_D = n_0p^5 + n_1p^4 + n_2p^3 + n_3p^2 + n_4p + n_5;$$

$$m_0 = a_1c_0T_2, \quad m_1 = a_1c_0 + (a_1c_1 + a_{20}c_0)T_2,$$

$$\begin{aligned}
 m_2 &= a_1c_1 + a_{20}c_0 + (a_1c_2 + a_{20}c_1 + a_{30}c_0)T_2, \\
 m_3 &= a_1c_2 + a_{20}c_1 + (a_{30} - \bar{H}k_2\beta)c_0 + (a_1c_3 + a_{20}c_2 + a_{30}c_1)T_2, \\
 m_4 &= a_1c_3 + a_{20}c_2 + (a_{30} - \bar{H}k_2\beta)c_1 + (a_{20}c_3 + a_{30}c_2)T_2, \\
 m_5 &= a_{20}c_3 + (a_{30} - \bar{H}k_2\beta)c_2 + a_{30}c_3T_2 - K\kappa_s\bar{H}k_2\beta\tau_2, \\
 m_6 &= (a_{30} - k_2\bar{H}\beta)c_3 - K\kappa_s\bar{H}k_2\beta; \\
 n_0 &= a'_4c_0T_2, \quad n_1 = a'_4c_0 + (a'_4c_1 + a'_5c_0)T_2, \\
 n_2 &= a'_4c_1 + a'_5c_0 + (a'_4c_2 + a'_5c_1)T_2, \quad n_3 = a'_4c_2 + a'_5c_1 + (a'_4c_3 + a'_5c_2)T_2, \\
 n_4 &= a'_4c_3 + a'_5c_2 + a'_5c_3T_2, \quad n_5 = a'_5c_3.
 \end{aligned}$$

Подобный вид имеют формулы для турбулентного течения. Если в уравнениях (13) и (14) положить равными нулю правые части, то получим уравнения свободных колебаний. Для ламинарного течения (для турбулентного течения выражения аналогичны) с учетом (12) запишем

$$[U_D(p) - i\omega V_D(p)]|u_r| = 0, [U_D(p) - i\omega V_D(p)]u_z = 0.$$

Общее решение таких однородных уравнений имеет вид

$$|u_r| = u_{racb}e^{\lambda t}, \quad u_z = u_{zacb}e^{\lambda t}. \quad (17)$$

Подставив (17) в уравнения (13), (14), получим характеристическое уравнение

$$D(\lambda) = U_D(\lambda) - i\omega V_D(\lambda) = 0,$$

которое можно представить в виде двух уравнений: $U_D(\lambda) = 0$, $V_D(\lambda) = 0$. Мнимые части корней этих уравнений представляют собой собственные частоты системы, вещественные части характеризуют изменение во времени амплитуд свободных колебаний. Колебания затухают, система устойчива, если вещественные части всех корней отрицательны. Здесь свободные колебания не рассматриваются, анализ динамики системы ограничивается ее вынужденными колебаниями.

Правые части (внешнее воздействие) уравнений (13), (14) изменяются по гармоническому закону с частотой вращения ротора ω , поэтому реакции рассматриваемой линейной системы также являются гармоническими функциями с такой же частотой:

$$u_z = u_{za}e^{i(\omega t + \gamma_z)}, \quad u_r = u_{ra}e^{i(\omega t + \gamma_r)}, \quad (18)$$

где u_{za} , u_{ra} — амплитуды реакции; γ_z , γ_r — сдвиг фаз реакций относительно фазы ωt внешнего воздействия. Для вынужденных гармоничес-

ких колебаний с частотой вращения ω оператор дифференцирования по времени $p = i\omega$. Выполнив такую замену, получим новые выражения вещественных и мнимых частей собственных операторов (12):

$$D(i\omega) = U(\omega) + i\omega V(\omega), \quad D_T(i\omega) = U_T(\omega) + i\omega V_T(\omega), \quad (19)$$

$$U(\omega) = -(m_0 - n_0)\omega^6 + (m_2 - n_2)\omega^4 - (m_4 - n_4)\omega^2 + m_6, \quad (20)$$

$$V(\omega) = (m_1 - n_1)\omega^4 - (m_3 - n_3)\omega^2 + m_5 - n_5;$$

$$U_T(\omega) = -(m_{0T} - n_{0T})\omega^6 + (m_{2T} - n_{2T})\omega^4 - (m_{4T} - n_{4T})\omega^2 + m_{6T}, \quad (21)$$

$$V_T(\omega) = (m_{1T} - n_{1T})\omega^4 - (m_{3T} - n_{3T})\omega^2 + m_{5T} - n_{5T}.$$

Используя (20), (21), с помощью модифицированного критерия Рауса–Гурвица для полиномов с комплексными коэффициентами, можно по знакам вещественных частей определить устойчивость колебательного процесса. Частоты вращения, при которых собственные операторы (19) обращаются в нуль, являются собственными частотами системы.

Амплитудные и фазовые частотные характеристики. Частотные передаточные функции равны отношениям реакций к гармоническим воздействиям. Для их построения в операторах воздействий (13), (14) выполним замену $p = i\omega$ и представим операторы (15) и (16) в виде комплексных чисел. В результате получим

$$\begin{aligned} M_{r\psi} &= k_1\beta(U_{r\psi} + i\omega V_{r\psi}), \quad M_{z\psi} = Kk_1(U_{z\psi} + i\omega V_{z\psi}), \\ M_{r\tau} &= -K\kappa_s\beta(U_{r\tau} + i\omega V_{r\tau}), \quad M_{z\tau} = -K(U_{z\tau} + i\omega V_{z\tau}), \\ M_{ra} &= \omega^2(U_{ra} + i\omega V_{ra}), \quad M_{za} = \bar{H}Kk_2\omega^2(U_{za} + i\omega V_{za}). \end{aligned} \quad (22)$$

Вещественные и мнимые части операторов воздействия на радиальные (с индексами rj) и осевые (с индексами zj , $j = \psi, \tau, a$) колебания ротора имеют вид

$$\begin{aligned} U_{r\psi} &= -c_0 \frac{\sigma}{k_1} T_2 \omega^4 - \left[c_1 - (c_1 + c_2 T_2) \frac{\sigma}{k_1} \right] \omega^2 - c_3 \frac{\sigma}{k_1} + 1, \\ V_{r\psi} &= - \left[c_0 - (c_0 + c_1 T_2) \frac{\sigma}{k_1} \right] \omega^2 + c_2 - (c_2 + c_3 T_2) \frac{\sigma}{k_1} + K\kappa_s \tau_2, \\ U_{r\tau} &= -T_2 \tau_2 \omega^2 + 1, \quad V_{r\tau} = T_2 + \tau_2, \\ U_{ra} &= c_0 T_2 \omega^4 - (c_1 + c_2 T_2) \omega^2 + c_3, \quad V_{ra} = -(c_0 + c_1 T_2) \omega^2 + c_2 + c_3 T_2, \\ U_{z\psi} &= - \left[a_1 - a'_4 + (a_{20} - a'_5) T_2 \right] \omega^2 + a_{30} - \frac{\sigma}{k_1} k_2 \bar{H} \beta, \end{aligned}$$

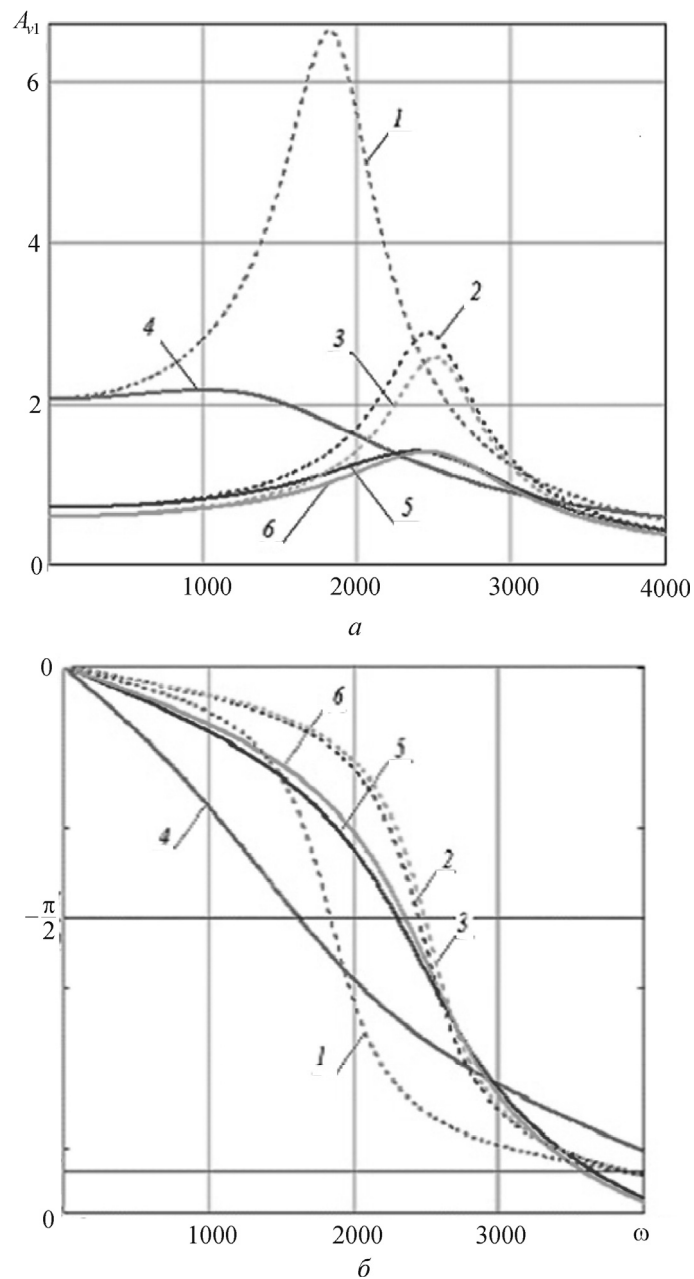


Рис. 3. Амплитудные (а) и фазовые (б) частотные характеристики по воздействию ψ_1 :
 1, 4 — $\psi_1 = 0,63$; 2, 5 — $\psi_1 = 1,0$; 3, 6 — $\psi_1 = 1,13$; кривые 1, 2, 3 получены без учета инерции жидкости, кривые 4, 5, 6 — с учетом инерции жидкости

$$\begin{aligned}
 V_{z\psi} &= T_2(-a_1 + a'_4)\omega^2 + T_2\left(a_{30} - \frac{\sigma}{k_1}k_2\bar{H}\beta\right) + a_{20} - a'_5, \\
 U_{z\tau} &= (a_1 - a'_4)T_2^2\omega^4 - \left[a_1 - a'_4 + 2(a_{20} - a'_5)T_2 + a_{30}T_2^2\right]\omega^2 + a_{30} - \bar{H}k_2\beta, \\
 V_{z\tau} &= -\left[2(a_1 - a'_4) + (a_{20} - a'_5)T_2\right]T_2\omega^2 + a_{20} + 2a_{30}T_2 - a'_5 - T_2\bar{H}k_2\beta, \\
 U_{za} &= 1, \quad V_{za} = T_2.
 \end{aligned}$$

Для турбулентных течений структура этих выражений остается неизменной, необходимо только добавить индекс «т» постоянным времени T_2 , τ_2 и коэффициентам $k_1, k_2, \kappa_s, \beta, a_{20}, a_{30}, c_0, \dots, c_3$.

Выразим радиальную реакцию $|u_{r1}|$ на гармоническое изменение давления нагнетания ψ_1 из первого уравнения (13), используя зависимости (18), (19) и (22):

$$(U + i\omega V) u_{ra\psi} e^{i(\omega t + \gamma_{r\psi})} = (U_{r\psi} + i\omega V_{r\psi}) k_1 \beta \psi_{1a} e^{i\omega t}.$$

Тогда соответствующая частотная передаточная функция примет вид

$$W_{r\psi}(i\omega) = \frac{u_{ra\psi}}{\psi_{1a}} e^{i\gamma_{r\psi}} = A_{r\psi}(\omega) e^{i\gamma_{r\psi}(\omega)} = k_1 \beta \frac{U_{r\psi} + i\omega V_{r\psi}}{U + i\omega V}, \quad (23)$$

где $A_{r\psi}(\omega), \gamma_{r\psi}(\omega)$ — амплитудная и фазовая частотные характеристики. Для их вычисления выделим вещественную и мнимую части дроби (22). Умножив числитель и знаменатель на сопряженное знаменателю комплексное число, получим

$$W_{r\psi} = k_1 \beta \left(\frac{UU_{r\psi} + \omega^2 VV_{r\psi}}{U^2 + \omega^2 V^2} + i\omega \frac{UV_{r\psi} - VU_{r\psi}}{U^2 + \omega^2 V^2} \right).$$

Амплитуда и фаза этого комплексного числа имеют вид

$$\begin{aligned}
 A_{r\psi}(\omega) &= \frac{u_{ra\psi}}{\psi_{1a}} = k_1 \beta \sqrt{\frac{U_{r\psi}^2 + \omega^2 V_{r\psi}^2}{U^2 + \omega^2 V^2}}, \\
 \gamma_{r\psi}(\omega) &= \text{arctg} \omega \frac{UV_{r\psi} - VU_{r\psi}}{UU_{r\psi} + \omega^2 VV_{r\psi}}.
 \end{aligned}$$

Примеры амплитудных и фазовых частотных характеристик приведены на рис. 3.

Аналогично вычисляются частотные характеристики от всех внешних воздействий — давления нагнетания, осевой силы и статической неуравновешенности ротора:

$$\begin{aligned}
 A_{r\tau}(\omega) &= \frac{u_{ra\tau}}{\tau_a} = K\kappa_s\beta\sqrt{\frac{U_{r\tau}^2 + \omega^2V_{r\tau}^2}{U^2 + \omega^2V^2}}, & \gamma_{r\tau}(\omega) &= \arctg\omega\frac{UV_{r\tau} - VU_{r\tau}}{UU_{r\tau} + \omega^2VV_{r\tau}}, \\
 A_{ra}(\omega) &= \frac{r_{aa}}{a} = \omega^2\sqrt{\frac{U_{ra}^2 + \omega^2V_{ra}^2}{U^2 + \omega^2V^2}}, & \gamma_{ra}(\omega) &= \arctg\omega\frac{UV_{ra} - VU_{ra}}{UU_{ra} + \omega^2VV_{ra}}, \\
 A_{z\psi}(\omega) &= \frac{u_{za\psi}}{\psi_{1a}} = Kk_1\sqrt{\frac{U_{z\psi}^2 + \omega^2V_{z\psi}^2}{U^2 + \omega^2V^2}}, & \gamma_{z\psi}(\omega) &= \arctg\omega\frac{UV_{z\psi} - VU_{z\psi}}{UU_{z\psi} + \omega^2VV_{z\psi}}, \\
 A_{z\tau}(\omega) &= \frac{r_{za\tau}}{\tau_a} = K\sqrt{\frac{U_{z\tau}^2 + \omega^2V_{z\tau}^2}{U^2 + \omega^2V^2}}, & \gamma_{z\tau}(\omega) &= -\arctg\omega\frac{UV_{z\tau} - VU_{z\tau}}{UU_{z\tau} + \omega^2VV_{z\tau}}, \\
 A_{za}(\omega) &= \frac{z_{aa}}{a} = \bar{H}Kk\omega^2\sqrt{\frac{U_{za}^2 + \omega^2V_{za}^2}{U^2 + \omega^2V^2}}, & \gamma_{za}(\omega) &= \arctg\omega\frac{UV_{za} - VU_{za}}{UU_{za} + \omega^2VV_{za}}.
 \end{aligned}$$

Поскольку, в качестве безразмерных смещений принято $u_{ra} = r_a/H_2$, $u_{za} = z_a/H_2$, для абсолютных значений амплитуд получим формулы

$$\begin{aligned}
 r_{a\psi} &= H_2\psi_{1a}A_{r\psi}, & r_{a\tau} &= H_2\tau_aA_{r\tau}, & r_{aa} &= aA_{ra}, \\
 z_{a\psi} &= H_2\psi_{1a}A_{z\psi}, & z_{a\tau} &= H_2\tau_aA_{z\tau}, & z_{aa} &= aA_{za}.
 \end{aligned}$$

Коэффициенты дифференциальных операторов, с помощью которых получают амплитудные и фазовые частотные характеристики, вычисляются для установившихся значений радиального e_0 и осевого z_0 смещений центра диска. Начальный эксцентриситет e_0 обусловлен в основном погрешностями изготовления и сборки, а осевое смещение определяется статической характеристикой, построенной в виде зависимости безразмерного торцового зазора u_{z0} от внешних воздействий τ, χ при заданных постоянных значениях безразмерного давления нагнетания ψ_1 .

Выводы

Системы автоматического уравнивания осевых сил, действующих на ротор многоступенчатого центробежного насоса, выполняют одновременно функции саморегулируемого бесконтактного концевого уплотне-

ния и радиально-упорного тяжело нагруженного гидростатического подшипника. Такие системы во многом определяют вибрационное состояние ротора.

Осевые и радиальные гидродинамические силы, возникающие в дросселирующих зазорах уравнивающего устройства взаимосвязаны. В результате система ротор—авторазгрузка под действием неизбежной радиальной статической неуравновешенности, пульсаций давления нагнетания и гармонических изменений осевой силы, действующей на ротор, совершает взаимосвязанные вынужденные радиально-осевые колебания. На частотах вращения, совпадающих с какой-либо собственной частотой, резонансные амплитуды этих колебаний могут превышать допустимые пределы, поэтому определение резонансных (критических) частот вращения и отстройка от них имеет важное практическое значение.

Предложенные выражения для динамического расчета, полученные с помощью простейшей модели ротора с системой уравнивания, позволяют оценить критические частоты вращения ротора и амплитуды его вынужденных колебаний.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марцинковский В.А., Шевченко С.С.* Насосы атомных электростанций: расчет, конструирование, эксплуатация. Под общ. ред. С.С. Шевченко. Сумы: ЧФ Изд-во «Университетская книга», 2018, 472 с.
2. *Марцинковский В.А.* Основы динамики роторов. Сумы: СумГУ, 2009, 307 с.
3. *Марцинковский В.А.* Щелевые уплотнения: теория и практика. Сумы: Изд-во Сумского госуниверситета, 2005, 416 с.
4. *Marcinkowski W., Korczak A., Peczkis G.* Dynamika zespołu wirującego pompy odśrodkowej wielostopniowej z tarczą odciążającą. *Zeszyty naukowe// Nauki techniczne*, 2009, № 13, s. 245—263.
5. *Korczak A.* Badania układów równoważących napór osiowy w wielostopniowych pompach odśrodkowych. – Gliwice: Wydawnictwo Politechniki Śląskiej// *Zeszyt Naukowy nr 1679, seria Energetyka nr 141*, 2005, s.161.
6. *Marcinkowski W.* Szczeliny tarczy odciążającej napór osiowy i ich wpływ na dynamikę zespołu wirującego pompy odśrodkowej wielostopniowej/ *W.Marcinkowski, A.Korczak// Proc.X Int. Conf. Seals and Sealing Technology in Machines and Dewices. Wroclaw*, 2004, p. 318—328
7. *Marcinkowski W., Kundera Cz.* Teoria konstrukcji uszczelnien bez stykowych. Kielce: Wyd-wo Politechniki Świętokrzyskiej, 2008, 443 s.
8. *Дроздович В.Н.* Газодинамические подшипники. Л.: Машиностроение, 1976, 208 с.

Получена 17.02.20

REFERENCES

1. Martsinkovskiy, V.A. and Shevchenko, S.S. (2018), *Nasosy atomnykh elektrostantsiy: raschet, konstruirovaniye, ekspluatatsiya* [Pumps of nuclear power plants: calculation, design, operation], Izd-vo «Universitetskaya kniga», Sumy, Ukraine.
2. Martsinkovsky, V.A. (2009), *Osnovy dinamiki rotorov* [Fundamentals of the dynamics of rotors], Sumy State University, Sumy, Ukraine.
3. Martsinkovsky, V.A. (2005), *Shchelevyye uplotneniya: teoriya i praktika* [Groove seals: theory and practice], Sumy State University, Sumy, Ukraine.
4. Marcinkowski, W., Korczak, A. and Peczkis, G. (2009), *Dynamika zespołu wirującego pompy odśrodkowej wielostopniowej z tarczą odciążającą*. Zeszyty naukowe, Nauki techniczne, pp. 245-263.
5. Korczak, A. (2005), *Badania układów równoważących napór osiowy w wielostopniowych pompach odśrodkowych*. Gliwice: Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Zeszyt Naukowy nr 1679, seria Energetyka nr 141.
6. Marcinkowski, W. (2004), “Szczeliny tarczy odciążającej napór osiowy i ich wpływ na dynamikę zespołu wirującego pompy odśrodkowej wielostopniowej/ W. Marcinkowski, A.Korczak”, *Proceeding of the X International Conference, Seals and Sealing Technology in Machines and Devices*, Wroclaw, Poland, pp. 318-328.
7. Marcinkowski, W. and Kundera, Cz. (2008), *Teoria konstrukcji uszczelnien bezstykowych*.-Kielce, Wyd-wo Politechniki Świętokrzyskiej.
8. Drozdovich, V.N. (1976), *Gazodinamicheskiye podshipniki* [Gas-dynamic bearings], Mashinostroyeniye, Leningrad, USSR.

Received 17.02.20

С.С. Шевченко, О.С. Шевченко

ВИЗНАЧЕННЯ ВЛАСНИХ ЧАСТОТ РОТОРА
ВІДЦЕНТРОВОЇ МАШИНИ З СИСТЕМОЮ
АВТОМАТИЧНОГО ВРІВНОВАЖЕННЯ ОСЬОВИХ СИЛ

Запропоновано модель врівноважуючого пристрою ротора багатоступеневої відцентрової машини, яка виконує функції гідравлічного затвора і радіально-осьового підшипника. Проведено аналіз динаміки системи. Отримано лінеаризовані рівняння спільних радіально-осьових коливань ротора відцентрового насоса з системою автоматичного знеобтяження. Отримано формули для побудови амплітудних і фазових частотних характеристик.

К л ю ч о в і с л о в а: гідравлічний затвор, гідроп'ята, спільні радіально-осьові коливання, частотні характеристики.

S.S. Shevchenko, O.S. Shevchenko

DETERMINATION OF THE NATURAL FREQUENCIES
OF THE CENTRIFUGAL MACHINE ROTOR WITH A SYSTEM
OF AUTOMATIC BALANCING OF AXIAL FORCES

The model of balancing device thrust of multistage centrifugal machine rotor that performs both functions of hydraulic seal and a radial-thrust hydrostatic bearing was considered. The linearized equations of the centrifugal pump rotor joint radial-axial vibrations with an auto re-

lieving system are obtained. Expressions for defining amplitude and phase frequency characteristics are derived.

К e y w o r d s: hydraulic seal, axial force balancer, joint radial-axial vibrations, frequency characteristics.

ШЕВЧЕНКО Сергей Станиславович, канд. техн. наук, техн. директор ООО «Юнайтед Продакшнс-Атом». В 1984 г. окончил Сумский филиал Харьковского политехнического института. Область научных исследований — проблемы гермомеханики с использованием достижений трибомеханики, теории упругости, теории колебаний гидрогазодинамики, теории оптимизации гидродинамических систем.

ШЕВЧЕНКО Александр Сергеевич, аспирант Сумского госуниверситета. В 2008 г. окончил the University of Warwick, Великобритания. Область научных исследований — технологии защиты окружающей среды, герметизация и ее влияние на защиту окружающей среды.