

doi: <https://doi.org/10.15407/emodel.42.03.071>
УДК 519.213:621.391

А.И. Красильников, канд. физ.-мат. наук
Институт технической теплофизики НАН Украины
(Украина, 03057, Киев, ул. М. Капнист, 2а,
тел. (044) 4532857, e-mail: tangorov @ ukr. net)

Анализ кумулянтных коэффициентов двухкомпонентных смесей сдвинутых гауссовых распределений с равными дисперсиями

Проанализирована зависимость кумулянтных коэффициентов смесей, плотность вероятностей которых может быть как одновершинной, так и двухвершинной, от параметра сдвига и весовых коэффициентов. Определены области возможных значений кумулянтных коэффициентов и получены значения весовых коэффициентов, при которых кумулянтные коэффициенты равны нулю. Показано, что коэффициент эксцесса равен нулю при двух значениях весовых коэффициентов и любых значениях параметра сдвига.

К л ю ч е в ы е с л о в а: двухкомпонентные смеси распределений, двухкомпонентная гауссова смесь, кумулянтный анализ, кумулянтные коэффициенты, коэффициент эксцесса.

Применение негауссовых моделей исследуемых физических величин и процессов позволило достигнуть значительного прогресса при решении различных научно-технических задач. К числу таких моделей относятся конечные смеси распределений [1—4], частным случаем которых являются n -компонентные смеси сдвинутых и масштабированных гауссовых распределений [3—6]. Плотность вероятностей таких распределений описывается выражением

$$p(x) = \sum_{k=1}^n \frac{p_k}{\sigma_k} \varphi\left(\frac{x - m_k}{\sigma_k}\right), \quad (1)$$

где p_k — весовые коэффициенты, $0 < p_k < 1$, $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$; $m_k \in (-\infty, \infty)$ — параметры сдвига; $\sigma_k > 0$ — параметры масштаба; $\varphi(x)$ — плотность вероятностей стандартного гауссова распределения,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

© Красильников А.И., 2020

Модели смесей гауссовых распределений широко используются в различных технических приложениях: в статистической радиотехнике [7], акустике [8], теории и практике измерений [9, 10], статистической физике [4, 11], авиации [12], экономике [4] и др. Анализ работ [3–12] показал, что актуальной остается задача исследования кумулянтных коэффициентов моделей смесей гауссовых распределений. Некоторые результаты решения этой задачи для двухкомпонентной смеси (1) представлены в работах [13–17].

В работе [13] исследован коэффициент эксцесса двухкомпонентной смеси с одинаковыми математическими ожиданиями и различными дисперсиями, в работе [14] — ее кумулянтный коэффициент шестого порядка. В работе [15] численными методами определены области возможных значений коэффициентов асимметрии и эксцесса двухкомпонентной смеси, в работе [16] коэффициенты асимметрии и эксцесса исследованы методами компьютерного моделирования. В работе [17] разработан алгоритм моделирования двухкомпонентной смеси с заданным коэффициентом эксцесса.

Проанализируем кумулянтные коэффициенты двухкомпонентных смесей гауссовых распределений с равными дисперсиями.

Кумулянтные коэффициенты двухкомпонентных смесей сдвинутых гауссовых распределений. Рассмотрим двухкомпонентную смесь сдвинутых гауссовых распределений

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_0} \left[q\varphi\left(\frac{x-m_1}{\sigma_0}\right) + p\varphi\left(\frac{x-m_2}{\sigma_0}\right) \right], \quad (2)$$

где $m_1 < m_2$; $0 < q < 1$; $0 < p < 1$; $q + p = 1$. Найдем характеристическую функцию смеси (2):

$$\begin{aligned} f(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} p(x) dx = \frac{1}{\sigma_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \left[q\varphi\left(\frac{x-m_1}{\sigma_0}\right) + p\varphi\left(\frac{x-m_2}{\sigma_0}\right) \right] dx = \\ &= qe^{ium_1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma_0uz} \varphi(z) dz + pe^{ium_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma_0uz} \varphi(z) dz. \end{aligned}$$

Отсюда получаем характеристическую функцию смеси (2)

$$f(u) = f_0(\sigma_0 u) f_1(u), \quad (3)$$

где $f_0(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \varphi(x) dx$ — характеристическая функция стандартного

гауссова распределения; $f_1(u) = qe^{ium_1} + pe^{ium_2}$ — характеристическая

функция двухточечного распределения, функция распределения которого имеет вид

$$F_1(x; m_1, m_2) = qE(x - m_1) + pE(x - m_2). \quad (4)$$

На основании формулы (3) можно утверждать, что смесь (2) является плотностью вероятностей случайной величины

$$\xi = \xi_0 + \xi_1, \quad (5)$$

где ξ_0, ξ_1 — независимые случайные величины; ξ_0 — гауссова случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $D\xi_0 = \sigma_0^2$; ξ_1 — дискретная случайная величина с функцией распределения (4).

На основании формул (3) и (5) делаем следующий вывод о кумулянтах κ_s смеси (2):

$$\kappa_s = \kappa_{s,0} + \kappa_{s,1}, \quad (6)$$

где $\kappa_{s,0}, \kappa_{s,1}$ — кумулянты случайных величин ξ_0, ξ_1 ; $s = 1, 2, \dots$ — порядок кумулянтов.

Кумулянты гауссовой случайной величины ξ_0 имеют вид $\kappa_{1,0} = 0$, $\kappa_{2,0} = D\xi_0 = \sigma_0^2$ и все $\kappa_{s,0} = 0$, если $s \geq 3$. Поэтому из формулы (6) следует, что у смеси (2) кумулянты $\kappa_1 = \kappa_{1,1}$, $\kappa_2 = \sigma_0^2 + \kappa_{2,1}$, $\kappa_s = \kappa_{s,1}$, если $s \geq 3$, и кумулянтные коэффициенты γ_s имеют вид

$$\gamma_s = \frac{\kappa_s}{\kappa_2^{s/2}} = \frac{\kappa_{s,1}}{(\sigma_0^2 + \kappa_{2,1})^{s/2}}. \quad (7)$$

Для анализа кумулянтных коэффициентов (7) смеси сдвинутых гауссовых распределений (2) необходимо знать кумулянты $\kappa_{s,1}$ случайной величины ξ_1 , для получения которых воспользуемся результатами работы [18]. Обозначим $m_2 - m_1 = 2a$ и, не нарушая общности, зададим $m_1 = -a$. Тогда $m_2 = a$ и формулы (2), (4) принимают вид

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_0} \left[q\varphi\left(\frac{x+a}{\sigma_0}\right) + p\varphi\left(\frac{x-a}{\sigma_0}\right) \right], \quad (8)$$

$$F_1(x; a) = qE(x+a) + pE(x-a). \quad (9)$$

В работе [18] получены кумулянты $\kappa_{s,1} = \kappa_{s,1}(p, a)$ двухточечного распределения (9) для $s = \overline{1, 8}$:

$$\begin{aligned}
 \kappa_{1,1}(p, a) &= a(p - q); \quad \kappa_{2,1}(p, a) = 4a^2 pq; \\
 \kappa_{3,1}(p, a) &= 8a^3 pq(q - p); \\
 \kappa_{4,1}(p, a) &= 16a^4 pq(1 - 6pq); \quad \kappa_{5,1}(p, a) = 32a^5 pq(q - p)(1 - 12pq); \\
 \kappa_{6,1}(p, a) &= 64a^6 pq(1 - 30pq + 120p^2 q^2); \\
 \kappa_{7,1}(p, a) &= 128a^7 pq(q - p)(1 - 60pq + 360p^2 q^2); \\
 \kappa_{8,1}(p, a) &= 256a^8 pq(1 - 126pq + 1680p^2 q^2 - 5040p^3 q^3).
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

С учетом (10) перепишем выражение (7) в виде

$$\gamma_s(p, \tilde{a}) = \frac{\tilde{a}^s \kappa_{s,1}(p, 1)}{(1 + \tilde{a}^2 \kappa_{2,1}(p, 1))^{s/2}}, \tag{11}$$

где $\tilde{a} = a/\sigma_0$ — нормированный параметр сдвига; $\kappa_{s,1}(p, 1)$ — значение кумулянта $\kappa_{s,1}(p, a)$ при $a = 1$. Используя формулу (11), проанализируем зависимость кумулянтных коэффициентов $\gamma_s(p, \tilde{a})$ смеси (8) для $s = 3, 4, \dots$ от параметра сдвига \tilde{a} и весового коэффициента p .

Анализ зависимости коэффициентов $\gamma_s(p, \tilde{a})$ от параметра сдвига \tilde{a} . Заметим, прежде всего, что значения параметра сдвига \tilde{a} определяют одно из важнейших свойств смеси (8) — ее одновершинность. В работе [5] доказано, что смесь (2) является одновершинной при выполнении условия $(m_2 - m_1) \leq 2\sigma_2$ и двухвершинной, если это условие не выполняется. Отсюда следует, что смесь (8) является одновершинной при выполнении условия

$$\tilde{a} = \frac{a}{\sigma_0} = \frac{0,5(m_2 - m_1)}{\sigma_0} \leq 1.$$

Проанализируем зависимость кумулянтных коэффициентов (11) от параметра \tilde{a} . Пусть $0 < p < 1$. Тогда

$$\lim_{\tilde{a} \rightarrow 0} \gamma_s(p, \tilde{a}) = 0, \quad \lim_{\tilde{a} \rightarrow \infty} \gamma_s(p, \tilde{a}) = \frac{\kappa_{s,1}(p, 1)}{\kappa_{2,1}^{s/2}(p, 1)} = \gamma_{s,1}(p). \tag{12}$$

Следовательно, коэффициент $\gamma_s(p, \tilde{a})$ является монотонной функцией параметра \tilde{a} , которая при $\gamma_{s,1}(p) < 0$ убывает от значения $\gamma_s(p, \tilde{a}) = 0$ до $\gamma_{s,1}(p)$, а при $\gamma_{s,1}(p) > 0$ возрастает от значения $\gamma_s(p, \tilde{a}) = 0$ до $\gamma_{s,1}(p)$.

Рассмотрим случай, когда $0 < \tilde{a} \leq 1$, т.е. распределение (8) является одновершинным. При $\tilde{a} = 1$ из формулы (11) получаем

$$\gamma_s(p, 1) = \frac{\kappa_{s,1}(p, 1)}{(1 + \kappa_{2,1}(p, 1))^{s/2}} = \frac{\kappa_{2,1}^{s/2}(p, 1) \gamma_{s,1}(p)}{(1 + \kappa_{2,1}(p, 1))^{s/2}}. \quad (13)$$

Из формул (12), (13) следует, что для одновершинных распределений при $\gamma_{s,1}(p) \neq 0$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \gamma_{s,1}(p) < \gamma_s(p, 1) \leq \gamma_s(p, \tilde{a}) < 0, \quad \gamma_{s,1}(p) < 0, \\ 0 < \gamma_s(p, \tilde{a}) \leq \gamma_s(p, 1) < \gamma_{s,1}(p), \quad \gamma_{s,1}(p) > 0. \end{aligned}$$

Пусть $p = q = 0,5$. В этом случае распределение (8) — симметричное, у которого $\kappa_{2,1}(0,5; 1) = 1$ и все кумулянты $\kappa_{s,1}(0,5; 1)$ нечетных порядков s равны нулю, поэтому

$$\gamma_s(0,5; \tilde{a}) = \begin{cases} 0, & s - \text{нечетное,} \\ \frac{\tilde{a}^s \gamma_{s,1}(0,5)}{(1 + \tilde{a}^2)^{s/2}}, & s - \text{четное.} \end{cases} \quad (14)$$

В частности, используя формулы (10), находим кумулянтные коэффициенты $\gamma_{4,1}(0,5) = -2$, $\gamma_{6,1}(0,5) = 16$, $\gamma_{8,1}(0,5) = -272$. Подставляя их в (14), получаем

$$\begin{aligned} \gamma_4(0,5; \tilde{a}) &= -\frac{2\tilde{a}^4}{(1 + \tilde{a}^2)^2}, \quad \gamma_6(0,5; \tilde{a}) = \frac{16\tilde{a}^6}{(1 + \tilde{a}^2)^3}, \\ \gamma_8(0,5; \tilde{a}) &= -\frac{272\tilde{a}^8}{(1 + \tilde{a}^2)^4}. \end{aligned} \quad (15)$$

Из (15) находим области возможных значений кумулянтных коэффициентов при $p = q = 0,5$: $\gamma_4(0,5; \tilde{a}) \in (-2; 0)$, $\gamma_6(0,5; \tilde{a}) \in (0; 16)$, $\gamma_8(0,5; \tilde{a}) \in (-272; 0)$.

Рассмотрим случай, когда $0 < \tilde{a} \leq 1$, т.е. распределение (8) является одновершинным. При $\tilde{a} = 1$ формула (14) принимает вид

$$\gamma_s(0,5; 1) = \begin{cases} 0, & s - \text{нечетное,} \\ \frac{\gamma_{s,1}(0,5)}{2^{s/2}}, & s - \text{четное.} \end{cases}$$

В частности, $\gamma_4(0,5; 1) = -0,5$, $\gamma_6(0,5; 1) = 2$, $\gamma_8(0,5; 1) = -17$. Из этого следует, что для одновершинных распределений при $p = q = 0,5$ области

значений кумулянтных коэффициентов сужаются и принимают вид

$$\gamma_4(0, 5; \tilde{a}) \in [-0, 5; 0), \gamma_6(0, 5; \tilde{a}) \in (0; 2], \gamma_8(0, 5; \tilde{a}) \in [-17; 0).$$

Анализ зависимости коэффициентов $\gamma_s(p, \tilde{a})$ от весового коэффициента p . Поскольку $\tilde{a} > 0$, из (11) следует, что коэффициент $\gamma_s(p, \tilde{a})$ — отрицательный, если $\kappa_{s,1}(p, 1) < 0$, положительный, если $\kappa_{s,1}(p, 1) > 0$, и равен нулю, если $\kappa_{s,1}(p, 1) = 0$. Уравнение $\kappa_{s,1}(p, 1) = 0$ имеет s корней, которые обозначим $p_{s,k}$, где k — номер корня. При определенных значениях p коэффициент $\gamma_s(p, \tilde{a})$ имеет экстремумы. Значения p , при которых коэффициент $\gamma_s(p, \tilde{a})$ имеет k -й максимум (минимум), обозначим $p_{s,\max k}$ ($p_{s,\min k}$).

Исследуем свойства кумулянтных коэффициентов $\gamma_s(p, \tilde{a})$, $s = \overline{3, 6}$.

Коэффициент асимметрии $\gamma_3(p, \tilde{a})$. На основании (10) и (11) получаем формулу

$$\gamma_3(p, \tilde{a}) = \frac{\tilde{a}^3 \kappa_{3,1}(p, 1)}{(1 + \tilde{a}^2 \kappa_{2,1}(p, 1))^{3/2}} = \frac{8\tilde{a}^3 pq(q-p)}{(1 + 4\tilde{a}^2 pq)^{3/2}}. \quad (16)$$

Решая уравнение $\kappa_{3,1}(p, 1) = 8pq(q-p) = 8p(1-p)(1-2p) = 0$, находим значения $p_{s,k}$, при которых $\gamma_3(p, \tilde{a}) = 0$: $p_{3,1} = 0$, $p_{3,2} = 0,5$, $p_{3,3} = 1$. С учетом полученного результата из формулы (16) следует, что при $p \in (0; 0,5)$ коэффициент асимметрии $\gamma_3(p, \tilde{a}) > 0$ и имеет максимум, а при $p \in (0,5; 1)$ коэффициент $\gamma_3(p, \tilde{a}) < 0$ и имеет минимум.

Найдем точки экстремумов коэффициента $\gamma_3(p, \tilde{a})$. Подставляя $q = 1 - p$ в формулу (16), преобразуем ее к виду

$$\gamma_3(p, \tilde{a}) = \frac{8\tilde{a}^3 (p - 3p^2 + 2p^3)}{(1 + 4\tilde{a}^2 (p - p^2))^{3/2}}$$

и найдем производную:

$$\gamma'_3(p, \tilde{a}) = \frac{d\gamma_3(p, \tilde{a})}{dp} = 8\tilde{a}^3 \frac{2p^2(3 + \tilde{a}^2) - 2p(3 + \tilde{a}^2) + 1}{(1 + 4\tilde{a}^2(p - p^2))^{5/2}}. \quad (17)$$

Из (17) получаем уравнение $2p^2(3 + \tilde{a}^2) - 2p(3 + \tilde{a}^2) + 1 = 0$, откуда находим значения $p_{3,\max}$ и $p_{3,\min}$, при которых коэффициент $\gamma_3(p, \tilde{a})$

имеет максимум и минимум:

$$p_{3,\max} = 0,5 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2}{3 + \tilde{a}^2}} \right), \quad p_{3,\min} = 0,5 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2}{3 + \tilde{a}^2}} \right).$$

Подставляя значения $p_{3,\max}$ и $p_{3,\min}$ в (16), находим максимум и минимум значения $\gamma_3(p, \tilde{a})$:

$$\begin{aligned} \max \gamma_3(\tilde{a}) &= \gamma_3(p_{3,\max}, \tilde{a}) = \frac{4\tilde{a}^3}{3^{3/2}(1 + \tilde{a}^2)}, \quad 0 < p < 0,5, \\ \min \gamma_3(\tilde{a}) &= \gamma_3(p_{3,\min}, \tilde{a}) = -\frac{4\tilde{a}^3}{3^{3/2}(1 + \tilde{a}^2)}, \quad 0,5 < p < 1. \end{aligned} \quad (18)$$

Из (18) видно, что функция $\max \gamma_3(\tilde{a})$ — положительная монотонно возрастающая, $\lim_{\tilde{a} \rightarrow 0} \max \gamma_3(\tilde{a}) = 0$, $\lim_{\tilde{a} \rightarrow \infty} \max \gamma_3(\tilde{a}) = \infty$, а функция $\min \gamma_3(\tilde{a})$ — отрицательная монотонно убывающая, $\lim_{\tilde{a} \rightarrow 0} \min \gamma_3(\tilde{a}) = 0$, $\lim_{\tilde{a} \rightarrow \infty} \min \gamma_3(\tilde{a}) = -\infty$.

Рассмотрим случай, когда $0 < \tilde{a} \leq 1$, т.е. распределение (8) является одновершинным. При $\tilde{a} = 1$ находим $p_{3,\max} = 0,5(1 - \sqrt{0,5}) \approx 0,14645$, $p_{3,\min} = 0,5(1 + \sqrt{0,5}) \approx 0,85355$, $\max \gamma_3(1) = 2/3^{3/2} \approx 0,3849$, $\min \gamma_3(1) = -2/3^{3/2} \approx -0,3849$. Таким образом, у одновершинных распределений $0 < \gamma_3(p, \tilde{a}) \leq 0,3849$ при $0 < p < 0,5$ и $-0,3849 \leq \gamma_3(p, \tilde{a}) < 0$ при $0,5 < p < 1$.

На рис. 1, а, представлены графики коэффициента $\gamma_3(p, \tilde{a})$ при $\tilde{a} = 1$ (сплошная линия) и при $\tilde{a} = 1,8$ (штриховая линия), а на рис. 1, б, — графики плотности вероятностей смеси (8) при $\sigma_0 = 1$, $p = p_{3,2} = 0,5$ ($\gamma_3(p, \tilde{a}) = 0$), $\tilde{a} = 1$ (сплошная линия) и при $\tilde{a} = 1,8$ (штриховая линия).

Коэффициент эксцесса $\gamma_4(p, \tilde{a})$. На основании (10) и (11) получаем формулу

$$\gamma_4(p, \tilde{a}) = \frac{\tilde{a}^4 \kappa_{4,1}(p, 1)}{(1 + \tilde{a}^2 \kappa_{2,1}(p, 1))^2} = \frac{16\tilde{a}^4 pq(1 - 6pq)}{(1 + 4\tilde{a}^2 pq)^2}. \quad (19)$$

Проанализируем зависимость коэффициента $\gamma_4(p, \tilde{a})$ от параметра \tilde{a} . Из формулы (19) следует

$$\lim_{\tilde{a} \rightarrow 0} \gamma_4(p, \tilde{a}) = 0; \quad \lim_{\tilde{a} \rightarrow \infty} \gamma_4(p, \tilde{a}) = \frac{1 - 6pq}{pq} = \gamma_{4,1}(p).$$

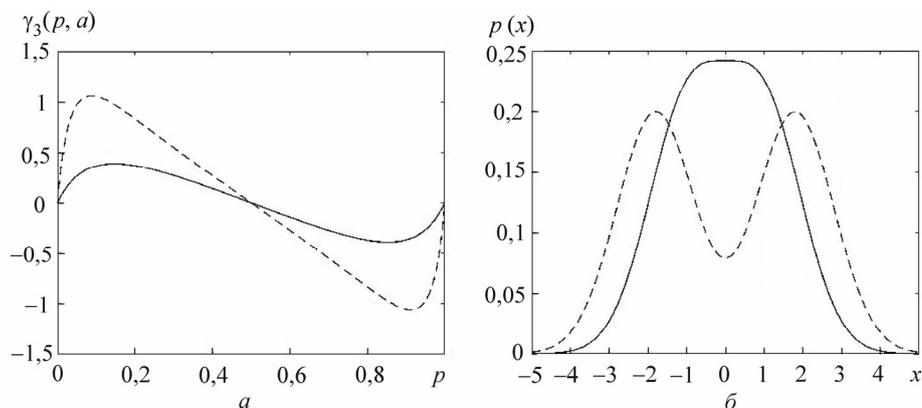


Рис. 1

Поскольку $-2 \leq \gamma_{4,1}(p) < \infty$, при возрастании параметра \tilde{a} коэффициент $\gamma_4(p, \tilde{a})$ при $-2 \leq \gamma_{4,1}(p) < 0$ монотонно убывает от значения $\gamma_4(p, \tilde{a}) = 0$ до $\gamma_{4,1}(p)$, а при $\gamma_{4,1}(p) > 0$ монотонно возрастает от значения $\gamma_4(p, \tilde{a}) = 0$ до $\gamma_{4,1}(p)$.

Проанализируем зависимость коэффициента эксцесса $\gamma_4(p; \tilde{a})$ от коэффициента p , учитывая, что $\tilde{a} > 0$. Решая уравнение

$$\kappa_4(p, 1) = 16pq(1 - 6pq) = 16p(1 - p)(1 - 6p + 6p^2) = 0,$$

находим значения $p_{4,k}$, при которых $\gamma_4(p, \tilde{a}) = 0$, а именно: $p_{4,1} = 0$, $p_{4,2} = 0,5 - 1/\sqrt{12} \approx 0,21133$; $p_{4,3} = 0,5 + 1/\sqrt{12} \approx 0,78868$; $p_{4,4} = 1$. Таким образом, если $p = p_{4,2} = 0,21133$ или $p = p_{4,3} = 0,78868$, то при любых значениях параметра сдвига \tilde{a} коэффициент эксцесса $\gamma_4(p, \tilde{a})$ равен нулю. Из формулы (19) следует, что при $0 < p < 0,21133$ или $0,78868 < p < 1$ получим $pq < 1/6$, поэтому коэффициент $\gamma_4(p, \tilde{a})$ больше нуля и имеет на этих участках максимумы. При $0,21133 < p < 0,78868$ получим $pq > 1/6$, поэтому коэффициент эксцесса $\gamma_4(p, \tilde{a})$ меньше нуля и имеет на этом участке минимум.

Найдем точки экстремумов коэффициента $\gamma_4(p, \tilde{a})$. Подставляя $q = 1 - p$ в формулу (19), преобразуем ее к виду

$$\gamma_4(p, \tilde{a}) = \frac{16\tilde{a}^4(p - 7p^2 + 12p^3 - 6p^4)}{(1 + 4\tilde{a}^2(p - p^2))^2}$$

и найдем производную:

$$\begin{aligned} \gamma'_4(p, \tilde{a}) &= \frac{d\gamma_4(p, \tilde{a})}{dp} = \\ &= 16\tilde{a}^4 \frac{1 - p(14 + 4\tilde{a}^2) + p^2(36 + 12\tilde{a}^2) - p^3(24 + 8\tilde{a}^2)}{(1 + 4\tilde{a}^2(p - p^2))^3}. \end{aligned} \quad (20)$$

Из формулы (20) получаем кубическое уравнение

$$(24 + 8\tilde{a}^2) p^3 - (36 + 12\tilde{a}^2) p^2 + (14 + 4\tilde{a}^2) p - 1 = 0, \quad (21)$$

решением которого являются три корня. Один из корней находим, рассматривая неравенство

$$\gamma_4(p, \tilde{a}) = \frac{16\tilde{a}^4 pq(1 - 6pq)}{(1 + 4\tilde{a}^2 pq)^2} \geq \gamma_4(0, 5; \tilde{a}) = -\frac{2\tilde{a}^4}{(1 + \tilde{a}^2)^2},$$

из которого следует, что при $p = p_{4, \min} = 0,5$ коэффициент $\gamma_4(p, \tilde{a})$ имеет минимум

$$\min \gamma_4(\tilde{a}) = \gamma_4(0, 5; \tilde{a}) = -\frac{2\tilde{a}^4}{(1 + \tilde{a}^2)^2}. \quad (22)$$

Из (22) видно, что функция $\min \gamma_4(\tilde{a})$ — отрицательная монотонно убывающая, $\lim_{\tilde{a} \rightarrow 0} \min \gamma_4(\tilde{a}) = 0$, $\lim_{\tilde{a} \rightarrow \infty} \min \gamma_4(\tilde{a}) = -2$.

Находим оставшиеся два корня. Разделив левую и правую части уравнения (21) на $(p - p_{4, \min}) = (p - 0,5)$, $p \neq 0,5$, получаем квадратное уравнение

$$4(3 + \tilde{a}^2) p^2 - 4(3 + \tilde{a}^2) p + 1 = 0. \quad (23)$$

Решая уравнение (23), находим значения $p_{4, \max 1}$ и $p_{4, \max 2}$, при которых коэффициент $\gamma_4(p, \tilde{a})$ имеет максимум:

$$p_{4, \max 1} = 0,5 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{3 + \tilde{a}^2}} \right), \quad p_{4, \max 2} = 0,5 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{3 + \tilde{a}^2}} \right).$$

Подставляя эти значения в (19), находим максимум коэффициента $\gamma_4(p, \tilde{a})$:

$$\begin{aligned} \max \gamma_4(\tilde{a}) &= \gamma_4(p_{4, \max 1}, \tilde{a}) = \gamma_4(p_{4, \max 2}, \tilde{a}) = \frac{\tilde{a}^4}{1,5 + \tilde{a}^2}, \\ p &\in (0; p_{4,2}) \cup (p_{4,3}; 1). \end{aligned} \quad (24)$$

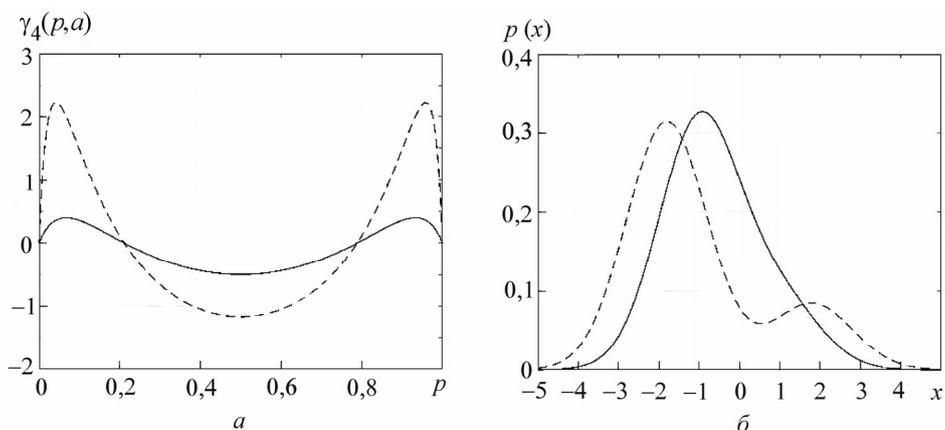


Рис. 2

Из (24) видно, что функция $\max \gamma_4(\tilde{a})$ — положительная монотонно возрастающая, $\lim_{\tilde{a} \rightarrow 0} \max \gamma_4(\tilde{a}) = 0$, $\lim_{\tilde{a} \rightarrow \infty} \max \gamma_4(\tilde{a}) = \infty$.

Рассмотрим случай, когда $0 < \tilde{a} \leq 1$, т.е. распределение (8) является од-новершинным. При $\tilde{a} = 1$ находим $\min \gamma_4(1) = \gamma_4(0, 5; 1) = -0,5$, $p_{4, \max 1} = 0,5(1 - \sqrt{0,75}) \approx 0,06699$, $p_{4, \max 2} = 0,5(1 + \sqrt{0,75}) \approx 0,93301$, $\max \gamma_4(1) = 0,4$. Таким образом, для од-новершинных распределений коэффициент $\gamma_4(p; \tilde{a})$ имеет область возможных значений $-0,5 \leq \gamma_4(p, \tilde{a}) < 0,4$.

На рис. 2, а, представлены графики коэффициента $\gamma_4(p, \tilde{a})$ при $\tilde{a} = 1$ (сплошная линия) и при $\tilde{a} = 1,8$ (штриховая линия), а на рис. 2, б, — гра-фики плотности вероятностей смеси (8) при $\sigma_0 = 1$, $p = p_{4,2} = 0,21133$ ($\gamma_4(p, \tilde{a}) = 0$), $\tilde{a} = 1$ (сплошная линия) и при $\tilde{a} = 1,8$ (штриховая линия).

Коэффициент $\gamma_5(p, \tilde{a})$. На основании (10) и (11) получаем формулу

$$\gamma_5(p, \tilde{a}) = \frac{\tilde{a}^5 \kappa_{5,1}(p, 1)}{(1 + \tilde{a}^2 \kappa_{2,1}(p, 1))^{5/2}} = \frac{32\tilde{a}^5 pq(q-p)(1-12pq)}{(1 + 4\tilde{a}^2 pq)^{5/2}}. \quad (25)$$

Найдем значение коэффициента p , при котором $\gamma_5(p; \tilde{a}) = 0$. Решая уравнение

$$\begin{aligned} \kappa_5(p, 1) &= 32pq(q-p)(1-12pq) = \\ &= 32p(1-p)(1-2p)(1-12p+12p^2) = 0, \end{aligned}$$

находим значения $p_{5,k}$, при которых $\gamma_5(p, \tilde{a}) = 0$: $p_{5,1} = 0$, $p_{5,2} = 0,5 - 1/\sqrt{6} \approx 0,09175$, $p_{5,3} = 0,5$, $p_{5,4} = 0,5 + 1/\sqrt{6} \approx 0,90825$, $p_{5,5} = 1$.

Анализируя формулу (25) с учетом полученных результатов, видим, что при $0 < p < 0,09175$ и $0,5 < p < 0,90825$ коэффициент $\gamma_5(p; \tilde{a})$ больше нуля и имеет на этих участках максимумы. На участках $0,09175 < p < 0,5$ и $0,90825 < p < 1$ коэффициент $\gamma_5(p; \tilde{a})$ меньше нуля и имеет на этих участках минимумы.

Исследовать аналитически экстремумы коэффициента $\gamma_5(p; \tilde{a})$ не представляется возможным, поэтому преобразуем формулу (25) к виду

$$\gamma_5(p, \tilde{a}) = \frac{32\tilde{a}^5(p - 15p^2 + 50p^3 - 60p^4 + 24p^5)}{(1 + 4\tilde{a}^2(p - p^2))^{5/2}}.$$

Численными методами найдем значения $p_{5, \max k}$, $p_{5, \min k}$ и соответствующие значения $\max_k \gamma_5 = \gamma_5(p_{5, \max k}; \tilde{a})$, $\min_k \gamma_5 = \gamma_5(p_{5, \min k}; \tilde{a})$ для одновёршинного распределения при $\tilde{a} = 0,5$, $\tilde{a} = 1$ и двухвёршинного распределения при $\tilde{a} = 1,5$, $\tilde{a} = 2$ (табл. 1).

Анализируя данные табл. 1, можно сделать следующие выводы. При всех значениях \tilde{a} для точек экстремумов справедливы соотношения $p_{5, \max 1} + p_{5, \min 2} = 1$, $p_{5, \min 1} + p_{5, \max 2} = 1$, а для значений коэффициента $\gamma_5(p; \tilde{a})$ в точках экстремумов — соотношения $\min_2 \gamma_5 = -\max_1 \gamma_5$, $\max_2 \gamma_5 = -\min_1 \gamma_5$. При увеличении параметра \tilde{a} значения $p_{5, \max 1}$, $p_{5, \min 1}$ уменьшаются, значения $p_{5, \max 2}$, $p_{5, \min 2}$ увеличиваются, абсолютные значения коэффициента $\gamma_5(p; \tilde{a})$ в точках экстремумов возрастают. Для одновёршинных распределений ($0 < \tilde{a} \leq 1$) коэффициент $\gamma_5(p; \tilde{a})$ имеет область возможных значений $-0,9285 \leq \gamma_5(p; \tilde{a}) \leq 0,9285$.

На рис. 3, а, представлены графики коэффициента $\gamma_5(p, \tilde{a})$ при $\tilde{a} = 1$ (сплошная линия), $\tilde{a} = 1,8$ (штриховая линия), на рис. 3, б, — гра-

Таблица 1

\tilde{a}	Точка экстремума				Значение $\gamma_5(p; \tilde{a})$ в точке экстремума			
	$p_{5, \max 1}$	$p_{5, \min 1}$	$p_{5, \max 2}$	$p_{5, \min 2}$	$\max_1 \gamma_5$	$\min_1 \gamma_5$	$\max_2 \gamma_5$	$\min_2 \gamma_5$
0,5	0,0391	0,28725	0,71275	0,9609	0,01734	-0,07967	0,07967	-0,01734
1,0	0,03359	0,26029	0,73971	0,96641	0,43594	-0,9285	0,9285	-0,43594
1,5	0,02707	0,23695	0,76305	0,97293	2,43262	-2,41653	2,41653	-2,43262
2,0	0,0212	0,22091	0,77909	0,9788	7,46246	-3,83876	3,83876	-7,46246

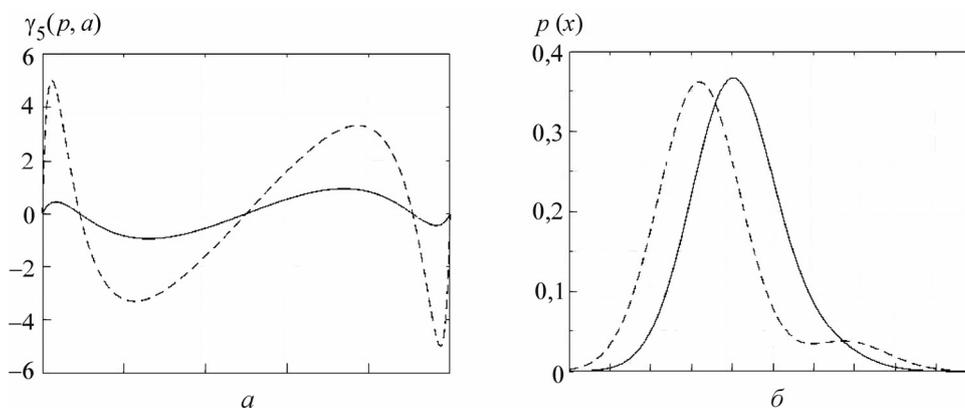


Рис. 3

фики плотности вероятностей смеси (8) при $\sigma_0 = 1$, $p = p_{5,2} = 0,09175$ ($\gamma_5(p, \tilde{a}) = 0$), $\tilde{a} = 1$ (сплошная линия), $\tilde{a} = 1,8$ (штриховая линия).

Коэффициент $\gamma_6(p, \tilde{a})$. На основании (10) и (11) получаем формулу

$$\gamma_6(p, \tilde{a}) = \frac{\tilde{a}^6 \kappa_{6,1}(p, 1)}{(1 + \tilde{a}^2 \kappa_{2,1}(p, 1))^3} = \frac{64 \tilde{a}^6 p q (1 - 30 p q + 120 p^2 q^2)}{(1 + 4 \tilde{a}^2 p q)^3}. \quad (26)$$

Найдем значение коэффициента p , при котором $\gamma_6(p; \tilde{a}) = 0$. Уравнение $\kappa_{6,1}(p, 1) = 64 a^6 p q (1 - 30 p q + 120 p^2 q^2) = 0$ имеет шесть корней, из которых два очевидны: $p_{6,1} = 0$, $p_{6,6} = 1$. Оставшиеся корни, $p_{6,2}$, $p_{6,3}$, $p_{6,4}$, $p_{6,5}$, являются решением уравнения четвертой степени $1 - 30 p q + 120 p^2 q^2 = 1 - 30 p(1 - p) + 120 p^2(1 - p)^2 = 0$, которое заменой переменной $z = p q = p - p^2$ сводится к системе двух уравнений второй степени:

$$\begin{aligned} 120z^2 - 30z + 1 &= 0, \\ p^2 - p + z &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Решая систему (27), находим корни:

$$\begin{aligned} p_{6,2} &= 0,5 - \sqrt{0,125 + \sqrt{7/960}} \approx 0,04132, \\ p_{6,3} &= 0,5 - \sqrt{0,125 - \sqrt{7/960}} \approx 0,30098, \\ p_{6,4} &= 0,5 + \sqrt{0,125 - \sqrt{7/960}} \approx 0,69902, \\ p_{6,5} &= 0,5 + \sqrt{0,125 + \sqrt{7/960}} \approx 0,95868. \end{aligned}$$

С учетом полученных результатов из (26) следует, что при $0 < p < 0,04132$, $0,30098 < p < 0,69902$, $0,95868 < p < 1$ коэффициент $\gamma_6(p; \tilde{a})$ больше нуля и имеет на этих участках максимумы. На участках $0,04132 < p < 0,30098$ и $0,69902 < p < 0,95868$ коэффициент $\gamma_6(p; \tilde{a})$ меньше нуля и имеет на этих участках минимумы.

Преобразуем формулу (26) к такому виду:

$$\gamma_6(p, \tilde{a}) = \frac{64\tilde{a}^6(p - 31p^2 + 180p^3 - 390p^4 + 360p^5 - 120p^6)}{(1 + 4\tilde{a}^2(p - p^2))^3}.$$

Численными методами найдем значения $p_{6,\max k}$, $p_{6,\min k}$ и соответствующие значения $\max_k \gamma_6 = \gamma_6(p_{6,\max k}; \tilde{a})$, $\min_k \gamma_6 = \gamma_6(p_{6,\min k}; \tilde{a})$ для одновершинного распределения при $\tilde{a} = 0,5$, $\tilde{a} = 1$ и двухвершинного распределения при $\tilde{a} = 1,5$, $\tilde{a} = 2$ (табл. 2).

Как видно из табл. 2, при всех значениях \tilde{a} точки экстремумов связаны соотношениями $p_{6,\max 1} + p_{6,\max 3} = 1$, $p_{6,\min 1} + p_{6,\min 2} = 1$, а значения $\gamma_6(p; \tilde{a})$ в точках экстремумов — соотношениями $\max_1 \gamma_6 = \max_3 \gamma_6$, $\min_1 \gamma_6 = \min_2 \gamma_6$. При увеличении параметра \tilde{a} значения $p_{6,\max 1}$, $p_{6,\min 1}$ уменьшаются, значения $p_{6,\min 2}$, $p_{6,\max 3}$ увеличиваются, абсолютные значения коэффициента $\gamma_5(p; \tilde{a})$ в точках экстремумов возрастают. Для одновершинных распределений ($0 < \tilde{a} \leq 1$) коэффициент $\gamma_6(p; \tilde{a})$ имеет область возможных значений $-2,07407 \leq \gamma_6(p; \tilde{a}) \leq 2$.

Таблица 2

\tilde{a}	Точка экстремума				
	$p_{6,\max 1}$	$p_{6,\min 1}$	$p_{6,\max 2}$	$p_{6,\min 2}$	$p_{6,\max 3}$
0,5	0,01856	0,16948	0,5	0,83052	0,98144
1,0	0,01695	0,14645	0,5	0,85355	0,98305
1,5	0,01474	0,12488	0,5	0,87512	0,98526
2,0	0,01239	0,10921	0,5	0,89079	0,98761
\tilde{a}	Значение $\gamma_6(p; \tilde{a})$ в точке экстремума				
	$\max_1 \gamma_6$	$\min_1 \gamma_6$	$\max_2 \gamma_6$	$\min_2 \gamma_6$	$\max_3 \gamma_6$
0,5	0,00851	-0,08014	0,128	-0,08014	0,00851
1,0	0,46875	-2,07407	2	-2,07407	0,46875
1,5	4,31823	-8,62964	5,30906	-8,62964	4,31823
2,0	19,07898	-18,6682	8,192	-18,6682	19,07898

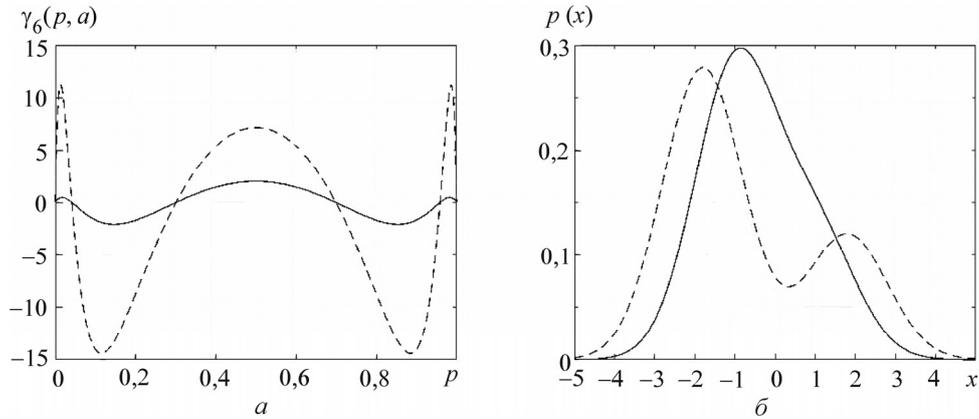


Рис. 4

На рис. 4, а, представлены графики коэффициента $\gamma_6(p, \tilde{a})$ при $\tilde{a} = 1$ (сплошная линия), $\tilde{a} = 1,8$ (штриховая линия), на рис. 4, б, — графики плотности вероятностей смеси (8) при $\sigma_0 = 1$, $p = p_{6,3} = 0,30098$ ($\gamma_6(p, \tilde{a}) = 0$), $\tilde{a} = 1$ (сплошная линия), $\tilde{a} = 1,8$ (штриховая линия).

Рассмотрим компьютерное моделирование случайных величин (5) с плотностью вероятностей (8). Обозначим $\xi_N(m; \sigma)$ — гауссову случайную величину с математическим ожиданием $\mathbf{M}\xi_N(m; \sigma) = m$ и дисперсией $\mathbf{D}\xi_N(m; \sigma) = \sigma^2$, а $\xi_R(a; b)$ — случайную величину, равномерно распределенную на интервале $[a, b]$. Тогда компьютерное моделирование случайной величины (5) сводится к моделированию независимых случайных величин $\xi_N(0; \sigma_0)$ и $\xi_R(0; 1)$, а затем суммы

$$\xi = \xi_0 + \xi_1 = \xi_N(0; \sigma_0) + a \operatorname{sign}(p - \xi_R(0; 1)). \quad (28)$$

Формула (28) позволяет моделировать случайные величины ξ с плотностью вероятностей (8), математическим ожиданием $\mathbf{M}\xi = m_\xi = \kappa_1 = \kappa_{1,0} + \kappa_{1,1} = a(p - q)$ и дисперсией $\mathbf{D}\xi = \sigma_\xi^2 = \kappa_2 = \kappa_{2,0} + \kappa_{2,1} = \sigma_0^2 + 4a^2 pq$. Для моделирования случайной величины $\tilde{\xi}$, у которой $\mathbf{M}\tilde{\xi} = 0$ и $\mathbf{D}\tilde{\xi} = 1$, случайную величину (28) нужно стандартизировать:

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi} = \frac{\xi - a(p - q)}{(\sigma_0^2 + 4a^2 pq)^{1/2}}. \quad (29)$$

Плотность вероятностей $\tilde{p}(x)$ стандартизированной случайной величины (29) имеет вид

$$\tilde{p}(x) = \sigma_{\xi} p(\sigma_{\xi} x + m_{\xi}) = \frac{\sigma_{\xi}}{\sigma_0} \left[q\Phi\left(\frac{\sigma_{\xi} x + m_{\xi} + a}{\sigma_0}\right) + p\Phi\left(\frac{\sigma_{\xi} x + m_{\xi} - a}{\sigma_0}\right) \right].$$

Выводы

Для двухкомпонентных смесей сдвинутых гауссовых распределений с равными дисперсиями, плотность вероятностей которых может быть как одновершинной, так и двухвершинной, определены области возможных значений кумулянтных коэффициентов $\gamma_s(p, \tilde{a})$, $s = \overline{3, 6}$, и значения весовых коэффициентов p , при которых $\gamma_s(p, \tilde{a}) = 0$. Полученные результаты дают возможность осуществлять математическое и компьютерное моделирование случайных величин с наперед заданными значениями кумулянтных коэффициентов. Компьютерное моделирование случайных величин сводится к моделированию по известным алгоритмам суммы независимых случайных величин ξ_0 и ξ_1 .

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айвазян С.А., Бежаева З.И., Староверов О.В. Классификация многомерных наблюдений. М.: Статистика, 1974, 240 с.
2. Titterton D.M., Smith A.F.M., Makov U.E. Statistical analysis of finite mixture distributions. New York: John Wiley & Sons, 1985, 250 p.
3. McLachlan G., Peel D. Finite mixture models. New York: John Wiley & Sons, 2000, 438 p.
4. Королев В.Ю. Вероятностно-статистический анализ хаотических процессов с помощью смешанных гауссовских моделей. Декомпозиция волатильности финансовых индексов и турбулентной плазмы. М.: Изд-во Института проблем информатики РАН, 2008, 390 с.
5. Апраушева Н.Н., Сорокин С.В. Заметки о гауссовых смесях. М.: ВЦ Российской академии наук, 2015, 144 с.
6. Punzo A., McNicholas P.D. Parsimonious mixtures of multivariate contaminated normal distributions // Preprint submitted to arXiv 1305.4669. 20.05.2016, p. 1–28. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://arxiv.org/pdf/1305.4669.pdf>
7. Чабдаров Ш.М., Сафиуллин Н.З., Феоктистов А.Ю. Основы статистической теории радиосвязи. Полигауссовы модели и методы: Учеб. пос. Казань: Казанский авиац. ин-т им. Туполева, 1983, 87 с.
8. Сорокин В.Н., Вьюгин В.В., Тананыкин А.А. Распознавание личности по голосу: аналитический обзор // Информационные процессы, 2012, **12**, № 1, с. 1–30.
9. Tukey J.W. A survey of sampling from contaminated distributions // Contributions to Probability and Statistics. Ed. by I. Olkin. Stanford: Stanford Univ. Press, 1960, p. 448–485.

10. Брашеван А.Н. Статистическая модель многомодовых экспериментальных данных // Радиоэлектронні і комп'ютерні системи, 2004, вип. 1 (5), с. 105—108.
11. Литвак М.Я., Малюгин В.И. Полигауссовские модели негауссовской случайно-шероховатой поверхности // Журнал технической физики, 2012, **82**, вып. 4, с. 99—107.
12. Рубцов Е.А. Распределения ошибок определения координат воздушных судов // Вестник Самарского гос. аэрокосмического университета, 2014, № 1 (43), с. 267—274.
13. Красильников А.И., Пилипенко К.П. Одновершинная двухкомпонентная гауссовская смесь. Коэффициент эксцесса // Электроника и связь, 2007, № 2 (37), с. 32—38.
14. Красильников А.И., Пилипенко К.П. Применение двухкомпонентной гауссовской смеси для идентификации одновершинных симметричных плотностей вероятностей // Электроника и связь, 2008, № 5 (46), с. 20—29.
15. Чепинога А.В. Области реалізації бігаусових моделей асиметрично-ексцесних випадкових величин з перфорованим моментно-кумулянтним описом // Вісник ЧДТУ, 2010, № 2, с. 91—95.
16. Токмачев М.С., Смирнов С.В. Программная реализация исследования смесей вероятностных распределений // Вестник Новгородского гос. университета, 2012, № 68, с. 85—89.
17. Кунченко Ю.П., Заболотній С.В., Коваль В.В., Чепинога А.В. Моделювання ексцесних випадкових величин із заданим кумулянтним описом на основі бігаусового розподілу // Вісник ЧДТУ, 2005, № 1, с. 38—42.
18. Красильников А.И. Моделирование перфорированных случайных величин на основе смесей сдвинутых распределений // Електрон. моделювання, 2018, **40**, № 1, с. 47—61.

Получена 27.04.20

REFERENCES

1. Aivazian, S.A., Bezhaeva, Z.I. and Staroverov, O.V. (1974) *Klassifikatsiia mnogomernykh nabludenii* [Classification of multidimensional observations], Statistika, Moscow, Russia.
2. Titterington, D.M., Smith, A.F.M. and Makov, U.E. (1985), *Statistical analysis of finite mixture distributions*, John Wiley & Sons, New York.
3. McLachlan, G. and Peel, D. (2000), *Finite mixture models*, John Wiley & Sons, New York.
4. Korolev, V.Iu. (2008), *Veroiatnostno-statisticheskii analiz khaoticheskikh protsessov s pomoshchiu smeshannykh gaussovskikh modelei. Dekompozitsiia volatilnosti finansovykh indeksov i turbulentnoi plazmy* [Probabilistic-statistical analysis of chaotic processes using mixed Gaussian models. Decomposition of volatility of financial indices and turbulent plasma], Izd-vo Instituta problem informatiki RAN, Moscow, Russia.
5. Aprausheva, N.N. and Sorokin, S.V. (2015), *Zametki o gaussovykh smesiakh* [Notes on Gaussian mixtures], VTs Rossiiskoi akademii nauk, Moscow, Russia.
6. Punzo, A. and McNicholas, P.D. (2016), “Parsimonious mixtures of multivariate contaminated normal distributions”, *Preprint submitted to arXiv 1305.4669*, May 20, 2016, pp. 1-28, available at: <https://arxiv.org/pdf/1305.4669.pdf> (accessed May 26, 2020).
7. Chabdarov, Sh.M., Safiullin, N.Z. and Feoktistov A.Iu. (1983), *Osnovy statisticheskoi teorii radiosviazi. Poligaussovy modeli i metody* [Fundamentals of the statistical theory of radio communications. Poly-Gaussian models and methods], Kazanskii aviats. in-t im. Tupoleva, Kazan', Russia.
8. Sorokin, V.N., V'iugin, V.V. and Tananykin, A.A. (2012), “Voice Recognition: An Analytical Review”, *Informatsionnye protsessy*, Vol. 12, no. 1, pp. 1-30.

9. Tukey, J.W. (1960), "A survey of sampling from contaminated distributions", *Contributions to Probability and Statistics, Stanford Univ. Press*, Stanford, pp. 448-485.
10. Brashevan, A.N. (2004) "A statistical model of multimode experimental data", *Radioelektronni i kompiuterni systemy*, Vol. 1, no. 5, pp. 105-108.
11. Litvak, M.Ia. and Maliugin, V.I. (2012), "Poly-Gaussian models of a non-Gaussian randomly roughened surface", *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki*, Vol. 82, no. 4, pp. 99-107.
12. Rubtsov, E.A. (2014), "Distribution of errors of aircraft coordinates determination", *Vestnik Samarskogo gos. aerokosmicheskogo universiteta*, no. 1 (43), pp. 267-274.
13. Krasilnikov, A.I. and Pilipenko, K.P. (2007), "Unimodal two-componental Gaussian mixture. Excess kurtosis", *Elektronika i sviaz*, no. 2 (37), pp. 32-38.
14. Krasilnikov, A.I. and Pilipenko, K.P. (2008), "Application of a two-component Gaussian mixture to identify single-peak symmetric probability density functions", *Elektronika i sviaz*, no. 5(46), pp. 20-29.
15. Chepynoha, A.V. (2010), "Areas of realization of bi-Gaussian models of skewness-excess random variables with the punched moment-cumulant description", *Visnyk ChDTU*, no. 2, pp. 91-95.
16. Tokmachev, M.S. and Smirnov, S.V. (2012), "Software implementation of the study of mixtures of probability distributions", *Vestnik Novgorodskogo gos. universiteta*, no. 68, pp. 85-89.
17. Kunchenko, Yu.P., Zabolotnii, S.V., Koval, V.V. and Chepynoha, A.V. (2005), "Simulation of excess random variables with given cumulative description based on bi-Gaussian distribution", *Visnyk ChDTU*, no. 1, pp. 38-42.
18. Krasilnikov, A.I. (2018), "Modeling of perforated random variables on the basis of mixtures of shifted distributions", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 40, no. 1, pp. 47-61.

Received 27.04.20

О.І. Красильников

АНАЛІЗ КУМУЛЯНТНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ
ДВОКОМПОНЕНТНИХ СУМІШЕЙ ЗСУНУТИХ
ГАУСОВИХ РОЗПОДІЛІВ З РІВНИМИ ДИСПЕРСІЯМИ

Проаналізовано залежність кумулянтних коефіцієнтів сумішей, щільність ймовірностей яких може бути як одновіршинною, так і двовіршинною, від параметра зсуву та вагових коефіцієнтів. Визначено області можливих значень кумулянтних коефіцієнтів та отримано значення вагових коефіцієнтів, при яких кумулянтні коефіцієнти дорівнюють нулю. Показано, що коефіцієнт ексцесу дорівнює нулю при двох значеннях вагових коефіцієнтів і будь-яких значеннях параметра зсуву.

К л ю ч о в і с л о в а: двокомпонентні суміші розподілів, двокомпонентна гаусова суміш, кумулянтний аналіз, кумулянтні коефіцієнти, коефіцієнт ексцесу

A.I. Krasilnikov

ANALYSIS OF CUMULANT COEFFICIENTS
OF TWO-COMPONENT MIXTURES OF SHIFTED
GAUSSIAN DISTRIBUTIONS WITH EQUAL VARIANCES

The dependence of cumulant coefficients of mixtures, the probability density of which can be either single-vertex or two-vertex, on the shear parameter and weight coefficients is analyzed. The ranges of possible values of cumulant coefficients are determined and the values of

weighting coefficients at which cumulant coefficients are equal to zero are obtained. It is shown that the excess coefficient is zero for two values of the weight coefficients and any values of the shift parameter.

Key words: two-component mixtures of distributions, two-component Gaussian mixture, cumulant analysis, cumulant coefficients, kurtosis coefficient.

КРАСИЛЬНИКОВ Александр Иванович, канд. физ.-мат. наук, доцент, вед. науч. сотр. Института технической теплофизики НАН Украины. В 1973 г. окончил Киевский политехнический институт. Область научных исследований — математические модели, вероятностные характеристики и методы статистической обработки флуктуационных сигналов в системах шумовой диагностики.