

---

doi: <https://doi.org/10.15407/emodel.42.04.049>  
УДК 62-50+007.52 : [621.3.014/ 537.39] :621.74:669.2/.8

**Ю.М. Запорожец**<sup>1</sup>, канд. техн. наук, **А.В. Иванов**<sup>1</sup>, канд. техн. наук,  
**Ю.П. Кондратенко**<sup>2</sup>, д-р техн. наук, **В.Н. Цуркин**<sup>1</sup>, канд. физ.-мат. наук

<sup>1</sup> Институт импульсных процессов и технологий НАН Украины,  
(Украина, 54018, Николаев, пр-т Богоявленский, 43-А,  
e-mail: [dpta@ijpt.com.ua](mailto:dpta@ijpt.com.ua));

<sup>2</sup> Черноморский национальный университет им. П. Могилы  
(Украина, 54003, Николаев, ул. 68-ми Десантников, 10)

## **Компьютерные модели для управления режимами электротокковой обработки расплавов по заданным критериям качества литых изделий. Ч II**

Приведены результаты компьютерного моделирования процесса электротокковой обработки (ЭТО) расплавов, выполненного на основе дифференциальных уравнений методом конечных элементов с помощью программного пакета COMSOL. В результате численных экспериментов выявлены недостатки моделей, ограничивающие возможность их использования в алгоритмических процедурах, которые заложены в интегрированную трехкомпонентную информационную систему (ИТИС), описанную в первой части статьи. Указанных недостатков не имеют разработанные физически адекватные компьютерные модели, основанные на интегральном представлении уравнений процесса ЭТО, которые адаптированы к задачам управления режимами ЭТО (УРЭТО) расплавов. Представлены результаты верификации разработанной модели по аналитическим образцам. Приведены примеры решения задач, имитирующих режимы ЭТО. Полученные результаты являются основанием для перехода к реализации всей концепции автоматизации системы УРЭТО.

*К л ю ч е в ы е с л о в а:* компьютерная модель, дифференциальные, интегральные уравнения, ток, поле, конечные элементы, итерация, сходимость, точность.

**Общая характеристика компьютерных моделей, используемых для моделирования режимов ЭТО расплавов.** Системной базой алгоритмической парадигмы, заложенной в основу ИТИС, являются компьютерные модели процессов ЭТО, с помощью которых формируются генеральная совокупность числовых макетов режима структурообразования и представительная выборка прогностических архетипов [1]. Именно эта процедура предопределяет успешность реализации задачи целенаправленного формирования показателей качества литых изделий. Поэтому к

© Запорожец Ю.М., Иванов А.В., Кондратенко Ю.П., Цуркин В.Н., 2020

компьютерным моделям, предназначенным для указанных целей, предъявляют самые высокие требования как по точности и скорости сходимости решений, универсальности в отношении конфигурации моделируемых объектов, так и по физической адекватности постановки расчетных задач и интерпретации получаемых результатов.

Однако в силу мультифизичности воздействия на расплав и влияния на процесс структурообразования электромагнитных и сопряженных с ними полей, математическая формулировка и алгоритмическая логика построения компьютерных моделей процессов ЭТО представляет сложную междисциплинарную проблему, которая не поддается решению аналитическим путем [2—4]. Она охватывает малоизученные аспекты взаимодействия электромагнитных полей со средой с изменяющимися в процессе обработки параметрами, специфическое магнитогидродинамическое явление самовозбуждающихся вихревых течений, которые вызывают перемешивание слоев и перераспределение температурных полей в расплаве, обратное влияние на параметры среды и другие. Кроме того, в жидкой матрице расплава неизбежно присутствие разнородных и разнокалиберных (микро- и макро-) включений, которые под действием локальных сил электромагнитной и гидродинамической природы совершают миграцию по объему и изменяют свою морфологию [2—4].

Совокупность изложенных обстоятельств создает уникальный по сложности для прогнозирования предмет анализа. Очевидно, что в такой ситуации вряд ли есть основания рассчитывать на создание универсальной компьютерной модели для решения данной проблемы. Поэтому стратегия ее решения состоит в том, чтобы подразделить комплексную задачу на простые (монофизические) частные задачи и поэтапно находить их численные решения, обеспечивая сопряжение (припасовывание) по исходно-выходным данным [2, 5].

Последовательность действий в таком сопряженном анализе обусловлена логикой причинно-следственной связи описанного мультифизического процесса, а именно исходным является:

- а) воздействие подведенного электрического тока, плотность распределения которого в объеме расплава предопределяет конфигурацию магнитного поля и распределение электромагнитных сил;
- б) интенсивности источников джоулевой теплоты.

На последующих этапах вычислений можно рассчитать скорость движения расплава, температурное поле и изменения электромагнитных параметров по его объему. Повторяя такую процедуру с новыми параметрами, можно получить результат, сходящийся к псевдорешению, которое и будет имитационной моделью наилучшего приближения к реальному процессу.

Именно такой подход используется практически во всех работах, посвященных численному моделированию процессов ЭТО расплавов. В основу моделей положены известные дифференциальные уравнения в частных производных (ДУЧП), которые описывают электромагнитные, гидродинамические, тепловые и другие процессы. Их численное решение выполняется обычно методами конечных элементов (МКЭ), для чего применяются хорошо зарекомендовавшие себя программные пакеты ANSYS или COMSOL Multiphysics. Иногда используются и другие нестандартные численные алгоритмы [6] и аналитические решения [7].

В большинстве опубликованных работ [1—7] в качестве базовой задачи рассматривается моделирование распределения плотности электрического тока в объеме расплава для заданного напряжения на электродах. На первом этапе задачу формулируют в безындукционном приближении [1,5]. При этом расплав, нагретый выше точки Кюри (для железа 760 °С), полагают однородной и изотропной немагнитной средой ( $\mu = 1$ ) с большой проводимостью  $\gamma$ , в которой токами смещения можно прене-

бречь, так как  $\frac{\omega \varepsilon_a}{\gamma} \ll 1$ , где  $\omega = 2\pi f \ll 2\pi \cdot 10^3$  ГГц. Тогда в общем слу-

чае задача представляется системой уравнений Максвелла для квазистационарного электромагнитного поля в дифференциальной форме, которые в случае отсутствия в объеме свободных зарядов записываются так:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{E} &= 0, \operatorname{div} \bar{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \bar{H} &= \bar{\delta}, \operatorname{rot} \bar{E}_{\text{ин}} = -\frac{\bar{B}}{t}. \end{aligned} \quad (1)$$

К ним добавляют материальные уравнения среды и закон сохранения зарядов:

$$\bar{B} = \mu\mu_0 \bar{H}, \bar{\delta} = \gamma \bar{E}, \operatorname{div} \bar{\delta} = 0, \quad (2)$$

где  $\bar{E}$  — напряженность электрического поля;  $\bar{B}$  — магнитная индукция;  $\bar{H}$  — напряженность магнитного поля;  $\bar{\delta}$  — плотность электрического тока;  $\gamma$  — проводимость среды.

Следует заметить, что в зависимости от типа тока (постоянный, переменный или импульсный) уравнения (1), (2), естественно, видоизменяются. Так, при постоянном токе его плотность  $\bar{\delta} = \text{const}$ , возбуждающее электрическое поле  $\bar{E} = \text{const}$  и производные по времени равны нулю. Для случая переменного гармонического тока уравнения записываются соответственно в квазистационарной постановке, т.е. пространственные векторы становятся комплексными ( $\dot{\bar{E}} = E_m e^{j\omega t}$ ,  $\dot{\bar{B}} = B_m e^{j\omega t}$  и так далее), а производная по времени становится оператором  $j\omega\mu\mu_0 \dot{H}$  или  $j\omega \dot{B}$ .

При этом необходимо учитывать, что напряженность поля  $E$  формируется из первичного потенциального поля  $\bar{E}_{\text{эл}}$ , заданного напряжением на электродах, а также индуцированным полем переменного магнитного поля  $\bar{E}_{\text{ин}}$  и полем  $\bar{E}_{\text{л}}$ , обусловленным относительным движением среды (силой Лоренца):

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \bar{E}_{\text{эл}} + \bar{E}_{\text{ин}} + \bar{E}_{\text{л}}, \\ \bar{E}_{\text{эл}} &= -\text{grad } \varphi_{\text{эл}}, \quad \bar{E}_{\text{л}} = \bar{v} \times \bar{B}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\varphi_{\text{эл}}$  — потенциал поля, созданного напряжением на электродах;  $\bar{v}$  — скорость течения расплава.

Гидродинамические процессы течения жидкого металла под влиянием объемной электромагнитной силы, обусловленной взаимодействием магнитного поля с током, при условии неразрывности  $\text{div } \bar{v} = 0$  описываются уравнением Навье—Стокса для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \eta_{\text{эф}} \Delta \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla P_{\text{м}} + \frac{\bar{F}_{\text{эм}}}{\rho}, \quad (4)$$

где  $\bar{F}_{\text{эм}} = \bar{\delta} \times \bar{B}$  — объемная электромагнитная сила (сила Ампера), Н/м<sup>3</sup>;  $\eta_{\text{эф}}$  — эффективное значение коэффициента кинематической вязкости, вычисленное с учетом турбулентных потоков в жидком металле, м<sup>2</sup>/с;  $\rho$  — плотность расплава, кг/м<sup>3</sup>.

Вместе с тем, неотъемлемой составляющей математической модели являются граничные условия, накладываемые на множество допустимых решений системы ДУЧП, которые делают решение определенным и однозначным. Такими условиями могут быть либо распределение потенциала поля по замкнутой граничной поверхности расчетной области (задача Дирихле), либо распределение его нормальной производной — напряженности поля (задача Неймана).

При практическом применении МКЭ для получения «хорошего» решения и упрощения процедур дискретизации расчетной области (разбиения на конечные элементы (КЭ)) часто прибегают к деформированию граничной поверхности области, т.е. ее выравнивают или сглаживают и приводят к простым линиям. Кроме того, во избежание значительных затрат времени на решение задачи (сходимость результата) задаваемые граничные функции распределения потенциалов и производных также упрощают, сводя их к константам или линейным зависимостям. Естественно, такие манипуляции вносят искажения в реальную физическую картину полей.

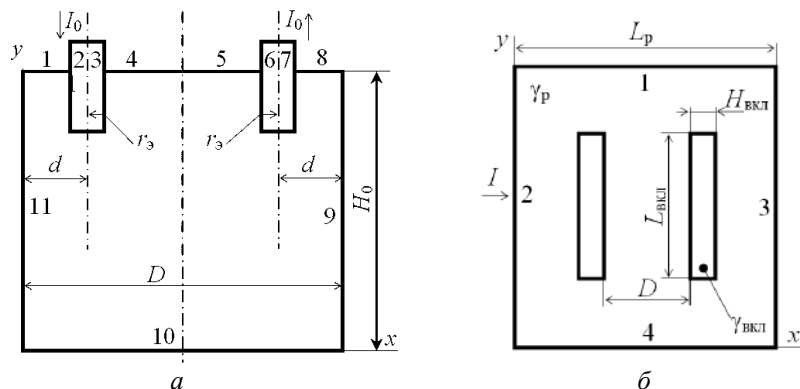


Рис. 1. Расчетные геометрические модели для задач ЭТО макроуровня (а) и микроуровня (б):  $r_3$  — радиус электрода;  $L_p$  — зона расплава с включениями;  $L_{вкл}$  и  $H_{вкл}$  — длина и ширина включения;  $\gamma_{вкл}$  и  $\gamma_p$  — проводимость включения и расплава; 1—11 — номера участков границы расчетной области

**Компьютерное моделирование процессов ЭТО расплава методом ДУЧП-МКЭ.** Практическое решение системы уравнений (1)—(4) с помощью МКЭ для каждой отдельной задачи осуществляется с компьютерного терминала посредством ввода в диалоговом режиме через интерфейс пакета COMSOL (или другого подобного) параметров моделируемого объекта и граничных условий. При этом какого-либо вмешательства в программный код фактически не требуется.

На рис. 1 представлены типовые геометрические формы для задач ЭТО макро- и микроуровня. В ковш диаметром  $D$  с расплавом (см. рис. 1, а) погружены электроды, через которые подведен электрический ток  $I_0$ . Вдоль контура по боковым стенкам и днищу ковша, а также по свободной поверхности расплава и электродов выделено и пронумеровано 11 участков границы расчетной области. На рис. 1, б, показан участок объема расплава с включениями простой формы, которые находятся в поле электрического тока  $I$  и вносят соответствующие возмущения в распределение его плотности.

На каждом из участков контура, представленного на рис.1, а, заданы граничные условия на основании вероятного физически правдоподобного распределения характеристик поля. В данном случае они заданы в виде распределения азимутальных (угловых) компонент напряженности магнитного поля (перпендикулярных плоскости чертежа), которые вдоль стенок и днища изменяются предположительно по закону полного тока, т.е. обратно пропорционально расстоянию от оси ковша [8, 9]. Однако по торцам электродов условия формулируются в терминах электрического поля.

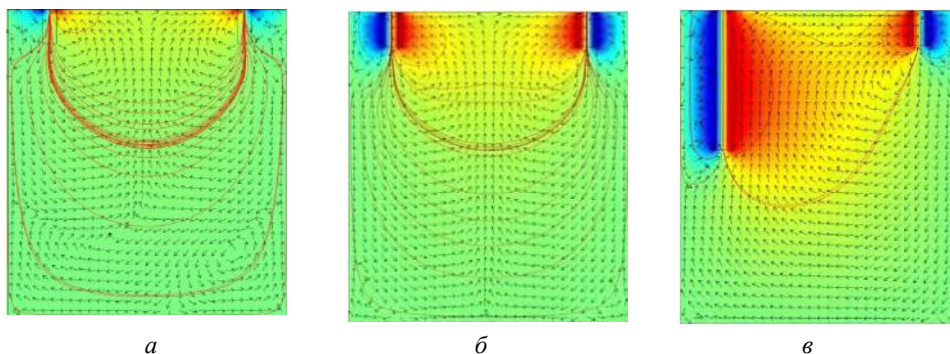


Рис. 2. Электромагнитное поле и поле течений при ЭТО расплава: *а* — равнозаглубленными электродами с неизолированной боковой поверхностью; *б* — равнозаглубленными электродами с изолированной боковой поверхностью; *в* — разнозаглубленными электродами с изолированной боковой поверхностью.

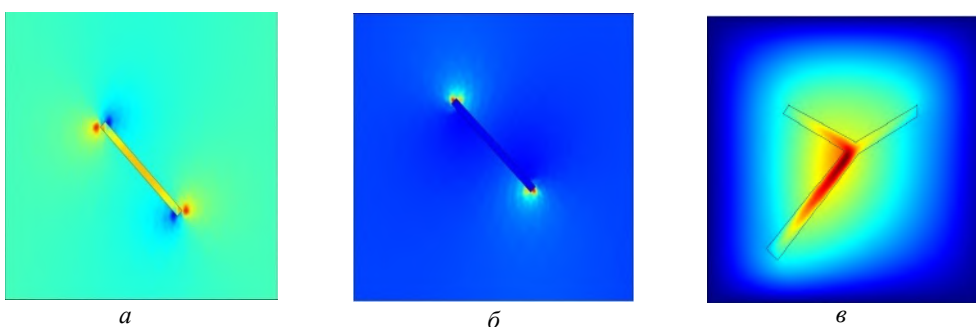


Рис. 3. Распределение удельной тепловой мощности в окрестности включений: *а* — проводимость включения вида «плоскость» меньше проводимости матрицы расплава; *б* — проводимость включения вида «плоскость» больше проводимости матрицы; *в* — проводимость включения вида «иероглиф» больше проводимости матрицы

Иногда [10] вводят иные граничные условия: на непроводящих участках нормальную составляющую плотности тока приравнивают нулю, а на электродах задают фиксированные значения. На рис. 2 приведены электромагнитное поле и поле течений при ЭТО расплава, а на рис. 3 — распределение удельной тепловой мощности в окрестности включений.

Представленные результаты свидетельствуют о характерных различиях в распределении анализируемых полей в расплаве на макроуровне (см. рис. 2) и о потенциальной возможности посредством этих полей влиять на морфологию и топологию включений (фаз) разной проводимости на нано- и микроуровне (см. рис. 3).

Как видно из рис. 3, при решении практических задач ЭТО преобладают смешанные граничные условия: на одних участках границы заданы потенциалы, а на других — напряженности поля или сопряженные с ними величины. Такая комбинация вызывает усложнение программных

реализаций, так как требует состыковки интерполяционных полиномов КЭ в зонах примыкания к участкам границ с различными условиями, что приводит к дополнительным искажениям предполагаемого решения. Поэтому в работе [11] указано, что следует различать «вычислительные» и «аналитические» граничные условия.

Аналитические условия выбираются, прежде всего, из соображений удобства и простоты аналитической постановки задачи, тогда как численные формулировки предполагают многообразие вычислительных граничных условий, не эквивалентных общепринятым аналитическим, так что, вообще говоря, численное решение в целом не будет сходиться к какому-либо аналитическому решению. В примерах, представленных на рис. 2 и 3, граничные условия по Роучу [11] следует считать аналитическими, хотя они являются, скорее, эвристическими.

Наряду с проблемой адекватности граничных условий важнейшим фактором, характеризующим МКЭ и особенно критичным с точки зрения наполнения базы компьютерных моделей ИТИС, является кубическая зависимость числа КЭ разбиения расчетной области от ее линейного размера. От числа КЭ зависит другой фактор — точность и достоверность решения, а также порядок и число коэффициентов матрицы, аппроксимирующей систему ДУЧП. Если соотношение размера КЭ и расчетной области по минимуму взять 1:20, то получим 8000 КЭ, а число коэффициентов матрицы (в квадрате) превысит  $6 \cdot 10^7$ . Повышение точности потребует значительного увеличения числа КЭ и соответствующего возрастания затрат времени на вычисления примерно в такой же пропорции (на обычных процессорах они могут достигать многих часов). Согласно [12] для 3D сетки размером  $3 \cdot 10^6$  время счета составляло приблизительно 4000 с, для 2D сетки размером  $5 \cdot 10^4$  — 1400 с, для 3D — приблизительно 4000 с, а в [10] сообщается о сетке из  $443 \cdot 10^6$  КЭ.

Специфические недостатки метода ДУЧП-МКЭ проявляются в задачах ЭТО с относительно большим объемом ковша при ограниченных габаритах сложных многоэлектродных систем токоподвода, т.е. когда существенно нарушается геометрическое подобие объектов моделирования, а также при расчетах электромагнитных и связанных с ними процессов с учетом влияния микровключений (в статике и динамике). При таких условиях потребуются миллионы КЭ расчетной сетки. А поскольку для оценки какого-либо объемного параметра исследуемого процесса придется неоднократно прогонять процедуру расчета по всей сетке с учетом вариаций начальных и граничных условий, потребуются миллиарды КЭ и десятки часов вычислений. Естественно, такая постановка выходит за рамки возможностей лабораторных компьютерных систем и нуждается в кардинальных изменениях.

Таким образом, в определенных ситуациях упрощенные формулировки граничных условий приводят к искажениям физических аспектов полученных результатов, а их содержание недостаточно информативно, так как не раскрывает индуцированные компоненты электрического поля, которые необходимы для выявления условий формирования кластеров и зародышей кристаллизации.

**Альтернативные компьютерные модели, основанные на интегральном представлении задач ЭТО.** Представляется рациональным использовать для решения совокупности уравнений математической физики метод, основанный на интегральных формулировках характеристик физических полей в области, где происходит процесс их взаимодействия со средой, которая может изменять свои свойства [13,14]. Такой переход аналогичен решениям задач Дирихле и Неймана для уравнений Лапласа и Пуассона с помощью интегральных формул Грина, в которых свойства физических полей отображаются потенциалами простого и двойного слоя [15,16].

Такой подход называют методом интегральных уравнений (ИУ) или вторичных источников. Его преимущества становятся очевидными в ситуациях, когда пространственную область взаимодействия, или множество, где локализуется процесс (явление), удастся эквивалентно представить на множестве меньшей размерности. Иными словами, задача преобразуется из объема тела (пространства) на площадь его поверхности, а в двумерном случае — из площади фигуры на ее граничный контур [17,18]. Естественно, что при этом размерность системы уравнений понижается на порядок.

Несомненным преимуществом интегральной формулировки есть ее «физичность» — явное отражение взаимосвязи индуцированного поля с возбуждающим через пространственные и физические параметры электромагнитной системы. Интегральная формулировка математической модели первичного электрического поля процесса ЭТО в общем виде вытекает из формулы Грина для внутренней задачи Дирихле [18, 19]. В этой задаче задана расчетная область в виде замкнутой поверхности  $S$ , внутри которой имеются  $m_q$  первичных источников поля (свободных электрических зарядов)  $q$  и  $m_\sigma$  некоторых тел, на замкнутых поверхностях которых  $S^{(\sigma)}$  индуцированы вторичные источники (связанные заряды)  $\sigma$ . Первичные источники создают потенциалы  $u^{(1)}$ , а вторичные — потенциалы  $u^{(2)}$ .

На рис. 4 представлен пример произвольной области с указанными условиями. Граница области может состоять из  $m_u$  участков  $S^{(u)}$ , на которых заданы значения потенциала  $u^0$ , а значения нормальной составляющей напряженности электрического поля  $E_n^{(b)}$  неизвестны, и  $m_e$  участков



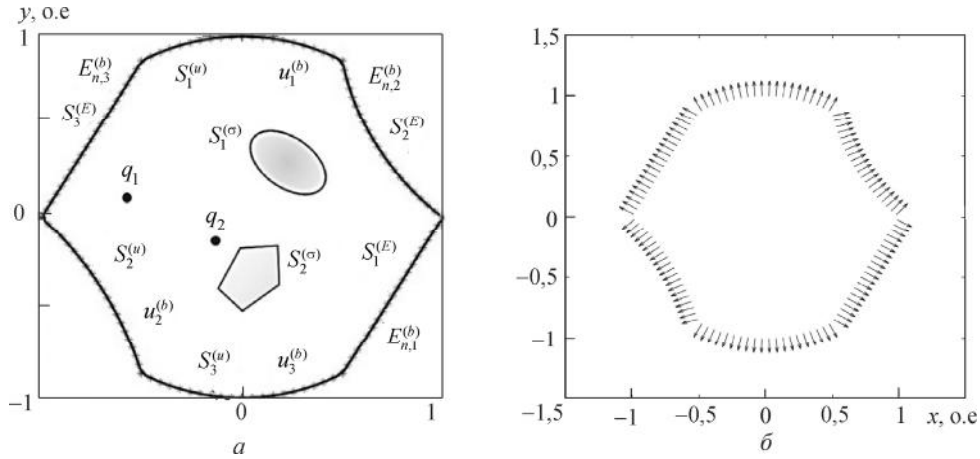


Рис. 4. Расчетная область ИУ (а) и векторы нормалей к дугам в точках коллокаций (б)

$S^{(E)}$ , на которых заданы значения нормальной составляющей напряженности электрического поля  $E_n^0$ , а значения потенциалов  $u^{(b)}$  неизвестны.

Неизвестные значения  $u^{(b)}$  и  $E_n^{(b)}$  подлежат определению в результате решения задачи. Тогда по формуле Грина запишем общее выражение потенциала в любой точке  $M$  внутри области  $S$ :

$$u(M) = u^{(1)}(M) - \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{m_u} \int_{S_i^{(u)}} \left( E_{n,i}^{(b)} \frac{1}{r_{b,M}} + u_i^0 \frac{\partial}{\partial n_b} \frac{1}{r_{b,M}} \right) ds - \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{m_E} \int_{S_i^{(E)}} \left( E_{n,i}^0 \frac{1}{r_{b,M}} + u_i^{(b)} \frac{\partial}{\partial n_b} \frac{1}{r_{b,M}} \right) ds + \sum_{i=1}^{m_\sigma} u_i^{(\sigma)}. \quad (5)$$

Здесь  $r_{b,M}$  — радиус-вектор из точки  $b$  на границе в точку  $M$ ,  $r_{b,M} = \sqrt{(x_b - x_M)^2 + (y_b - y_M)^2 + (z_b - z_M)^2}$ . Упомянутые потенциалы выразим интегральными операторами (ИО) с ядром  $K_1(P, M)$  простого слоя и ядром  $K_2(P, M)$  двойного слоя:

$$K_1(b, M) = \frac{1}{r_{b,M}}, \quad K_2(b, M) = \frac{\partial}{\partial n_b} \left( \frac{1}{r_{b,M}} \right). \quad (6)$$

Эти ядра являются функциями координат двух точек. При этом ядро  $K_2$  представляет собой частную производную от  $K_1$  по направлению внут-

ренной нормали к поверхности интегрирования. Заметим, что в этой формулировке поле вне области  $S$  тождественно равно нулю.

Для получения исходной системы уравнений необходимо из выражения (5) найти нормальные производные потенциалов на поверхностях  $S^{(\sigma)}$  и участках границы  $S^{(u)}$ , а также потенциалы на участках границы  $S^{(E)}$  с учетом скачка потенциала двойного слоя и нормальных производных потенциалов простого слоя на этих поверхностях.

Обозначим:  $E_n$  — напряженность поля от первичных источников;  $E_n(E_n^0)$ ,  $u(E_n^0)$ ,  $E_n(u^0)$ ,  $u(u^0)$  — напряженность поля и потенциалы от участков границ с заданными граничными условиями. Тогда из (5) получим следующую систему трех ИУ, которые связывают все указанные на рис. 4, а, первичные и вторичные источники поля, а также заданные на границах значения потенциалов и напряженностей поля [18]:

$$\begin{aligned} \sigma_i + \frac{\lambda_i}{2\pi} \sum_{j=1}^{m_\sigma} \int_{S_j^{(\sigma)}} \sigma_j K_{i,j} ds - \frac{\lambda_i}{2\pi} \sum_{j=1}^{m_u} \int_{S_j^{(u)}} E_{n,j}^{(b)} K_{i,j} ds - \frac{\lambda_i}{2\pi} \sum_{j=1}^{m_E} \int_{S_j^{(E)}} u_j^{(b)} L_{i,j} ds = \\ = 2\lambda_i \left[ E_{n,i}^{1(\sigma)} + E_{n,i}^{(\sigma)}(u^0) + E_{n,i}^{(\sigma)}(E_n^0) \right], \quad i = 1, 2, \dots, m_\sigma, \\ E_{n,i}^{(b)} - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{m_\sigma} \int_{S_j^{(\sigma)}} \sigma_j K_{i,j} ds - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{m_u} \int_{S_j^{(u)}} E_{n,j}^{(b)} K_{i,j} ds - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{m_E} \int_{S_j^{(E)}} u_j^{(b)} L_{i,j} ds = \\ = 2 \left[ E_{n,i}^{1(b)} + E_{n,i}^{(b)}(u^0) + E_{n,i}^{(b)}(E_n^0) \right], \quad i = 1, 2, \dots, m_u, \\ u_i^{(b)} + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{m_\sigma} \int_{S_j^{(\sigma)}} \sigma_j M_{i,j} ds - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{m_u} \int_{S_j^{(u)}} E_{n,j}^{(b)} M_{i,j} ds - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{m_E} \int_{S_j^{(E)}} u_j^{(b)} N_{i,j} ds = \\ = 2 \left[ u_i^{1(b)} + u_i^{(b)}(u^0) + u_i^{(b)}(E_n^0) \right], \quad i = 1, 2, \dots, m_E. \end{aligned} \tag{7}$$

Первое уравнение системы (7) относится к границам раздела сред с различными проницаемостями или проводимостями, которые характеризуются коэффициентом  $\lambda$ . В области, представленной на рис. 4, а, это могут быть поверхности  $S_1^{(\sigma)}$  и  $S_2^{(\sigma)}$  или весь граничный контур  $S^{(b)}$ . Второе и третье уравнения системы (7) относятся ко всему контуру  $S^{(b)}$ ,

который образуется участками  $S^{(u)}$  и  $S^{(E)}$ . Формулы ядер ИО для 2D варианта имеют вид

$$M_{i,j} = \ln r_{i,j}, K_{i,j} = \frac{\cos \psi_i}{r_{i,j}}, N_{i,j} = \frac{\cos \varphi_j}{r_{i,j}}, L_{i,j} = \frac{\cos(\psi_i + \varphi_j)}{r_{i,j}^2}, \quad (8)$$

где  $\cos \psi_i = \cos(\bar{r}_{i,j}, \bar{n}_i)$ ;  $\cos \varphi_j = \cos(\bar{r}_{i,j}, \bar{n}_j)$ ;  $r_{i,j}$  — радиус-вектор из точки интегрирования  $j$  на границе области (контура) в точку наблюдения  $i$ ;  $\bar{n}$  — вектор нормали в этих точках.

В зависимости от формулировки задачи для конкретного режима ЭТО система уравнений (7) может быть дополнена условиями соблюдения теоремы Гаусса на границах раздела сред (поверхностей тел), в том числе и на внешней границе области:

$$\oint_{S^{(\sigma)}} \sigma ds = 0, \quad \oint_{S^{(b)}} E_n ds = 0. \quad (9)$$

Математическая модель (5)—(9) учитывает любые граничные условия, которые могут быть использованы для расчетов полей в ковшах с расплавом. В частности, постановку задачи в виде задачи Дирихле (или Неймана) (см. рис. 4) легко преобразовать из внутренней во внешнюю, лишь изменив направление обхода контура на обратное, что соответствует замене векторов нормалей на противоположные. Более того, для задания разнообразных конфигураций граничных поверхностей создана универсальная геометрическая платформа на основе аппроксимации поверхностных контуров дугами окружностей, которая полностью адаптирована к вычислительным операциям интегральных уравнений поля в соответствии с (5)—(9) [13].

Геометрическая платформа представляет собой алгоритм, реализованный в виде программного кода MATLAB, который обеспечивает вычисление полного набора пространственных параметров задачи, фигурирующих в формулах (5)—(9), а именно:

- общее число дуг, аппроксимирующих граничный контур, и число разбиений каждой из этих дуг на элементарные «дуговые конечные элементы» (ДКЭ);
- одномерные массивы координат узловых точек ДКЭ с именами XNODEJ, YNODEJ и точек коллокаций XCOLLJ, YCOLLJ;
- комплексные (векторные) значения внешних нормалей к контуру в каждой точке коллокаций UNITNORM (на рис. 4, б, показано распределение рассчитанных значений нормалей по дугам);
- матрицы RCURVE со значениями радиуса кривизны в точках коллокаций и DELARC, в которой записаны длины ДКЭ для каждой точки согласно сквозной нумерации по контуру.

Размерность всех указанных массивов соответствует общему числу узловых точек. Исходные данные для выполнения расчетов задаются набором координат  $X$ ,  $Y$  для начальной и конечной точек аппроксимирующих дуг контура, а также их радиусов кривизны  $\pm R$  со знаками, которые отражают выпуклость или вогнутость дуги. Эти данные целесообразно представить компактным массивом в виде текстового файла, в который обычно вводят двухмерную матрицу размером  $5 \times M$ , где  $M$  — общее число аппроксимирующих дуг.

Структура двухмерной матрицы такова:

строка 1:  $X_{n1}, \dots, X_{nM}$  — координаты начальных точек дуг (ось  $X$ );  
 строка 2:  $Y_{n1}, \dots, Y_{nM}$  — координаты начальных точек дуг (ось  $Y$ );  
 строка 3:  $X_{k1}, \dots, X_{kM}$  — координаты конечных точек дуг (ось  $X$ );  
 строка 4:  $Y_{k1}, \dots, Y_{kM}$  — координаты конечных точек дуг (ось  $Y$ );  
 строка 5:  $R_{c1}, \dots, R_{cM}$  — радиусы кривизны дуг со знаком.

Данные вводят в формате матрицы MATLAB [19] по столбцам:

`entArray = [ [Xn1; Yn1; Xk1; Yk1; Rc1], ..., [XnM; YnM; XkM; YkM; RcM] ] .`

Для примера приведем листинг (текст) подобного файла. Данные листинга представляют контур в виде фигуры, показанной на рис. 4, б, которая составлена из шести дуг по 60 град с отсчетом от оси абсцисс с разными радиусами кривизны.

*Листинг 1.*

```
1.0000    0.5000   -0.5000   -1.0000   -0.5000    0.5000
0.0       0.8660    0.8660     0.0      -0.8660   -0.8660
0.5000   -0.5000   -1.0000   -0.5000    0.5000    1.0000
0.8660    0.8660    0.0      -0.8660   -0.8660    0.0
1.5000   -1.0000   100.00    2.0000   -1.0000  -100.00
```

Завершающей стадией формирования базы данных для решения системы ИУ является компьютеринг квадратной матрицы коэффициентов системы алгебраических уравнений (СЛАУ), замещающих ИУ. Для этого удобнее всего использовать отдельную процедуру в виде пользовательской функции в среде MATLAB `function [Kernel] = yadro (kP, kM) :`

```
function [Kernel] = yadro (kP, kM)
% kP, kM - номера точек наблюдения
...и интегрирования
global UNITNORM; global COLLOC;
global RCURVE; global DELARC;
COSnX = real (UNITNORM (kP) );
```

```
COSnY = imag(UNITNORM(kP));  
delX = COLLOC(1, kP) - COLLOC(1, kM);  
delY = COLLOC(2, kP) - COLLOC(2, kM);  
RadPM = sqrt(delX^2+delY^2);  
ifkM == kP Kernel = -1/(2*RCURVE(kP));  
else  
COSrX = delX/RadPM;  
COSrY = delY/RadPM;  
COSpsi = COSnX*COSrX + COSnY*COSrY;  
Kernel = COSpsi/RadPM;  
end
```

Правые части системы уравнений (7), представляющие поля первичных источников, задаются и вычисляются автономно. Полностью сформированную СЛАУ можно решать, применяя любой метод обращения матрицы коэффициентов. Однако спецификой рассмотренной задачи при некоторых неблагоприятных сочетаниях пространственных и физических параметров является вероятность получения матрицы коэффициентов с очень плохой обусловленностью и вероятность потери устойчивости решения [20]. В таких случаях прибегают к регуляризации (дополнительным преобразованиям) интегральных операторов вида (8) с помощью соотношений (9) [17]. Однако надежность достижения хорошего результата таким способом подробно не исследована.

Поэтому для решения упомянутой СЛАУ было использовано надежное средство — итерационная процедура, сходимость которой в данном классе задач теоретически обоснована [21]. При этом для ускорения процесса в алгоритм итераций была введена процедура корректировки текущих значений искомой функции по невязке соотношений (8) на каждом шаге итераций [18]. Такой способ решения, апробированный на ряде модельных задач и канонических аналитических решений, показал вполне удовлетворительные результаты по точности, скорости сходимости и по затратам вычислительных ресурсов.

Таким образом, получен инструмент, не связанный с искусственными ограничениями и жесткими рамками типовых и стандартных алгоритмов решения полевых задач, который способен приспособливаться к особенностям конкретной задачи как конструктивного, так и физического характера. Не раскрывая детально основные отличительные особенности и возможности разработанной модели, рассмотрим на ряде примеров ее приложение к некоторым ситуациям, имитирующим процесс ЭТО.

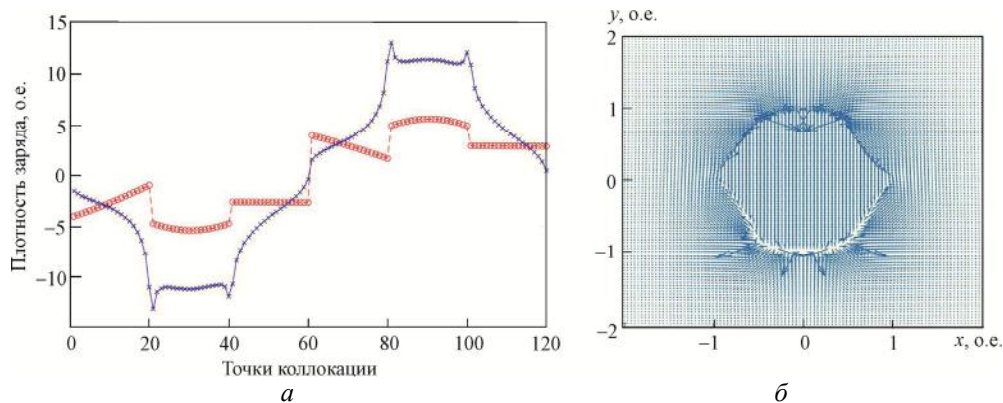


Рис. 5. Распределение плотности индуцированных зарядов (а) и векторов поля (б), созданного этими зарядами

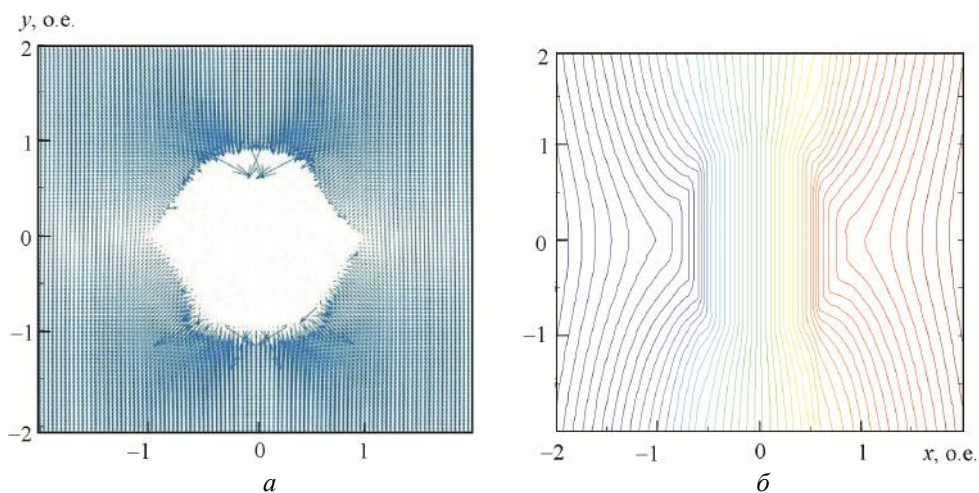


Рис. 6. Распределение векторов (а) результирующего поля и его силовые линии (б)

**Пример 1.** Расчетной областью в  $2D$  является сплошное без включений проводящее тело, контур сечения которого изображен на рис. 4, а. На тело действует однородное возбуждающее поле, направленное вдоль отрицательной полуоси ординат  $y$ . На рис. 5, а, показано распределение вдоль контура нормальной компоненты первичного поля (красный цвет) и распределение плотности индуцированных зарядов (синий цвет), полученное в результате решения первого уравнения системы (7). Векторное поле, созданное этими зарядами — вторичное, действующее противоположно первичному полю, полностью его компенсирует внутри объема тела (рис. 6, а). Соответственно результирующее поле (рис. 6, б) концентрируется в проводящем теле, а эквипотенциали его огибают, так как поверхность проводника сама становится эквипотенциалью (рис. 7).

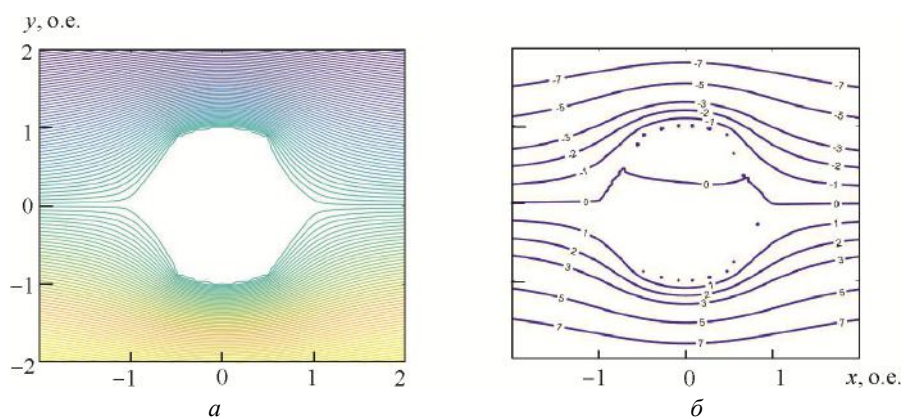


Рис. 7. Распределение эквипотенциалей поля (а) (см. рис. 6, б) и зона низких потенциалов (б)

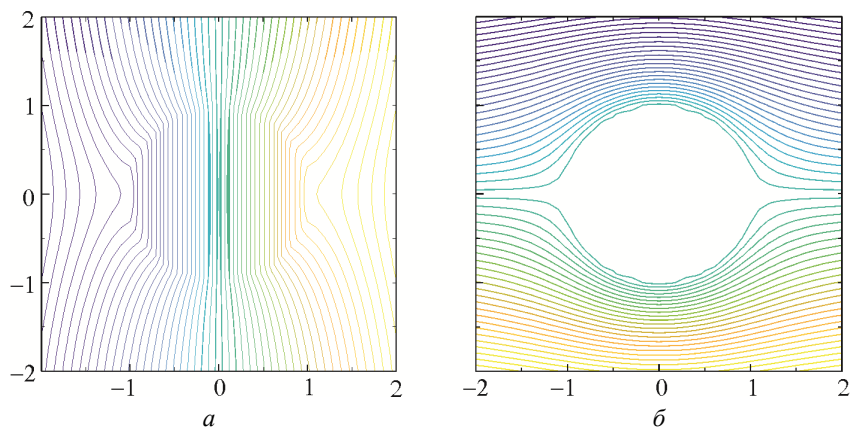


Рис. 8. Поле (а) и эквипотенциали контрольного расчета для круга (б)

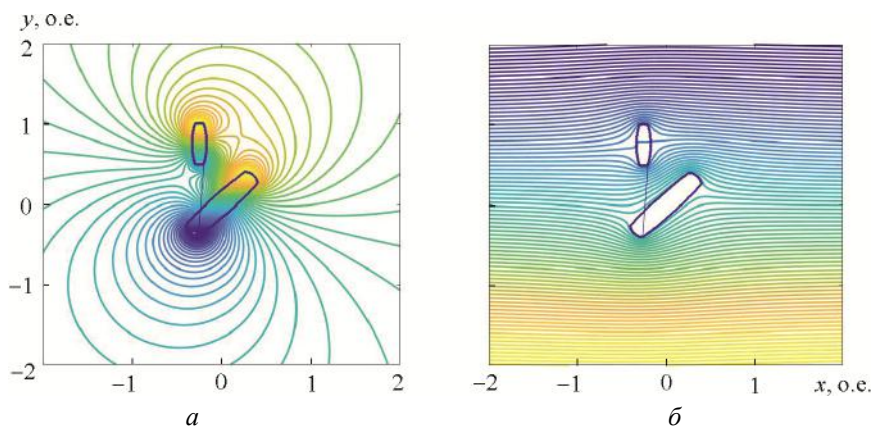


Рис. 9. Эквипотенциали поля при наличии двух включений: а — эквипотенциальные линии индуцированного поля микрочастиц; б — эквипотенциали результирующего поля

Указанные закономерности теоретически обоснованы и для идеальной формы круга известно аналитическое решение [22], с которым в порядке верификации представленной модели были сопоставлены полученные результаты. Как видно из рис. 8, вместо кривых, представленных на рис. 5, а, получены синусоиды, отклонение которых от идеальных проявляется лишь в 15-м знаке.

В таблице приведены результаты исследования сходимости итераций и точности решения в зависимости от числа точек коллокаций на граничном контуре. Время счета во всех случаях не превышало 12 с. Для сравнения приведем вычислительные параметры расчета задачи (см. рис. 2, б): число узлов сетки — 12541; число треугольных КЭ — 24795; число граничных элементов — 1059; время счета — 166 с; относительная погрешность — 0,0010.

Пример 1 соответствует внешней задаче Неймана, но для проблем ЭТО с учетом специфики граничных условий основной является внутренняя задача Дирихле, которая в данной модели автоматически возникает при обратном направлении обхода граничного контура расчетной области.

**Пример 2.** Одной из характерных задач при моделировании процессов ЭТО является исследование влияния включений с отличными от основной матрицы расплава физическими свойствами (проводимостью) на распределение поля и взаимодействия микрочастиц в этом поле. Поэтому рассмотрим задачу расчета распределения вторичных источников по многосвязной (двухсвязной) поверхности двух микрочастиц и созданного ими индуцированного поля, возбужденного однородным полем, ориентированным по оси  $y$  (см. рис. 4).

Проводимость микрочастиц примем в 10 раз больше проводимости матрицы, тогда в первом уравнении системы (7)  $\lambda \approx 1$ . Результаты расчета представлены на рис. 9, где соблюдены относительные пропорции размеров микрочастиц.

Число точек коллокации	Число итераций	Погрешность	Невязка условий (9)	Средне-квадратичное отклонение	Декремент отклонения
103	25	-0,0251	-3,48e-005	0,0102	5,50e-004
136	25	-0,0219	-1,96e-005	0,0219	9,59e-004
214	27	-0,0174	-8,72e-006	0,0174	5,95e-004
272	27	-0,0152	-4,90e-006	0,0152	9,95e-004
544	30	-0,0102	-1,22e-006	0,0102	5,98e-004



Приведенные примеры свидетельствуют о возможности применения предложенной компьютерной модели для численного решения отдельных монофизических задач и поэтапного построения комплексной модели совокупного мультифизического процесса ЭТО с заданными режимными параметрами в соответствии с логикой причинно-следственной связи его этапов.

Таким образом, созданы предпосылки для адаптации компьютерной модели к использованию в автоматизированных системах управления режимами ЭТО расплава в соответствии с алгоритмической парадигмой ИТИС. Однако выполненные исследования на данном этапе не являются исчерпывающими для полноценной реализации ИТИС, но представляют важную основу для воплощения концепции АСУ-РЭТО и ее развития. Предполагается следующее направление дальнейших исследований:

расширение области применения метода ИУ на сферу многомасштабного моделирования взаимосвязанных электромагнитных, тепловых и гидродинамических полей при обработке расплава электрическим током любого типа;

изучение возможности использования теоретического и программного обеспечения МКЭ совместно с методами ИУ.

## **Выводы**

Впервые на основе формул Грина представлена математическая интерпретация множества полевых задач ЭТО расплавов в виде обобщенной системы многосвязных ИУ относительно первичных и вторичных источников со смешанными краевыми и граничными условиями для скалярных потенциалов и их производных.

С использованием ИУ поля обеспечено удовлетворение требований к компьютерным моделям, которые определены функциональными заданиями ИТИС в составе АСУ-РЭТО [1], и практически сняты ограничения, выявленные при численном моделировании характерных режимов ЭТО на основе ДУЧП-МКЭ.

Использование предложенной модели позволило существенно повысить вычислительную эффективность моделирования в результате перехода от ДУЧП, заданных в расчетном объеме (ковша), к ИУ, определенным на граничных поверхностях. Вследствие этого пространственная размерность исходной задачи снижается на порядок, а число искомым неизвестных — почти на два порядка по сравнению с методами, основанными на ДУЧП-МКЭ. В результате значительно сокращается объем требуемых вычислительных ресурсов и на порядок уменьшается время счета при заданном уровне точности.

Результаты сопоставления контрольных расчетов с аналитическими решениями канонических задач подтвердили полноценную верификацию разработанной модели, а также возможность ее гибкой адаптации к различным граничным условиям (Неймана, Дирихле, смешанным). Апробация функциональности модели на имитационных задачах показала ее полную пригодность для использования в качестве компактного и универсального инструмента анализа и проектирования разнообразных устройств, в которых используется электрическое поле и его взаимодействие со средой и отдельными телами.

Представленная математическая модель адекватно отображает физические закономерности распределения потенциалов и напряженности электрического поля, а также плотности токов не только для реальных зарядов (первичных источников), но и для индуцированных (вторичных источников), в том числе локальных характеристик полей вокруг микро-частиц.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Запорожец Ю.М., Иванов А.В., Кондратенко Ю.П., Цуркин В.Н.* Компьютерные модели для управления режимами электротокковой обработки расплавов по заданным критериям качества литых изделий. Ч. I // *Электрон. моделирование*, 2020, **42**, № 3, с. 53—69.
2. *Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н.* Мультифизическое моделирование процессов индукционного нагрева и плавления проводящих заготовок с концентратором магнитного потока // *Электрон. моделирование*, 2015, **37**, № 4, с. 97—107.
3. *Farrokhnejad Mehdi.* Numerical Modeling of Solidification Process and Prediction of Mechanical Properties in Magnesium Alloys // *Electronic Thesis and Dissertation Repository*, 1459. 2013. <https://ir.lib.uwo.ca/etd/1459>.
4. *Vito Logar* Modelling and Simulation of the Electric Arc Furnace Processes. Proceedings of the 9th EUROSIM & the 57th SIMS 1 September 12th-16th, Oulu, Finland, 2016. DOI: 10.3384/ecp171421.
5. *Казак О.В., Семко А.Н.* Моделирование электровихревых полей в металлургических печах // *Мат. мод.*, 2009, № 2 (21), с. 48—53.
6. *Подберезная И.Б.* Применение пространственных интегральных уравнений для расчета квазистационарных электромагнитных полей в электромеханических устройствах // *Изв. ЮФУ. Технические науки*, 2014, с. 250—264.
7. *Тимофеев В.Н., Хацаюк М.Ю.* Аналитический расчет дифференциальных и интегральных электромагнитных характеристик МГД-перемешивателя // *Журнал Сибирского федерального университета. Техника и технологии*, 2017, 10(1), с.74—84. DOI: 10.17516/1999-494X-2017-10-1-74-84.
8. *Ivanov A.V., Tsurkin V.N.* Peculiarities of Distribution of Electromagnetic and Hydrodynamic Fields for Conductive Electric Current Treatment of Melts in Different Modes // *Surf. Eng. Appl. Electrochem*, 2018, 55, p. 53—64.
9. *Щерба А.А., Иванов А.В.* Электротехнические компактные системы обработки расплавов металлов высоковольтными электроразрядными импульсами // *36. наук. праць «Праці Інституту електродинаміки НАН України»*, Київ, Україна, 2013, вип. 36, с. 96—102.

10. Zhang Y.H., Xu Y.Y., Ye C.Y. et al. Relevance of electrical current distribution to the forced flow and grain refinement in solidified Al-Si hypoeutectic alloy // *Scientific Reports*, 2018, 8:3242. DOI: 0.1038/s41598-018-21709-y.
11. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980, 618 с.
12. Виноградов Д.А., Тепляков И.О., Порохонько В.Б. Методика численного моделирования электровихревых течений в плавильных агрегатах с использованием технологии CUDA. <http://www.itp.nsc.ru/conferences/avtfg14/files/15.pdf>
13. Zaporozhets Y., Ivanov A., Kondratenko Y. Geometrical Platform of Big Database Computing for Modeling of Complex Physical Phenomena in Electric Current Treatment of Liquid Metals. <https://doi.org/10.3390/data4040136>
14. Zaporozhets Y.M., Kondratenko Y.P., Kondratenko V.Y. Mathematical Model of Magnetic Field Penetration for Applied Tasks of Electromagnetic Driver and Ferromagnetic Layer Interaction // *Applied Mathematics and Computational Intelligence*, FIM 2015, Vol. 730 *Advances in Intelligent Systems and Computing*, pp. 40–53. DOI:10.1007/978-3-319-75792-6\_4
15. Тихонов А.Н. Самарский А.А. Уравнения математической физики. Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1977, 735 с.
16. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике. М.: Изд-во МГУ, 1993, 352 с.
17. Демирчян К.С., Чечурин В.Л. Машинные расчеты электромагнитных полей. М.: Высш. шк., 1986, 240 с.
18. Запорожец Ю.М. Исследование полей постоянных магнитов и разработка методов их расчета в магнитных системах силовых электротехнических устройств. Диссертация ... канд. техн. наук. Киев: Ин-т электродинамики АН УССР, 1983, 228 с.
19. Ануфриев И.Е., Смирнов А.Б., Смирнова Е.Н. MATLAB 7. БХВ-Петербург, 2005, 1104 с.
20. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979, 288 с.
21. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. Киев: Наук. думка, 1978, 219 с.
22. *Нелинейные цепи и основы теории электромагнитного поля.* / Под ред. П.А. Ионкина. Учеб. для электротехн. вузов. М.: Высш. шк., 1976, 383 с.

Поступила 13.03.20;  
после доработки 09.06.20

## REFERENCES

1. Zaporozhets, Yu.M., Ivanov, A.V., Kondratenko, Yu.P. and Tsurkin, V.M. (2020), “Computer models for mode control of electric current treatment of melts at specified quality criteria for cast products. P.I”, *Elektron. Modelirovanie*, Vol. 42, no. 3, pp. 53-69.
2. Podoltsev, A.D. and Kucheryavaya, I.N. (2015), “Multiphysics modeling of the induction heating and melting of conductive workpieces with magnetic flux concentrator”, *Elektron. modelirovaniye*, Vol. 37, no. 4, pp. 97-107.
3. Farrokhnejad, M. (2013), “Numerical Modeling of Solidification Process and Prediction of Mechanical Properties in Magnesium Alloys”, *Electronic Thesis and Dissertation Repository*, available at: <https://ir.lib.uwo.ca/etd/1459> (accessed August 3, 2020).
4. Vito, L. (2016), “Modelling and Simulation of the Electric Arc Furnace Processes”, *the Proceedings of the 9th EUROSIM & the 57th SIMS I*, September 12-16, Oulu, Finland. DOI: 10.3384/esp171421.

5. Kazak, O.V. and Semko, A. N. (2009), "Simulation of electrovortical fields in metallurgical furnaces", *Mat. Modelir*, Vol. 2, no. 21, pp. 48-53.
6. Podbereznaja, I.B. (2014), "Application of the spatial integrated equations for calculation of quasistationary electromagnetic fields in electromechanical devices", *Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*, Vol. 3, no. 152, pp. 250-264.
7. Timofeev, V.N. and Khatsyuk, M. Yu. (2017), "Analytical Calculation of Differential and Integral Electromagnetic Characteristics of MHD-Stirrer", *Journal of Siberian Federal University. Engineering & Technologies*, Vol. 10, no. 1, pp. 74-84. DOI: 10.17516/1999-494X-2017-10-1-74-84.
8. Ivanov, A.V. and Tsurkin, V.N. (2018), "Peculiarities of Distribution of Electromagnetic and Hydrodynamic Fields for Conductive Electric Current Treatment of Melts in Different Modes", *Surf. Eng. Appl. Electrochem*, Vol. 55, no. 1, pp. 53-64.
9. Shcherba, A.A. and Ivanov, A.V. (2013), "Electrotechnical compact systems for treatment of metals melts with high-voltage electro-discharge pulses", *Pratsi Instytutu Elektrodynamiky NAN Ukrainy* [Works of the institute of electrodynamics of the NAS of Ukraine], Kiev, Ukraine, Iss. 36, pp. 96-102.
10. Zhang, Y.H., Xu, Y.Y. and Ye, C.Y. (2018), "Relevance of electrical current distribution to the forced flow and grain refinement in solidified Al-Si hypoeutectic alloy", *Scientific Reports*, Vol. 8, no. 3242. DOI: 0.1038/s41598-018-21709-y.
11. Roache, P. (1980), *Vychislitel'nayagidrodinamika* [Computational Fluid Dynamics], Mir, Moscow, Russia.
12. Vinogradov, D.A., Teplyakov, I.O. and Porohon'ko, V.B. (2016), *Metodika chislenogo modelirovaniya elektrovihrevykh techenij v plavil'nykh agregatah s ispol'zovaniem tehnologii CUDA* [Methods of numerical simulation of eddy currents in melting units using CUDA technology], available at: <http://www.itp.nsc.ru/conferences/avtfg14/files/15.pdf> (accessed August 3, 2020).
13. Zaporozhets, Y., Ivanov, A. and Kondratenko, Y. (2019), "Geometrical Platform of Big Database Computing for Modeling of Complex Physical Current Treatment of Liquid Metals", *Data*, Vol. 4. DOI: <https://doi.org/10.3390/data4040136>.
14. Zaporozhets, Y.M., Kondratenko, Y.P. and Kondratenko, V.Y. (2018), "Mathematical Model of Magnetic Field Penetration for Applied Tasks of Electromagnetic Driver and Ferromagnetic Layer Interaction", *Applied Mathematics and Computational Intelligence. FIM 2015. Advances in Intelligent Systems and Computing, Springer*, Vol. 730, pp. 40-53. DOI:10.1007/978-3-319-75792-6\_4.
15. Tikhonov, A.N. and Samarsky, A.A. (1977), *Uravneniya matematicheskoy fiziki. Uchebnoeposobiedlyavuzov* [Equations of mathematical physics. Textbook for High Schools], Nauka, Moscow, Russia.
16. Sveshnikov, A.G., Bogolyubov, A.N. and Kravtsov, V. V. (1993), *Lektsii po matematicheskoy fizike* [Lectures in Mathematical Physics], Nauka, Moscow, Russian.
17. Demirchian, K.S. and Chechurin, V.L. (1986), *Mashinnyye raschety elektromagnitnykh poley* [Computer Calculations of Electromagnetic Fields], Vysshaya shkola, Moscow, Russia.
18. Zaporozhet, Yu. M. (1983), "Research of fields of permanent magnets and development of methods for their calculation in magnetic systems of power electrical devices", Abstract of Cand. Sci. (Tech.) dissertation, Institute of Electrodynamics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, Kiev, Ukraine.
19. Anufriev, I.E., Smirnov, L.B. and Smirnova, E.N. (2005), *MATLAB 7*, BHV, St. Petersburg, Russia.
20. Tikhonov, A.N. and Arsenin, V.Y. (1979), *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods of Solving the Incorrect Problem], Nauka, Moscow, Russia.

21. Verlan', A.F. and Sizikov, V.S. (1978), *Metody resheniya integral'nyh uravnenij s programmami dlya EVM* [Methods for the Solution of Integral Equations Using Computer Programs], Naukova Dumka, Ukraine, Kiev.
22. Ionkin, P.A. (1976), *Nelineinye tsepi i osnovy teorii elektromagnitnogo polia* [Nonlinear circuits and the foundations of the theory of the electromagnetic field], Vysshaya shkola, Moscow, Russia.

Received 13.03.20;  
after revision 09.06.20

*Ю.М. Запорожець, А.В. Иванов, Ю. П. Кондратенко, В.М. Цуркін*

КОМП'ЮТЕРНІ МОДЕЛІ ДЛЯ УПРАВЛІННЯ  
РЕЖИМАМИ ЕЛЕКТРОСТРУМОВОЇ ОБРОБКИ РОЗПЛАВІВ  
ЗА ЗАДАНИМИ КРИТЕРІЯМИ ЯКОСТІ ЛИТИХ ВИРОБІВ. Ч. II

Наведено результати комп'ютерного моделювання процесу електрострумової обробки (ЕСО) розплавів, виконаного на основі диференціальних рівнянь методом кінцевих елементів з допомогою програмного пакету COMSOL. За допомогою досвіду чисельних експериментів виявлено недоліки моделей, які обмежують можливість їх використання в алгоритмічних процедурах, що закладені в інформаційну систему ІТИС, описану в першій частині статті. Зазначених недоліків позбавлені розроблені фізично адекватні комп'ютерні моделі, засновані на інтегральному поданні рівнянь процесу ЕСО, які адаптовано до задач управління режимами ЕСО (УРЕСО) розплавів. Надано результати верифікації розробленої моделі за аналітичними зразками. Наведено приклади вирішення завдань, що імітують режими ЕСО. Отримані результати створюють підстави для переходу до реалізації всієї концепції автоматизації системи УРЕСО.

*К л ю ч о в і с л о в а: комп'ютерна модель, диференціальні, інтегральні рівняння, струм, поле, скінченні елементи, ітерація, збіжність, точність.*

*Yu.M. Zaporozhets, A.V. Ivanov, Yu.P. Kondratenko, V.M. Tsurkin*

COMPUTER MODELS FOR MODE CONTROL OF ELECTRIC  
CURRENT TREATMENT OF MELTS AT SPECIFIED QUALITY  
CRITERIA FOR CAST PRODUCTS. P. II

In the second part of the work the authors present some results of computer simulation of the melt electric current treatment (ECT) process performed on the basis of differential equations by the finite element method using COMSOL software package. From experience of numerical experiments shortcomings of such models have been revealed that limit possibility of their use in algorithmic procedures, which are embedded in the integrated three-component information system (ITIS), described in the first part. The physically adequate computer models based on the integral representation of the ECT process equations, developed by the authors, which are adapted to the specific problems of control of melt treatment modes, have been relieved of these drawbacks. The results of verification of the developed models by analytical samples are presented, as well as examples of solving problems that simulate ECT modes. The obtained results create the basis for transition to implementing of the entire concept of automation of ECT modes control system.

*К e y w o r d s: computer model, differential, integral equations, current, field, finite elements, iteration, convergence, accuracy.*

*ЗАПОРОЖЕЦ Юрий Михайлович, канд. техн. наук, доцент, ст. науч. сотр. Института импульсных процессов и технологий НАН Украины. В 1973 г. окончил Николаевский кораблестроительный институт им. Адмирала С.И. Макарова. Область научных исследований — моделирование электромагнитных полей технических объектов; процессы преобразования энергии, энергетическое оборудование и системы; автоматизация и моделирование технологических процессов.*

*ИВАНОВ Артём Владимирович, канд. техн. наук, ст. науч. сотр. Института импульсных процессов и технологий НАН Украины. В 2002 г. окончил Николаевский кораблестроительный институт им. адмирала С.И. Макарова. Область научных исследований — процессы энергетической обработки металлических материалов; моделирование электромагнитных полей технических объектов.*

*КОНДРАТЕНКО Юрий Пантелеевич, д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой интеллектуальных информационных систем Черноморского национального университета им. П. Могилы. В 1976г. окончил Николаевский кораблестроительный институт им. адмирала С.И. Макарова. Область научных исследований — автоматизация, робототехника, датчики и системы управления, интеллектуальные системы поддержки принятия решений, нечеткая логика.*

*ЦУРКИН Владимир Николаевич, канд. физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. Института импульсных процессов и технологий НАН Украины. В 1974 г. окончил Харьковский политехнический институт. Область научных исследований — процессы энергетической обработки металлических материалов.*