
Doi: <https://doi.org/10.15407/emodel.42.05.082>
УДК 004.942; 512.552

С.І. Кліпков, канд. техн. наук,
Приватне акціонерне товариство НЕК «Укренерго»
Україна, 01032, Київ, вул. С.Петлюри, 25,
тел. (044) 2491216, E-mail: klipkov.s@gmail.com

Особливості аналізу фізичної стійкості усталених режимів електричних систем змінного струму

Досліджено математичні властивості нелінійних комплексних рівнянь усталених режимів електричних систем як моноаналітичних функцій багатьох комплексних змінних. Існуючі поняття формальних часткових похідних і ареоларної похідної поліаналітичних функцій засновано на припущенні про незалежність комплексних змінних z і \hat{z} без можливості існування інших комплексних змінних. Тому лінеаризацію системи нелінійних комплексних рівнянь при аналізі їх фізичної стійкості запропоновано виконувати з використанням псевдопохідної комплексної потужності як полігенної функції багатьох змінних, що має нескінченне число значень. Запропоновано можливий підхід до побудови граничної поверхні, що обмежує область фізично стійких режимів. Показано, що розщеплення комплексних рівнянь на два дійсних рівняння некоректно для аналізу фізичної стійкості, оскільки математичні дії з дійсними рівняннями не враховують закони композиції системи комплексних чисел.

К л ю ч о в і с л о в а: усталений режим, моноаналітичні функції багатьох комплексних змінних, псевдопохідна полігенної функції, гіперкомплексні числа, фізична стійкість.

Рівняння усталеного режиму електричних систем (ЕС) змінного струму формуються з використанням символічного (комплексного) методу. Цей метод засновано на зображенні гармонічно змінних в часі напруги і струму комплексними числами і дозволяє при описі кіл змінного струму використовувати формальну аналогію з описом кіл постійного струму. Відомо, що символічний метод не може бути використаний для нелінійної алгебраїчної операції множення гармонічних величин, оскільки добуток синусоїдальної напруги на синусоїдальний струм не можна поставити у відповідність добуток їх комплексних зображень. Спроба поширення символічного методу на нелінійну операцію множення синусоїдальної напруги на синусоїдальний струм привела до появи математичного поняття комплексної потужності, що визначається як добуток комп-

© Кліпков С.І., 2020

лексної напруги на спряжене значення комплексного струму. Таке визначення комплексної потужності призвело до того, що одна з основних функцій, які використовуються для розрахунку і аналізу режимів ЕС (залежність вузлової потужності від напруги в своєму і суміжних вузлах), містить нелінійні комбінації прямих і спряжених комплексів напруги. Так, спряжене значення комплексної потужності в f -му вузлі ЕС обчислюється за рівнянням

$$\hat{S}_f = \left(Y_f U_f - \sum_{l=1}^n Y_{fl} U_l \right) \hat{U}_f, \quad (1)$$

де Y_f — власна комплексна вузлова провідність вузла f , $Y_f = \sum_{l=1}^n Y_{fl} + Y_{f0} = g_f + ib_f$; Y_{fl} — взаємні комплексні провідності віток, що з'єднують вузол f зі суміжними вузлами l , $Y_{fl} = g_{fl} + ib_{fl}$; Y_{f0} — сумарна комплексна провідність шунтів у вузлі f , $Y_{f0} = g_{f0} + ib_{f0}$; n — кількість суміжних вузлів; вираз в дужках є комплексним вузловим струмом I_f . Тут і далі комплексні числа позначено прямими латинськими символами, а дійсні числа — курсивними.

Аналіз усталених режимів ЕС полягає у розв'язку системи рівнянь (1), що описують баланс комплексної потужності у всіх незалежних вузлах, а також у дослідженні характерних її властивостей в умовах, що відповідають отриманому режиму. Як випливає з (1), вузлові комплексні потужності є функціями багатьох комплексних змінних, кількість яких залежить від числа суміжних вузлів.

Варто зазначити, що наразі не існує строгої математичної теорії аналізу означених систем комплексних рівнянь. Головною причиною ситуації, що склалася, є наступне: розглядаючи в (1) комплексну величину і її спряжене значення як залежні між собою змінні, неможливо побудувати комплексну матрицю першого наближення системи рівнянь (1) за звичайними правилами диференціювання, оскільки зазначена залежність не задовольняє умовам диференціювання Коші—Рімана. Такі комплексні функції називають полігенними [1], оскільки для цих функцій (на відміну від моногенних) границя

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (2)$$

залежить від шляху наближення точки z до точки z_0 і має нескінченно багато значень.

Для подолання зазначеної обставини комплексне рівняння (1) зазвичай розщеплюють на два дійсних рівняння, які відображають баланс активної і реактивної потужностей в незалежних вузлах ЕС. Наразі такий підхід використовується для вирішення широкого кола задач управління режимами ЕС. Однак слід зазначити, що при цьому не виконуються закони композиції системи комплексних чисел.

Дійсно, при множенні комплексних чисел як закон композиції базисних елементів використовується нелінійний вираз $li = i$, який відсутній в математичних операціях над дійсними числами [2]. При цьому необхідно зазначити, що перехід від комплексного рівняння до двох дійсних рівнянь є математично коректним, оскільки в процесі поділу комплексного рівняння на два дійсних рівняння цей закон композиції враховується.

Разом з тим, у математичних діях відносно вже отриманих дійсних рівнянь (наприклад операція диференціювання) ніяк не може бути враховано пов'язане з уявною одиницею співвідношення $li = i$. В результаті це зумовлює похибки при математичному моделюванні. В [3] показано, що вплив втрати залежності між базисними елементами комплексних чисел при побудові матриці першого наближення системи нелінійних алгебраїчних рівнянь (1) є притаманним саме для полігенних функцій.

У багатьох випадках необхідність підвищення адекватності математичного моделювання фізичних процесів вимагає розвитку математичного апарату. Прикладом може бути поняття поліаналітичної функції, що є одним із самих важливих для застосування узагальненням поняття аналітичної функції комплексної змінної [4]. Поліаналітичні функції зародилися в математичній теорії пружності. Через вісім десятиліть після відкриття її основних рівнянь було виявлено, що ефективним засобом для вирішення задач плоскої теорії пружності можуть стати функції виду $\varphi_1(z) + \hat{z}\varphi_2(z)$, де φ_1 і φ_2 — аналітичні функції, а $\hat{z} = x - iy$ — спряжене значення z .

Функції зазначеного виду згодом стали називати біаналітичними. Розширенням класу біаналітичних функцій є клас поліаналітичних функцій, які є поліномами відносно змінного \hat{z} з коефіцієнтами, що являють собою аналітичні функції змінного z :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} h_k(z) \hat{z}^k, \quad (3)$$

де всі h_k — аналітичні функції [5]. Як випливає з виразу (3), поліаналітичні функції, по суті, є функціями однієї комплексної змінної z , оскільки z і \hat{z} взаємозалежні. Проте, якщо z і \hat{z} розглядати як незалежні змінні (за такого припущення введено поняття формальних часткових похідних

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

(3) можна розглядати як функції двох комплексних змінних.

Порівнюючи вирази (1) і (3), бачимо, що комплексна функція вузлової потужності є окремим випадком біаналітичної функції, у якої $h_0 = 0$, а $h_1 = I_f$. Проте h_1 є аналітичною функцією багатьох змінних. Отже, дотримуючись прийнятої термінології, комплексну функцію (1) можна розглядати як моноаналітичну функцію багатьох комплексних змінних. Про подібні функції в [5] зазначено наступне: «Поліаналітичні функції тісно пов'язані з теорією функцій багатьох комплексних змінних. Інформація про поведінку функції $F(z, w)$ двох незалежних комплексних змінних на «неаналітичній площині» $w = \hat{z}$ або на іншій неаналітичній поверхні дозволяє судити про глобальні властивості цієї функції, про її поведінку поза зазначеною поверхнею. Кожен факт, встановлений для поліаналітичної функції, призводить до деякого твердження про псевдополіноми виду $\sum_{k=0}^m h_k(z) w^k$. Вивчення поліаналітичних функцій можна розглядати як перший крок до загальної (і поки ще не існуючої) теорії функцій багатьох комплексних змінних на неаналітичних поверхнях».

Таким чином, можна вважати, що в найближчій галузі досліджень — теорії поліаналітичних функцій — зроблено тільки перший крок до загальної теорії функцій багатьох комплексних змінних на неаналітичній площині $w = \hat{z}$. Проблема полягає в тому, що для двох і більше комплексних змінних розглядати $z_1, z_2, \dots, z_m, \hat{z}_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_m$, як незалежні змінні, і диференціювати відповідні функції з використанням формальних часткових похідних є некоректним.

Аналіз комплексної матриці першого наближення. Розглянемо підхід до дослідження граничних умов фізичної стійкості [6] системи нелінійних комплексних рівнянь (моноаналітичних функцій багатьох змінних) (1) на основі обчислення комплексної матриці першого наближення з використанням поняття псевдопохідної полігенної функції. При цьому граничними умовами будемо вважати зміну знаку визначника даної комплексної матриці, а псевдопохідною полігенною функції — безліч значень границі (2) [3,7].

Для полігенної функції псевдопохідна визначається так:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{d\hat{z}}{dz} = \frac{|dz| e^{-i\alpha}}{|dz| e^{i\alpha}} = e^{-i2\alpha}, \quad (4)$$

де α — кут комплексного диференціалу dz . Із (4) випливає, що псевдопохідна має нескінченне число значень, які відповідають нескінченному числу значень кута α .

Отже, відмінною рисою пропонованого підходу є використання для аналізу моноаналітичних функцій багатьох змінних не формальних часткових похідних і не ареоларної похідної, а псевдопохідної, в рамках якої z і \hat{z} розглядаються як залежні змінні. Як зазначено вище, вже для функцій двох комплексних змінних такий підхід призводить до інших результатів.

Диференціювання нелінійних комплексних рівнянь (1) з використанням поняття псевдопохідної дозволяє побудувати матрицю першого наближення $\mathbf{J} = \|\mathbf{J}_{ff}\|$ відповідної системи рівнянь без поділу кожного із

рівнянь на два дійсних рівняння. З огляду на те, що $\frac{d\hat{U}_f}{dU_f} = e^{-i2\alpha_f}$, де

$\alpha_f = \arctan \frac{dU_f''}{dU_f'}$ — кут комплексного диференціала напруги $dU_f = dU_f' + idU_f''$, комплексні діагональні елементи даної матриці можуть бути обчислені за формулою

$$\mathbf{J}_{ff} = \frac{\partial \hat{S}_f}{\partial U_f} = \mathbf{Y}_f \hat{U}_f + \mathbf{I}_f e^{-i2\alpha_f}.$$

Недіагональні елементи визначаються за допомогою звичайного диференціювання, оскільки функція \hat{S}_f не містить спряжених значень комплексної напруги суміжних вузлів:

$$\mathbf{J}_{ff} = \frac{\partial \hat{S}_f}{\partial U_l} = -\mathbf{Y}_{fl} \hat{U}_f.$$

Як приклад розглянемо тривузлову ЕС [7], схема якої містить два незалежних вузла, 1 і 2, а вузол 3 є балансуєчим (рис. 1). Для такої схеми комплексна матриця першого наближення виглядає так:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \hat{U}_1 + \mathbf{I}_1 e^{-i2\alpha_1} & -\mathbf{Y}_{12} \hat{U}_1 \\ -\mathbf{Y}_{12} \hat{U}_2 & \mathbf{Y}_2 \hat{U}_2 + \mathbf{I}_2 e^{-i2\alpha_2} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

а її визначник обчислюється за формулою

$$\Delta = \mathbf{Y}_{12} \mathbf{Y}_{23} \hat{U}_1 \hat{U}_2 + \mathbf{Y}_1 \hat{U}_1 \mathbf{I}_2 e^{-i2\alpha_2} + \mathbf{Y}_2 \hat{U}_2 \mathbf{I}_1 e^{-i2\alpha_1} + \mathbf{I}_1 \mathbf{I}_2 e^{-i2\alpha_1} e^{-i2\alpha_2}. \quad (6)$$

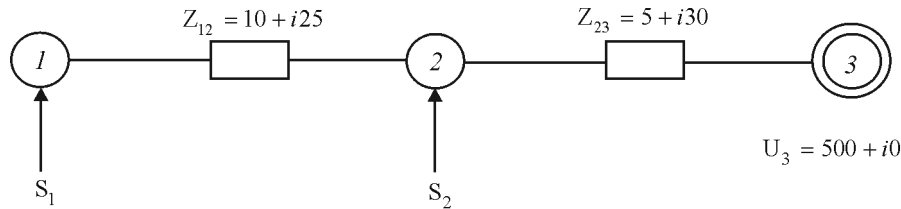


Рис. 1. Розрахункова схема тривузлової ЕС

Значення діагональних елементів матриці (5) і, як наслідок, значення її визначника (6) залежать не тільки від параметрів розрахункової схеми і характеристик поточного усталеного режиму, а і від кутів α_1 , α_2 диференціалів комплексної напруги dU_1 , dU_2 , тобто не тільки від досліджуваного усталеного режиму, але і від наявних шляхів його зміни. Якщо для аналізу поведінки знаку визначника звичайної матриці Якобі при лінеаризації дійсних рівнянь потрібно дослідження серії усталених режимів, то знак визначника комплексної матриці (6) може змінюватися внаслідок варіації кутів α_1 , α_2 в одному і тому ж режимі. Отже, в такому випадку аналіз порушення умов фізичної стійкості режимів полягає у виявленні такого поєднання кутів α_1 і α_2 , при якому визначник Δ дорівнює нулю. Якщо зазначеної комбінації кутів не виявляється, то відповідний режим можна розглядати як фізично стійкий.

З рівняння $\Delta = 0$ випливає співвідношення

$$e^{-i2\alpha_1} = \frac{A + Be^{-i2\alpha_2}}{C + De^{-i2\alpha_2}}, \quad (7)$$

де

$$A = -Y_{12}Y_{23}\hat{U}_1\hat{U}_2; \quad B = -Y_1\hat{U}_1I_2; \quad C = Y_2\hat{U}_2I_1; \quad D = I_1I_2.$$

Кут α_2 можна визначити при умові рівності одиниці модуля комплексного числа в правій частині співвідношення (7):

$$\alpha_2 = 0,5 \left[\beta - \arcsin \left(\frac{-A^2 - B^2 + C^2 + D^2}{E} \right) \right], \quad (8)$$

де $A, B, C, D, \varphi_A, \varphi_B, \varphi_C, \varphi_D$ — модулі і кути комплексних чисел A, B, C, D ;

$$E = 2\sqrt{A^2B^2 + C^2D^2 - 2ABCD \cos(\varphi_A - \varphi_B - \varphi_C + \varphi_D)};$$

$$\beta = \arctg \frac{AB \cos (\varphi_A - \varphi_B) - CD \cos (\varphi_C - \varphi_D)}{AB \sin (\varphi_A - \varphi_B) - CD \sin (\varphi_C - \varphi_D)}.$$

Кут α_1 дорівнює $-\gamma/2$, де γ — кут комплексного числа в правій частині (7). Слід зауважити, що в залежності від значення \arcsin в досліджуваній точці чотиривимірного простору залежних змінних U_1, U_2, ϕ_1, ϕ_2 , які є модулями і кутами комплексної напруги U_1, U_2 , можна отримати два значення кутів α_1, α_2 , при яких визначник (6) стає рівним нулю, або одне (граничний випадок), або жодного. Граничний випадок, що описує границю області фізично стійких усталених режимів ЕС, для яких не існує значень α_1, α_2 таких, що $\Delta = 0$, відповідає значенням ± 1 під знаком \arcsin . При цьому відбувається біфуркація значень кута α_2 , а отже, і значень кута α_1 .

Із (8) випливає, що рівнянням відповідної граничної поверхні є співвідношення, яке пов'язує між собою граничні значення залежних змінних, тобто модулі і кути комплексної напруги в незалежних вузлах розрахункової схеми U_1, U_2, ϕ_1, ϕ_2 :

$$-A^2 - B^2 + C^2 + D^2 + 2\sqrt{A^2B^2 + C^2D^2 - 2ABCD \cos (\varphi_A - \varphi_B - \varphi_C + \varphi_D)} = 0. \quad (9)$$

За допомогою рівняння (9) можна отримати перетин області фізично стійких усталених режимів ЕС площиною заданих кутів ϕ_1, ϕ_2 . Для цього необхідно розв'язати рівняння (9) відносно однієї змінної, наприклад U_1 , і побудувати залежність U_1 від U_2 при постійних значеннях ϕ_1, ϕ_2 .

Необхідно зазначити, що на відміну від системи комплексних квадратних рівнянь, які не містять спряжених значень комплексних невідомих, система комплексних рівнянь (1) в залежності від конкретних значень вихідних даних може не мати комплексних рішень. Оскільки в цьому випадку не існує жодної комбінації комплексних чисел, яка б задовольняла рівняння даної системи, ітераційні процеси, що використовуються для вирішення цієї нелінійної задачі в полі комплексних чисел, не сходяться. Для забезпечення збіжності обчислювальних процедур, якщо відсутні комплексні рішення, можна збільшити область пошуку рішень, використовуючи гіперкомплексні числові системи рангу чотири над полем дійсних чисел [8,9]. Такий підхід є аналогічним для ситуації,

коли при відсутності дійсних рішень звичайного квадратного рівняння з дійсними коефіцієнтами, можна отримати комплексні рішення, використовуючи поле комплексних чисел як алгебраїчне розширення поля дійсних чисел.

У роботі [7] для схеми, зображеної на рис. 1, розглянуто гіперкомплексні рішення в точці $S_1 = 7000 + i3000$, $S_2 = 3000 + i1000$, яка розташована за межами області існування усталених режимів ЕС при різних значеннях параметра системи гіперкомплексних чисел k . Зокрема, при $k = 1$, що відповідає кватерніонному рішенню, гіперкомплексні значення напруги в даній точці наступні:

$$U_1^1 = U_{д1} + U_{y1}^{(1)}j = 216,36 + i543,32 + (201,76 - i406,57)j,$$

$$U_2^1 = U_{д2} + U_{y2}^{(1)}j = 302,87 + i342,31 + (147,57 - i245,61)j.$$

Зауважимо, що розглядаються математичні аспекти аналізу рівнянь усталених режимів ЕС для дослідження їх фізичної стійкості без прив'язки режимів, що аналізуються, до конкретних експлуатаційних умов.

Як відомо [7], при $\Delta = 0$ існує взаємозв'язок між кутами α_f комплексної матриці першого наближення і гіперкомплексними рішеннями рівнянь усталеного режиму ЕС, який має вигляд

$$\alpha_f = k\alpha_{дf} + \alpha_{yf}, \quad (10)$$

де α_f — кути диференціалів комплексної вузлової напруги U_f комплексної матриці першого наближення; k — параметр системи гіперкомплексних чисел; $\alpha_{дf}$ та α_{yf} — кути дійсних комплексних складових гіперкомплексного рішення $U_{дf}$ та уявних комплексних складових гіперкомплексного рішення U_{yf} .

У випадку, що розглядається,

$$k = 1, \alpha_{д1} = \phi_1 = \arctan \frac{543,32}{216,36} = 68,29^\circ, \alpha_{y1} = \arctan \left(-\frac{406,57}{201,76} \right) = -63,61^\circ,$$

$$\alpha_1 = 4,68^\circ, \alpha_{д2} = \phi_2 = \arctan \frac{342,31}{302,87} = 48,5^\circ,$$

$$\alpha_{y2} = \arctan \left(-\frac{245,61}{147,57} \right) = -59,0^\circ, \alpha_2 = -10,5^\circ.$$

Отримані кути α_1 , α_2 , можуть бути також обчислені за формулами (7), (8). Так, для усталеного режиму, що відповідає дійсним комплексним складовим гіперкомплексного рішення $U_{д1}$, $U_{д2}$ (точка введення режиму в область існування по кватерніонному рішення), дійсні величини, які входять в зазначені формули, мають такі значення: $A = 326,41$, $B = 107,87$, $C = 258,6$, $D = 40,37$, $\varphi_A = -85,52^\circ$, $\varphi_B = 73,58^\circ$, $\varphi_C = -77,4^\circ$, $\varphi_D = 75,15^\circ$. В результаті отримуємо значення кутів: $\beta = -108,16^\circ$, $\alpha_2^{(1)} = -10,5^\circ$, $\alpha_2^{(2)} = -7,65^\circ$, $\alpha_1^{(1)} = 4,68^\circ$, $\alpha_1^{(2)} = 3,79^\circ$.

Порівнюючи отримані результати, бачимо, що знайдені з використанням різних підходів значення кутів співпадають: $\alpha_1 = \alpha_1^{(1)} = 4,68^\circ$, $\alpha_2 = \alpha_2^{(1)} = -10,5^\circ$. Отримані кути $\alpha_1^{(2)} = 3,79^\circ$ і $\alpha_2^{(2)} = -7,65^\circ$ відповідають гіперкомплексному рішенням іншої системи гіперкомплексних чисел, параметр якої обчислюється за формулою [10]

$$k = \frac{\alpha_2^{(2)} - \alpha_1^{(2)} + \theta}{\alpha_{д2} - \alpha_{д1}}, \quad (11)$$

де θ — кут комплексної величини

$$-\frac{J_{12}}{J_{11}} = \frac{Y_{12} \hat{U}_1}{Y_{11} \hat{U}_1 + I_1 e^{-i2\alpha_1^{(2)}}}.$$

Підставивши в (11) необхідні величини, отримуємо $k = 0,75927$, а за допомогою (10) визначимо значення кутів $\alpha_{y1}^{(2)} = -48,05^\circ$, $\alpha_{y2}^{(2)} = -44,48^\circ$ уявних комплексних складових $U_{y1}^{(2)}$, $U_{y2}^{(2)}$ створюваного гіперкомплексного рішення. Модулі комплексних величин $U_{y1}^{(2)}$, $U_{y2}^{(2)}$ визначимо за допомогою рівняння $J_{11}U_{y1}^{(2)} + J_{12}U_{y2}^{(2)} = 0$ (один з модулів задано). Сформоване таким чином гіперкомплексне рішення дозволяє знайти відповідні координати точок за межами області існування усталених режимів. Одна з таких можливих точок (для $U_{y2}^{(2)} = 100$) відповідає значенням комплексних потужностей $S_1 = 4663,7 + i1681,96$, $S_2 = 2251,015 + i669,68$.

Розв'язок рівняння граничної поверхні. В точці області існування усталених режимів, що розглядається, є два напрямки зміни режиму, які відповідають умові $\Delta = 0$. Тому зазначена точка не є граничною віднос-

но фізичної стійкості усталених режимів. Як зазначено вище, гранична поверхня фізично стійких режимів описується рівнянням (9). Отже, для визначення режимних характеристик, які відповідають граничній поверхні, необхідно розв'язати рівняння (9) відносно однієї з залежних змінних, наприклад U_1 .

Розв'язок рівняння (9) в загальному вигляді — досить громіздка процедура. Тому використаємо для цього чисельний ітераційний метод Ньютона. При цьому небаланс обчислюється за формулою

$$\delta(U_1) = -A^2 - B^2 + C^2 + D^2 + 2\sqrt{A^2B^2 + C^2D^2 - 2ABCD \cos(\varphi_{Y_{23}} - \varphi_{Y_2})} = 0, \quad (12)$$

оскільки $\varphi_A - \varphi_B - \varphi_C + \varphi_D = \varphi_{Y_{23}} - \varphi_{Y_2}$, а прирощення до модуля напруги

U_1 на кожній ітерації має вигляд $\Delta U_1 = -\frac{\delta(U_1)}{v}$, де $v = \frac{d\delta(U_1)}{dU_1}$ — похідна.

Для визначення похідної продиференціюємо (12) за U_1 :

$$v = \frac{d\delta(U_1)}{dU_1} = -2A \frac{dA}{dU_1} - 2B \frac{dB}{dU_1} + 2C \frac{dC}{dU_1} + 2D \frac{dD}{dU_1} + \frac{1}{\sqrt{A^2B^2 + C^2D^2 - 2ABCD \cos(\varphi_{Y_{23}} - \varphi_{Y_2})}} \times \left[2A \frac{dA}{dU_1} B^2 + 2A^2 B \frac{dB}{dU_1} + 2C \frac{dC}{dU_1} D^2 + 2C^2 D \frac{dD}{dU_1} - 2 \cos(\varphi_{Y_{23}} - \varphi_{Y_2}) \left(\frac{dA}{dU_1} BCD + \frac{dB}{dU_1} ACD + \frac{dC}{dU_1} ABD + \frac{dD}{dU_1} ABC \right) \right]. \quad (13)$$

Введені в (13) похідні визначаються так:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dU_1} &= Y_{12} Y_{23} U_2, & \frac{dB}{dU_1} &= Y_1 \left(I_2 + U_1 \frac{dI_2}{dU_1} \right), \\ \frac{dC}{dU_1} &= Y_2 U_2 \frac{dI_1}{dU_1}, & \frac{dD}{dU_1} &= I_1 \frac{dI_2}{dU_1} + I_2 \frac{dI_1}{dU_1}, \\ \frac{dI_1}{dU_1} &= Y_{12} \frac{[U_1 - U_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)]}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2 - 2U_1 U_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)}}, \end{aligned}$$

$$\frac{dI_2}{dU_1} = \frac{1}{\sqrt{I_{21}^2 + I_{23}^2 + 2I_{21}I_{23} \cos(\phi_{21} - \phi_{23})}} \times$$

$$\times \left(I_{21} \frac{dI_{21}}{dU_1} + I_{23} \cos(\phi_{21} - \phi_{23}) \frac{dI_{21}}{dU_1} - I_{21}I_{23} \sin(\phi_{21} - \phi_{23}) \frac{d\phi_{21}}{dU_1} \right),$$

$$\frac{d\phi_{21}}{dU_1} = \frac{1}{1+x^2} \frac{\sin\phi_1(U_1 \cos\phi_1 - U_2 \cos\phi_2) - \cos\phi_1(U_1 \sin\phi_1 - U_2 \sin\phi_2)}{(U_1 \cos\phi_1 - U_2 \cos\phi_2)^2},$$

$$x = \arctan \frac{U_1 \sin\phi_1 - U_2 \sin\phi_2}{U_1 \cos\phi_1 - U_2 \cos\phi_2}.$$

Тут I_{21} , ϕ_{21} — модуль і кут струму у вітці 2 — 1, а I_{23} , ϕ_{23} — модуль і кут струму у вітці 2 — 3 (див. рис. 1).

В результаті розв'язку рівняння (12) методом Ньютона при залежних змінних $U_2 = \sqrt{302,87^2 + 342,31^2} = 457,07$, $\phi_1 = 68,29^\circ$, $\phi_2 = 48,5^\circ$ і початковому наближенні $U_1 = \sqrt{216,36^2 + 543,32^2} = 584,81$ отримано величину модуля напруги $U_1 = 586,15$ в одній з точок граничної поверхні фізичної стійкості усталених режимів ЕС. Тепер за формулами (7), (8) можна визначити потрібні кути в цій точці, а саме $\beta = -107,85^\circ$, $\alpha_2^{(1)} = \alpha_2^{(2)} = -8,93^\circ$, $\alpha_1^{(1)} = \alpha_1^{(2)} = 4,11^\circ$, а із співвідношення (11) — значення параметра гіперкомплексної системи $k = 0,86616$.

Зауважимо, що при тих же значеннях U_2 , ϕ_1 , ϕ_2 і початковому наближенні $U_1 = 650,0$ в результаті розв'язку рівняння (12) отримаємо інші значення, а саме

$$U_1 = 654,82, \beta = -81,55^\circ, \alpha_2^{(1)} = \alpha_2^{(2)} = 4,23^\circ,$$

$$\alpha_1^{(1)} = \alpha_1^{(2)} = -1,1^\circ, k = -0,03069,$$

які визначають ще одну точку даної граничної поверхні.

Область фізично стійких усталених режимів ЕС. Розглянутий підхід до розв'язку рівняння (12) методом Ньютона дозволяє досліджувати область фізично стійких усталених режимів ЕС у чотиривимірному просторі залежних змінних U_1 , U_2 , ϕ_1 , ϕ_2 за допомогою побудови перетинів зазначеної області площиною ϕ_1 , ϕ_2 (рис. 2). Для цього необхідно задати ряд значень модуля комплексної напруги U_2 . Кожному з цих значень у

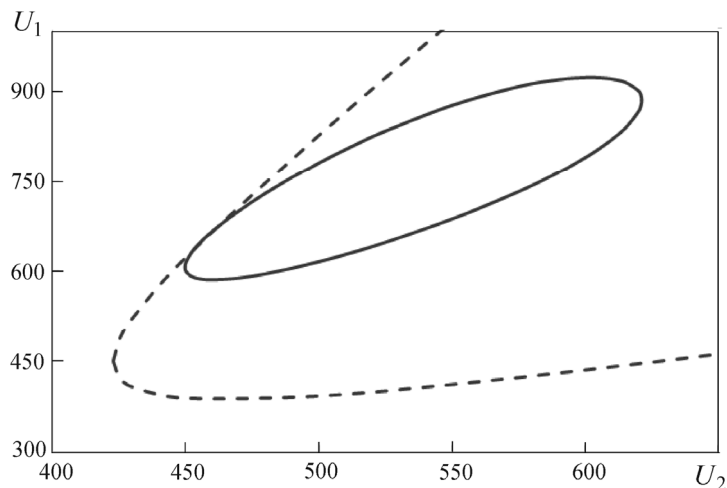


Рис. 2. Перетин області фізичної стійкості усталених режимів ЕС площиною ϕ_1, ϕ_2

зоні, що розглядається, відповідають два значення модуля комплексної напруги U_1 , які обчислюються в процесі розв'язування рівняння (12).

В результаті зазначених обчислень для розглянутого прикладу отримаємо замкнену криву, показану суцільною лінією на рис. 2. В області, обмеженій суцільною лінією, не існує напрямків зміни режиму (кутів α_1, α_2), при якому $\Delta = 0$. Отже, ця область є областю фізично стійких режимів ЕС, а сама крива лежить на поверхні граничних за умовою фізичної стійкості усталених режимів ЕС.

Зазначимо також, що дана область фізично стійких усталених режимів ЕС відповідає області фізично стійких режимів на основі матриці першого наближення, отриманої за допомогою лінеаризації гармонічних рівнянь усталеного режиму ЕС. В [10,11] показано, що при переході від гармонічного аналізу граничних режимів ЕС до комплексного зміни знаку однієї або всіх гармонічних складових визначника гармонічної матриці першого наближення відповідає зміна знаку визначника комплексної матриці першого наближення. При цьому фази диференціалів миттєвої напруги і кути диференціалів комплексної напруги, що визначають умови граничності режимів, співпадають. Це свідчить про математичну коректність переходу від гармонічних рівнянь усталеного режиму ЕС до комплексних рівнянь.

Водночас, дослідження граничних режимів на основі загальноприйнятої матриці Якобі дійсних рівнянь усталеного режиму, що відповідають комплексним рівнянням, за вказаних вище причин (втрата залеж-

ності між базисними одиницями комплексних чисел) приводить до результатів, що відрізняються від результатів аналізу граничних режимів з використанням комплексної матриці першого наближення. На рис. 2 штриховою лінією (для цього ж прикладу) показано криву, що відповідає перетину площиною ϕ_1, ϕ_2 поверхні рівного нулю якобіана матриці першого наближення дійсних рівнянь усталеного режиму ЕС, отриманих розщепленням комплексних рівнянь (1). Як відомо, зазначена крива лежить на дискримінантній поверхні, що обмежує область існування режимів в просторі незалежних змінних, якими є потужності в незалежних вузлах ЕС.

Із рис. 2 видно, що умови фізичної стійкості, отримані в результаті аналізу комплексних рівнянь з використанням поняття псевдопохідної полігенної функції і в результаті аналізу відповідних дійсних рівнянь традиційним методом, не співпадають. Слід зазначити, що замкнена крива, якою обмежена область фізично стійких режимів, повністю лежить в області, обмеженій штриховою лінією, і не перетинає її ні в одній точці. Зокрема, для розглянутого прикладу ($U_2 = 457,07$, $\phi_1 = 68,29^\circ$, $\phi_2 = 48,5^\circ$) дві точки штрихової кривої відповідають значенням $U_1 = 386,05$ і $U_1 = 654,88$.

Висновки

Комплексні рівняння усталених режимів ЕС можуть бути кваліфіковані як моноаналітичні функції багатьох комплексних змінних, у яких аналітичною функцією багатьох змінних є комплексний вузловий струм.

Для аналізу комплексних рівнянь усталених режимів ЕС не можуть бути використані формальні часткові похідні, а також ареоларна похідна, оскільки при цьому U_f і \hat{U}_f розглядаються як незалежні змінні, що не відповідає суті досліджуваного фізичного процесу і при наявності інших комплексних змінних зумовлює похибку математичного моделювання. Це також відноситься до розщеплення комплексного рівняння усталеного режиму на два дійсних.

Розглядаючи комплексні величини U_f і \hat{U}_f як залежні змінні в складі моноаналітичної функції багатьох змінних, доцільно використовувати для аналізу відповідної системи рівнянь балансу комплексних потужностей поняття псевдопохідної полігенної функції, що має нескінченне число значень.

Аналіз матриці першого наближення комплексних рівнянь усталених режимів ЕС з використанням псевдопохідної полігенної функції співвідноситься з аналізом рішень параметричної системи гіперкомплексних рів-

нянь в частині визначення напрямку зміни режиму, що відповідає визначнику комплексної матриці першого наближення, який дорівнює нулю.

Умови фізичної стійкості, отримані на основі аналізу матриці першого наближення комплексних рівнянь усталеного режиму з використанням псевдопохідної полігенної функції, не співпадають з умовами фізичної стійкості, отриманими в результаті аналізу якобіана відповідних дійсних рівнянь, що обумовлено втратою законів композиції системи комплексних чисел при переході від комплексних рівнянь до дійсних.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Kasner E. A complete characterization of the derivative of a polygenic function. // Proc. of the National Academy of Sciences, 1936, Vol. 22, pp. 172—177.
2. Петров А.М. Кватернионное представление вихревых движений. М.: Компания Спутник+, 2006, 33 с.
3. Клипков С.И. Кватернионный анализ режимов электрических систем // Электрон. моделирование, 2019, **41**, № 6, с. 15—35.
4. Федоровский К.Ю. Аппроксимация полианалитическими многочленами. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016, 197 с.
5. Балк М.Б. Полианалитические функции и их обобщения // Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, 1991, **85**, с. 187—246.
6. Sekene Y., Yokojata A. Multisolutions for load flow problem of power System and their physical stability // Proc. 7th Power Syst. Comput. Conf. Lausanne, 1981, pp. 819—826.
7. Клипков С.И. Использование гиперкомплексных числовых систем для математического моделирования предельных режимов электрических систем // Реєстрація, зберігання і обробка даних, 2012, **14**, № 4, с. 11—23.
8. Клипков С.И. О новом подходе к построению гиперкомплексных числовых систем ранга два над полем комплексных чисел // Украинский математический журнал, 2011, **63**, №1, с. 130—139.
9. Сильков М.В., Бояринова Ю.Е., Калиновский Я.А. Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения. Киев: Инфодрук, 2010, 388 с.
10. Клипков С.И. Использование гармонического подхода к анализу предельных режимов электрических систем переменного тока // Электрические сети и системы, 2010, № 6, с. 71—82.
11. Клипков С.И. Особенности гармонического анализа предельных режимов электрических систем // Электрон. моделирование, 2015, **37**, №1, с. 113—127.

Отримано 28.07.2020

REFERENCES

1. Kasner, E. (1936), “A complete characterization of the derivative of a polygenic function”, *the Proceedings of the National Academy of Sciences*, Vol. 22, pp. 172-177.
2. Petrov A.M. (2006), *Kvaternionnoye predstavleniye vikhrevykh dvizheniy* [Quaternion representation of vortex motions, Kompaniya Sputnik+, Moscow, Russia.
3. Klipkov S.I. (2019), “Quaternion Analysis of Electrical System Modes”, *Elektronnoye modelirovaniye*, Vol. 41, no. 6, pp. 15-35.
4. Fedorovskiy, K.Yu. (2016), *Approksimatsiya polianaliticheskimi mnogochlenami* [Approximation by polyanalytic polynomials], IPM im. M.V. Keldysha, Moscow, Russia.

5. Balk M.B. (1991), "Polyanalytic functions and their generalizations", *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. probl. Matem. Fundam. Napravleniya*, Vol. 85, pp. 187-246.
6. Sekene, Y. and Yokojava, A. (1981), "Multisolutions for load flow problem of power System and their physical stability", *the Proceeding of 7th Power Syst. Comput. Conf*, Lausanne, pp. 819-826.
7. Klipkov, S.I. (2012), "The use of hypercomplex numerical systems for mathematical modeling of the limiting modes of electrical systems", *Reestratsiya, zberigannya i obrob. danykh*, Vol. 14, no. 4, pp. 11-23.
8. Klipkov, S.I. (2011), "On a new approach to the construction of hypercomplex number systems of rank two over the field of complex numbers", *Ukr. Mat. Zhurn*, Vol. 63, no. 1, pp. 130-139.
9. Sin'kov, M.V., Boyarinova, Yu.Ye. and Kalinovskiy, Ya.A. (2010), *Konechnomernyye giperkompleksnyye chislovyye sistemy. Osnovy teorii. Primeneniya* [Finite-dimensional hypercomplex number systems. Foundations of the theory. Applications], Infodruk, Kiev, Ukraine.
10. Klipkov, S.I. (2010), "Using a harmonic approach to the analysis of the limit modes of AC electrical systems", *Elektricheskiye seti & sistemy*, no. 6, pp. 71-82.
11. Klipkov, S.I. (2015), "Features of harmonic analysis of limiting modes of electrical systems", *Elektronnoye modelirovaniye*, Vol. 37, no. 1, pp. 113-127.

Received 28.07.2020

S.I. Klipkov

FEATURES OF THE ANALYSIS OF PHYSICAL STABILITY OF STEADY-STATE MODES OF AC ELECTRICAL SYSTEMS

The mathematical properties of nonlinear complex equations of steady-state modes of electrical systems as monoanalytic functions of many variables are investigated. The existing concepts of formal partial derivatives and the areolar derivative of polyanalytic functions are based on the assumption that complex variables are independent z and \bar{z} , at the same time, do not allow the existence of other complex variables. Therefore, the linearization of the system of nonlinear complex equations for the analysis of their physical stability is proposed to be performed using the pseudo-derivative of complex power, as a polygenic function of many variables with an infinite number of values. A possible approach to the construction of the limiting surface that bounds the region of physically stable modes is proposed. It is shown that splitting complex equations into two real equations is incorrect for the analysis of physical stability, since mathematical operations with real equations do not take into account the composition laws of a system of complex numbers.

К е у в о р д s: steady state, monoanalytical functions of many complex variables, pseudo-derivative of polygenic function, hypercomplex numbers, physical stability.

КЛІПКОВ Сергій Іванович, канд. техн. наук, провід. інженер Приватного акціонерного товариства енергетичної компанії «Укренерго». В 1974 г. закінчив Київський політехнічний ін-т. Область наукових досліджень — електроенергетика, гіперкомплексні числові системи.