

Аналитическое описание кривых деформирования материалов

Д. Г. Вербилло

На основе уравнения типа Аррениуса предложен логарифмический закон для кривых деформирования материалов при растяжении, сжатии, изгибе и кручении. Введено понятие логарифмической деформации $\epsilon = \ln(\epsilon)$. После перестройки в координатах с логарифмической деформацией по оси абсцисс кривые деформирования становятся прямолинейными с тангенсом угла наклона, равным логарифмическому коэффициенту деформационного упрочнения. Также предложен закон, содержащий arch , который лучше описывает начальные стадии кривых деформирования. Аппроксимирована серия кривых деформирования материалов с использованием программ Excel и Origin, что показало пригодность предложенных законов для применения.

Ключевые слова: *растяжение, сжатие, изгиб, кручение, напряжение, деформация, аналитическое описание кривых деформирования.*

Введение

Аналитическому описанию кривых деформирования посвящено множество публикаций и предложен ряд аналитических выражений, среди которых наиболее часто применяются следующие [1, 2]:

$$S = S_0 + K_1 e^m; S = K_2 e^n; S = S_n + h e^{1/2}, \quad (1)$$

где S_0 , K_1 , K_2 , m и n — постоянные; S_n и h — постоянные на данной стадии деформационного упрочнения; S и e — истинные напряжение и деформация.

Отметим также экспоненциальное уравнение Воце [3]

$$S = B - A \exp(-ne), \quad (2)$$

где B , A и n — постоянные.

В случае, если кривая деформирования хорошо описывается уравнением (2), при перестройке ее в координатах dS/de — S она становится прямолинейной на основной (третьей) стадии деформационного упрочнения. Это легко показать, если взять производную dS/de из уравнения (2):

$$dS/de = An \cdot \exp(-ne),$$

$$\text{откуда } \exp(-ne) = \frac{dS/de}{An}.$$

Теперь подставим экспоненту в выражение (2):

$$S = B - A \frac{dS/de}{An},$$

$$\text{откуда окончательно получаем } dS/de = -nS + nB.$$

Это и есть уравнение прямой линии для координат dS/de — S с отрицательным коэффициентом прямой пропорциональности $-n$. Наиболее

© Д. Г. Вербилло, 2012

известными работами в этом направлении являются труды У. Кокса, М. Цехетбауэра и Ю. Н. Подрезова [4—6].

Хорошо известно уравнение типа Аррениуса для скорости пластической деформации [7]

$$\dot{\varepsilon} = NAbv_0 \exp\left(-\frac{\Delta g - \tau_{\text{эф}}V^*}{kT}\right), \quad (3)$$

где N — число дислокаций в единице объема; A — “пробегаемая” ими площадь; b — модуль вектора Бюргера; v_0 — частотная характеристика, зависящая от природы препятствия и способа его преодоления; Δg — изменение свободной энергии, обусловленное локальными атомными смещениями при активации (эквивалентно свободной энергии Гельмгольца). Эффективное напряжение, зависящее от температуры, $\tau_{\text{эф}} = \tau - \tau_{\mu}$, где τ — приложенное напряжение; τ_{μ} — атермическая компонента напряжения. Активационный объем $V^* = lb\Delta R$. Здесь l — длина отрезка дислокации; ΔR — активационное расстояние. Соответственно $\tau_{\text{эф}}V^*$ — работа, выполненная эффективным напряжением. При равном нулю эффективном напряжении величина Δg равна полной энергии, необходимой для преодоления препятствия, то есть свободной энергии активации препятствия.

Зегер в работах [8, 9], используя уравнение (3), получил выражение для напряжения в функции от температуры и скорости деформации:

$$\tau = \tau_{\mu} + \frac{U_0 - T[\Delta S + k \ln(NAbv_0 / \dot{\varepsilon})]}{V^*}. \quad (4)$$

Здесь свободная энергия Гельмгольца Δg записана согласно выражению термодинамики $\Delta g = U_0 - T\Delta S$.

В работе [10] нами преобразовано уравнение Аррениуса (3) так же, как это делал Зегер (4), только в правой части уравнения фигурирует не скорость деформации, а сама деформация. В результате нами предложено аналитическое описание кривых деформирования при кручении в виде логарифмического закона:

$$\tau = \tau_{\text{п}} + k \ln \frac{\gamma}{\gamma_{\text{п}}}, \quad (5)$$

где $\tau_{\text{п}}$ — предел пропорциональности; $\gamma_{\text{п}}$ — деформация, соответствующая пределу пропорциональности; k — логарифмический коэффициент деформационного упрочнения, в который входит активационный объем.

Этот закон был использован для значительного упрощения определения истинных напряжений течения при кручении.

Логарифмический закон деформирования материалов

Введем понятие логарифмической деформации сдвига (гамма большая) $\Gamma = \ln \gamma$. Тогда (5) переписется в виде

$$\tau = \tau_{\text{п}} - k \ln \gamma_{\text{п}} + k\Gamma = A + k\Gamma, \quad (6)$$

где A — коэффициент, зависящий от предела пропорциональности материала.

На рис. 1 приведена кривая кручения Стали 20 в различных координатах. Логарифмический закон очень хорошо описывает кривую

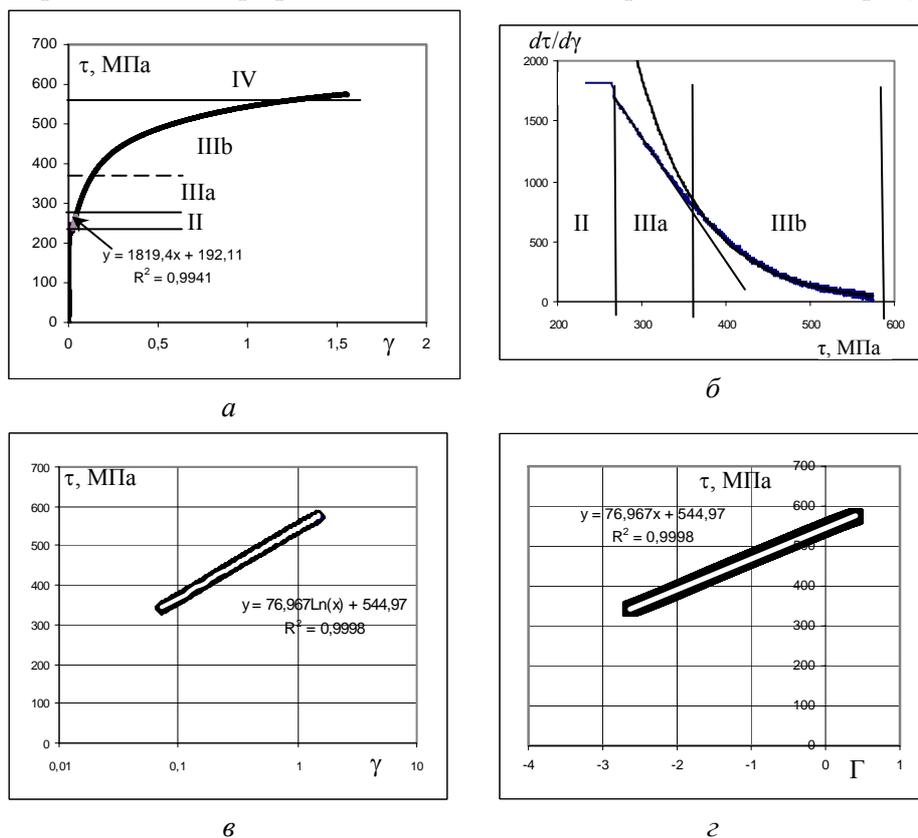


Рис. 1. Кривая кручения Стали 20 в обычных координатах (а), в координатах $d\tau/d\gamma$ — τ (б), с логарифмической шкалой абсцисс (в) и с логарифмической деформацией сдвига Γ по шкале абсцисс (г).

деформирования начиная от предела текучести [10], если она представлена в обычных координатах τ — γ (рис. 1, а). Более точную оценку совпадения аппроксимации с реальной кривой можно получить, используя методику, предложенную в работах [4—6]. На рис. 1, б эта же кривая изображена в координатах $d\tau/d\gamma$ — τ под номером 1.

На рис. 1, а, б выделены стадии на кривой деформирования согласно работам [4—6]. Стадия II — линейная стадия, при которой наблюдается прямая пропорциональная зависимость между напряжением и деформацией $\tau = 1819,4\gamma + 192,11$ (рис. 1, а). Соответственно на рис. 1, б — это горизонталь $\tau = 1819,4$. Стадию III можно разделить на 2 участка: IIIа — прямая пропорциональная зависимость между производной $d\tau/d\gamma$ и напряжением τ . Это полностью соответствует уравнению Воце (2).

На главном участке IIIб наблюдается полное совпадение кривой деформирования с аппроксимацией логарифмической функцией. Эта функция $\tau = 76,967\ln\gamma + 544,97$ показана на рис. 1, в, г белой прямой. Производная $d\tau/d\gamma$ будет равна $76,967/\gamma$. Производная от аппроксимации показана на рис. 1, б под номером 2. Стадия IV — заключительная, при которой производная стремится к 0.

Таким образом, логарифмическая функция полностью подходит для аппроксимации начиная с 360 МПа и до окончания кривой. После удаления начальных стадий и перестройки в координатах, как показано на рис. 1, в, з, кривые деформирования становятся прямолинейными. При этом тангенс угла наклона кривой на рис. 1, з равен логарифмическому коэффициенту деформационного упрочнения k . Обратим внимание, что до достижения деформацией γ значения 1, то есть 100%, логарифмическая деформация Γ — величина отрицательная, поскольку логарифм числа, меньшего единицы, отрицателен. При $\gamma = 1$ значение Γ становится равным 0 и кривая пересекает ось ординат в точке, равной коэффициенту A . Для устранения сложностей, связанных с отрицательным значением Γ , для ее расчета деформацию сдвига можно брать не в долях, а в процентах (рис. 2).

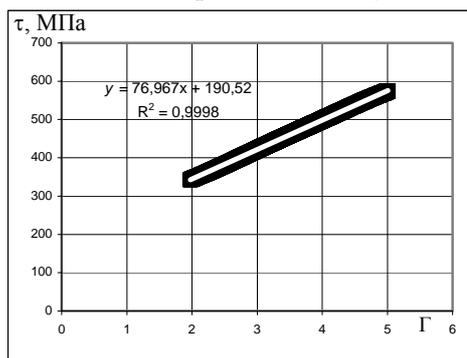


Рис. 2. Кривая кручения Стали 20. Значения $\Gamma = \ln \gamma$ рассчитаны для γ , выраженной в процентах.

Отметим, что для всех трех вариантов отображения кривой (рис. 1 и 2) логарифмический коэффициент деформационного упрочнения $k = 76,967$ остается неизменным. Применение этого закона для растяжения, сжатия и

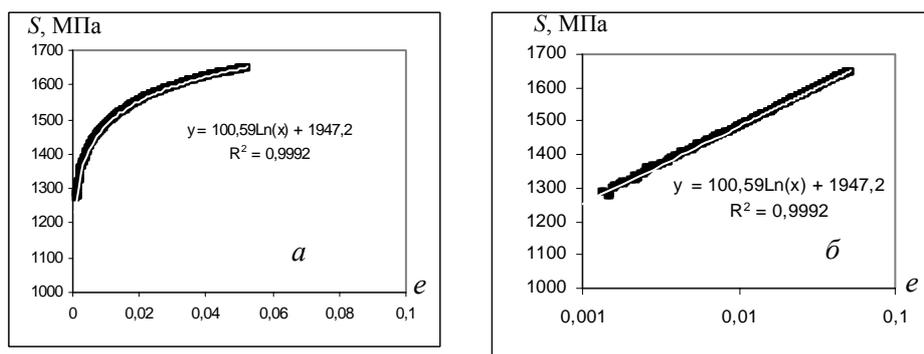


Рис. 3. Кривая сжатия сплава титана в истинных координатах (а) и с логарифмической шкалой абсцисс (б).

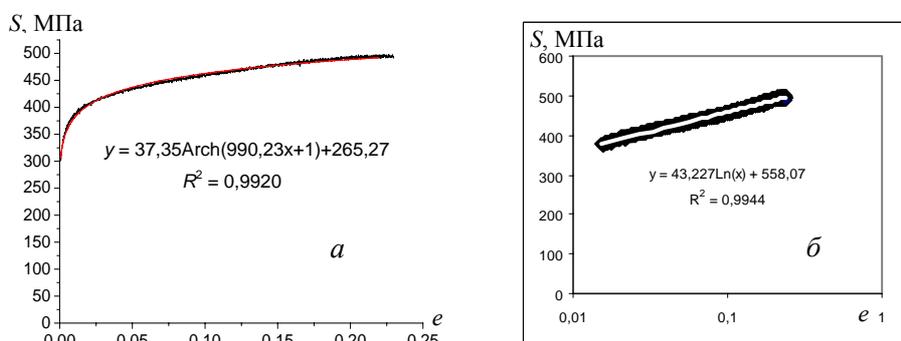


Рис. 4. Кривая растяжения титана в истинных координатах (а) и с логарифмической шкалой абсцисс (б).

изгиба также дало очень хорошие результаты (рис. 3, 4). Аналогично можно ввести понятие логарифмической линейной деформации $\epsilon = \ln e$. Тогда для нормальных напряжений логарифмическое уравнение запишется в виде

$$S = A + k\epsilon. \quad (7)$$

Как и для кручения, для сжатия и растяжения после перестройки в логарифмических координатах (рис. 3, 4) кривые деформирования становятся прямолинейными. При этом коэффициент перед логарифмом является логарифмическим коэффициентом деформационного упрочнения k .

Закон деформирования материалов, содержащий обратный гиперболический косинус

Уравнение Аррениуса (3) и, соответственно, логарифмические уравнения (6) и (7) при малых деформациях и напряжениях, то есть на начальной стадии кривой пластического течения, являются весьма грубым приближением. Мильман Ю. В. и Трефилов В. И. предложили [11] рассматривать скорость деформации в направлении действия внешних сил как результат разности прямых (в направлении действия силы) и обратных термически активируемых скачков дислокации, то есть

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= v \left\{ \exp\left(-\frac{\Delta g - \sigma_{\text{эф}} V^*}{kT}\right) - \exp\left(-\frac{\Delta g + \sigma_{\text{эф}} V^*}{kT}\right) \right\} = \\ &= 2v \exp\left(-\frac{\Delta g}{kT}\right) \cdot \text{sh}\left(\frac{\sigma_{\text{эф}} V^*}{kT}\right). \end{aligned}$$

Скорость пластической деформации, вызванной движением дислокаций, до достижения предела пропорциональности равна 0. Для данной фиксированной температуры испытаний эффективное напряжение будет равно разности приложенного напряжения и напряжения предела пропорциональности, то есть сопротивления движению дислокаций от далеко- и ближнедействующих полей напряжений $\sigma_{\text{эф}} = \sigma - \sigma_{\text{п}}$.

Поскольку множители перед гиперболическим синусом при неизменной температуре постоянные, получаем

$$\dot{\epsilon} = B \cdot \text{sh}\left(\frac{(\sigma - \sigma_{\text{п}}) V^*}{kT}\right). \quad (8)$$

Обычно механические испытания проводят с постоянной скоростью движения штока и начиная с предела пропорциональности скорость деформирования образца $\dot{\epsilon}$ в действительности все время изменяется. Поэтому невозможно рассчитать конкретную скорость деформирования при любом виде испытаний, будь то растяжение, сжатие, кручение и т. д. Изменяется при этом не только скорость деформирования, но и скорость нарастания нагрузки (напряжения). Все же довольно часто испытания проводятся с постоянной скоростью нарастания нагрузки (напряжения). Ранее для этого применяли метод наливания воды с постоянной скоростью в резервуар, через рычаги и тяги соединенный с образцом. С появлением

новых компьютеризированных испытательных машин это можно сделать программно — машина сама отслеживает постоянный прирост нагрузки (напряжения) при испытаниях. На такой сервогидравлической испытательной машине INSTRON 8500 нами проведены эксперименты, описанные в работе [12]. Отметим, что вид кривых деформирования при разных способах нарастания нагрузки практически не изменится. Только не удастся зарегистрировать падение нагрузки при шейкообразовании при растяжении в случае использования машины в режиме с постоянным приростом нагрузки.

Когда нагрузка (напряжение) при испытаниях нарастает линейно [12], тогда производная напряжения от времени — константа, и можно разделить левую и правую часть уравнения (5) на $\dot{\sigma}$:

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\sigma}} = \frac{d\varepsilon}{dt} / \frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\varepsilon}{d\sigma} = C = \frac{B}{\dot{\sigma}} \operatorname{sh} \left(\frac{(\sigma - \sigma_{\Pi}) V^*}{kT} \right) \Rightarrow d\varepsilon = C_0 \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{(\sigma - \sigma_{\Pi}) V^*}{kT} \right) d\sigma. \quad (9)$$

Здесь переменная C — податливость материала (с англ. compliance).

Обозначим постоянную $\frac{B}{\dot{\sigma}} = \operatorname{const} = C_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0}$. Отметим, что на пределе

пропорциональности $\sigma = \sigma_{\Pi} \Rightarrow C = \frac{d\varepsilon}{d\sigma} = 0$, что и наблюдается на

реальных кривых пластического деформирования (с удаленным упругим участком). После интегрирования получаем

$$\varepsilon = \frac{kT}{V^*} C_0 \operatorname{ch} \left(\frac{(\sigma - \sigma_{\Pi}) V^*}{kT} \right) - \frac{kT}{V^*} C_0. \quad (10)$$

Обозначим множитель $\frac{kT}{V^*}$ как σ_0 , тогда константа интегрирования

$\frac{kT}{V^*} C_0$ будет равна $\sigma_0 C_0 = \sigma_0 \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} = \varepsilon_0$, и решим это уравнение

относительно косинуса гиперболического:

$$\frac{\varepsilon + \varepsilon_0}{\varepsilon_0} = \operatorname{ch} \left(\frac{(\sigma - \sigma_{\Pi})}{\sigma_0} \right). \quad (11)$$

Теперь возьмем arch :

$$\frac{(\sigma - \sigma_{\Pi})}{\sigma_0} = \operatorname{arch} \left(\frac{\varepsilon + \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \right) \Rightarrow \sigma = \sigma_0 \operatorname{arch} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + 1 \right) + \sigma_{\Pi}. \quad (12)$$

Таким образом, из (8) получили закон деформирования материалов, содержащий обратный гиперболический косинус. Апробация данного закона приведена на рис. 4, а. Аппроксимация выполнена в программе Origin. На графике видно, что данный закон очень хорошо подходит для аппроксимации всей кривой, включая начальную стадию. Это объясняется тем, что arch в начальной точке резко устремляется вверх, как и кривые деформирования с удаленной упругой частью.

Поскольку $\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, то при больших значениях аргумента $\operatorname{arch} x \rightarrow \ln(2x)$, что подтверждает закономерность использования для описания кривых деформирования также и логарифмического закона. Как

уже было показано, логарифмический закон хорошо подходит для аппроксимации кривых с удаленной начальной стадией (рис. 4, б).

Заключение

Несомненно, предложенное описание кривых деформирования материалов основывается в большой мере на аппроксимационных зависимостях и практически не затрагивает физические аспекты формирования кривых упрочнения. Наиболее важным в данной работе является то, что логарифмический закон упрочнения практически напрямую следует из уравнения Аррениуса, что подразумевает его термоактивационную природу. В современных структурных моделях деформационного упрочнения, в создании которых активное участие принимают ученые украинской школы, показано, что между структурными перестройками и параметрами упрочнения может быть установлена однозначная связь. Такая связь может быть получена из приведенных соотношений, что будет являться предметом дальнейших исследований в данном направлении.

1. *Христенко И. Н., Томенко Ю. С.* Аналитическое описание кривых упрочнения // Проблемы прочности. — 1981. — № 10. — С. 51—55.
2. *Трефилов В. И., Моисеев В. Ф., Печковский Э. П. и др.* Деформационное упрочнение и разрушение поликристаллических металлов // Под ред. В. И. Трефилова. — К.: Наук. думка, 1989. — 256 с.
3. *Voce E.* The relationship between stress and strain for homogeneous deformation // J. Inst. Metals. — 1948. — **74**, No. 7. — P. 537—562.
4. *Kocks U. F., Mecking H.* Physics and phenomenology of strain hardening: FCC case // Progress in Materials Science. — 2003. — No. 48. — P. 171—273.
5. *Zehetbauer M. J., Love T. C. and Valiev R. Z.* Strengthening process of metals by severe plastic deformation // Investigation and Appl. of Severe Plastic Deformation. — Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands. — 2000. — P. 81—91.
6. *Писаренко В. Д., Подрезов Ю. Н., Назаренко В. А., Вербило Д. Г. и др.* Особенности структурообразования и механические свойства деформированного титана // Физика и техника высоких давлений. — 2007. — **17**, № 2. — С. 110—118.
7. *Борисенко В. А.* Твердость и прочность тугоплавких металлов при высоких температурах. — К.: Наук. думка, 1984. — 212 с.
8. *Зегер А.* Возникновение дефектов решетки при движении дислокаций и их влияние на температурную зависимость деформирующих напряжений ГЦК кристаллов // Проблемы современной физики // Дислокации в кристаллах. — 1957. — № 9. — С. 145—168.
9. *Зегер А.* Механизмы скольжения и упрочнения в ГЦК и ГПУ металлах // Дислокации и механические свойства кристаллов. — М.: ИЛ, 1960. — С. 179—268.
10. *Вербило Д. Г.* Особенности расчета истинных кривых нагружения при кручении // Проблемы прочности. — 2011. — № 3. — С. 110—122.
11. *Мильман Ю. В., Трефилов В. И.* О физической природе температурной зависимости предела текучести // Механизм разрушения металлов. — К.: Наук. думка, 1966. — С. 59—76.
12. *Viola G., Verbylo D., Orlovskaya N., Reece M.* Effect of composition on rate dependence of ferroelastic/ ferroelectric switching in perovskite ceramics // Mater. Science and Technology. — 2009. — **25**, No. 11. — P. 1312—1315(4).

Аналітичний опис кривих деформування матеріалів

Д. Г. Вербило

На підставі рівняння типу Арреніуса запропонований логарифмічний закон для кривих деформування матеріалів при розтязі, стиску, згині та крученні. Введено поняття логарифмічної деформації $\epsilon = \ln(\epsilon)$. Після перебудови в координатах з логарифмічною деформацією по осі абсцис криві деформування стають прямолінійними з тангенсом кута нахилу, рівним логарифмічному коефіцієнту деформаційного зміцнення. Також запропоновано закон, що містить arch , який краще описує початкові стадії кривих деформування. Апроксимовано серію кривих деформування матеріалів з використанням програм Excel і Origin, що показало придатність запропонованих законів для застосування.

Ключові слова: розтяг, стиск, згин, крутіння, напруга, деформація, аналітичний опис кривих деформування.

Analytical description of material deformation curves

D. G. Verbier

Based on an Arrhenius-type equation proposed by the logarithmic law for the curves of deformation of materials under tension, compression, bending and torsion. The notion of logarithmic strain $\epsilon = \ln(\epsilon)$. After adjustment in the coordinates with a logarithmic strain along the horizontal axis, the deformation curves are rectilinear with a slope equal to the logarithmic strain hardening coefficient. It also proposed a law that contains the arch, which better describes the initial stages of deformation curves. Approximated by a series of curves of deformation of materials with the use of Excel and Origin, which has shown the suitability of the proposed laws for use.

Keywords: tension, compression, bending, torsion, tension, strain, deformation curves of an analytic description.

