ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

УДК 338:658:[519.7]

Кочура Є.В.

УПРАВЛІННЯ ЗАМКНУТИМИ ЕКОНОМІЧНИМИ СИСТЕМАМИ МЕТОДОМ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Розглянуті та обгрунтовані питання використання динамічної задачі динамічного програмування для вирішення завдань управління підприємствами. Процес управління розглянуто як багатошаговий процес прийняття рішень, що зробило можливим застосувати принципи динамічного програмування.

The issues of using a dynamic task of dynamic programming for solving the problems of business management have been analysed and substantiated. The process of management is regarded as a multistage decision process which makes it possible to use the principle of dynamic programming.

Метод динамічного програмування призначений для вирішення широкого кола задач оптимального управління в економіці. Він особливо ефективний при вирішенні багатоетапних процесів управління з використанням обмежених ресурсів. Такі процеси характеризуються послідовністю операцій, у яких результати попередніх операцій можна використовувати для управління ходом наступних. Операції бувають детерміновані, у яких результат цілком визначений, і стохастичні, у яких результат не визначений, але може бути передвіщений за допомогою деякого розподілу ймовірностей наслідку.

На відміну від методу розрахунку замкнутих систем управління, розробленого на основі перетворення Лапласа, метод управління за допомогою ДП придатний і для нелінійних систем, тобто для нього характерний єдиний підхід до застосування.

Припускаючи, що керований процес розбито на стадії, очевидно, що управління зі зворотним зв'язком доцільно розглядати як багатостадійний процес прийняття рішень. У багатостадійних процесах прийняття рішень вектор стану і число стадій, що залишилися, еквівалентні сигналу помилки в системі управління зі зворотним зв'язком. Рішення, прийняте на деякій стадії, залежить тільки від стану системи на цій стадії і числа стадій, що залишилися. Рішення, що має бути прийняте, взагалі не залежить від передісторії процесу. Іншими словами, наступний хід процесу залежить тільки від поточного стану і числа стадій, що залишилися.

Принцип оптимальності передбачає, що який би не був початковий стан, послідовність керуючих впливів, прийнятих для стадій процесу, що залишилися, вибирається таким чином, щоб оптимізувати весь процес у цілому.

Відомим кібернетиком Арисом [1] принцип оптимальності сформульований так: "Якщо Ви не використовуєте щонайкраще те, що ви маєте, то ніколи не розпорядитеся щонайкраще тим, що Ви могли б мати надалі".

Нехай задане рівняння виробничо-економічного об'єкту:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \qquad (1)$$

і функціонал (критерій):

$$I = \int_0^I \Phi(x,u)dt\,, \qquad (2)$$

де x, u – вектори.

Функціональне рівняння для поетапного управління має вигляд [2]

$$I_I^* = \min_u[\Phi(x,u) + \Phi(x,u)\frac{\partial I^*}{\partial x}]. \qquad (3)$$

У багатокрокових задачах оптимізації управління час приймає дискретні значення t_0, t_{1+1}, t_{2+2}, …, t_k, …, t_N... Стан системи в момент часу t_k задається вектором $u_{k+1}=u_k(u_k,x_k)$ і $t=t_0$, t_{0+1}, t_{0+2}, …, t_k, …, t_{N-1}...

Передбачається, що фіксовано початковий стан x_0. Потрібно знайти таку послідовність управляючих векторів

$$\{u_{t_0}, u_{t_0+1}, u_{t_0+2}, \dots, u_{t_k}, \dots, u_{t_N-1}\},$$

що належать до функціональної області управління

$$u_t \in U,$$

яке мінімізує цільову функцію

$$I_0^*(x_0) = 0\,; \qquad (4)$$
$$I_{N+1}^*(x_0) = \min\{\Delta\Phi(x,u) + I_N^*[x_0 + \Delta\Phi(x,u)]\}.$$

Тут початкова функція замінюється функцією

$$I(\{u_n\}) = \Delta\sum_{n=0}^{N}\Phi(x_n,u_n), \qquad (5)$$

де N – число інтервалів, на які розбивається проміжок (0, T);
$\Delta = T/N$.

Зробимо заміну

$$x_{k+1} = \Delta\varphi(x_k,u_k)\ ,\ x_0 = x(0)\,,\ x_k = x(k\cdot\Delta), u(k\cdot\Delta)\,.$$

Вважаючи $\qquad I_N^*(x_0) = \min I(\{u_k\})\,,$

заміняємо задачу мінімізації рекурентними співвідношеннями (4).

В економіці часто виникають задачі управління, спрямовані на підтримку мінімальних значень максимального відхилення від деякого заданого (оптимального) значення. Таке управління можливе в торгівлі при управлінні ціною продукції, відмінної від заданої, чи при управлінні якістю продукції, що випускається тощо [2,3].

Ця задача порівняно легко вирішується методом ДП. Критерій максимального значення $|x(t)|$ записується так:

$$I(u)=\max_{0\le t\le T}|x(t)|, \quad (6)$$

при рівнянні ПЕО $$\ddot{x}+l\dot{x}+x=u(t) \quad (7)$$

і $$x(0)=x_0=m_1,\ \dot{x}(0)=\dot{x}_0=m_2,\ |u(t)|\le 1 \quad (8)$$

Якщо задане значення $x(0)=0$, то в очевидь $|x(t)-0|=|x(t)|$.

Задачу представимо в дискретній формі

$$I_N(u_k)=\max_{1\le k\le N}|x_k| \quad (10)$$

$$x_{k+1}=z_k+\Delta(u_k-bz_k-x_k), \quad (11)$$

$$x_N=m_1,\ z_N=m_2,$$

$$\Phi_N(m_1,m_2)=\min_{u_k} I_N(u_k)=\min_{u_k}\max_{1\le k\le N}|x_k|. \quad (12)$$

Вираз $\Phi_N(m_1,m_2)$ – мінімум максимуму абсолютного значення відхилення x_k по N стадіях процесу, що залишилися, за умови, що початкове значення характеризується m_1 і m_2 і використовується оптимальна стратегія:

Можна також записати

$$\Phi_N(m_1,m_2)=\min_{u_k}\max_{1\le k\le N}|x_k|, \quad (13)$$

$$\Phi_N(m_1,m_2)=\min_{u_k}\max\left[|x_k|,\Phi_{N-1}(u_k)\right], \quad (14)$$

$$\Phi_N(m_1,m_2)=\max\left[|x_N|,\min_{u_k} I_{N-1}(u_k)\right], \quad (15)$$

$$\Phi_N(m_1,m_2)=\max\left[|m_1|,\Phi_{N-1}(m_1+m_2\Delta t,+m_2)+(u_N-b_N m_2+m_1)\Delta\right], \quad (16)$$

$$\Phi_N(m_1,m_2)=|m_1|. \quad (17)$$

У той же час в економічному управлінні існує значний клас задач, у яких поводження об'єкта на інтервалі [0, T] не представляє інтересу, але важливий результат, що досягається в кінцевий момент часу T. Цей результат залежить тільки від кінцевого стану $x_N(T)$ і визначається критерієм $\Phi_N[x_N(T)]$. Задачі такого типу називаються задачами термінального управління, чи управління за кінцевим значенням. Іноді їх у варіаційному численні називають задачами Майера [3,4]. У виробничо-економічній практиці такого типу задачі зустрічаються при пуско-налагоджувальних роботах, здавальних іспитах та ін.

Нехай є деяка функція $R(x(T))$, значення якої за час T (у кінцевій точці) ми бажаємо максимізувати

$$I(u) = R(x(T)) \to \max . \tag{18}$$

Якщо диференціальне рівняння виробничо-економічного об'єкту

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u), \tag{19}$$

і задається обмеження, що функція $I(u)$ не може бути як завгодно велика

$$\int_0^T S(x,u)dt = S_1 , \tag{20}$$

де S_1 – постійна величина. Крім того, початкова умова має вид

$$x(0) = x_0 = m . \tag{21}$$

За допомогою множника λ Лагранжа обмеження можна внести в критерій управління, тоді

$$I(u) = R(x(T)) + \lambda \int_0^T S(x,u)dt . \tag{22}$$

Представимо рівняння економічного об'єкту у вигляді кінцевих різностей

$$x_{k+1} - x_k = f(x_k, x_k)\Delta, \ k = 0, 1, 2, ..., N ; \tag{23}$$

$$\sum_{k=1}^{N} S(x_k, x_k)\Delta = S_1 . \tag{24}$$

З огляду на прийнятий відлік часу одержимо:

$$x_N = m . \tag{25}$$

Тоді $\Phi_N(m)$ – максимальне значення $I_N(u_k)$ для N стадій, що залишилися, у припущенні, що початковий стан характеризується m і використовується оптимальна стратегія. Це значить, що

$$\Phi_N(m) = \max I_N(u_k) = \min_{u_k} \left[R(x_0) + \lambda \sum_{k=1}^{N} \int_0^T S(x_k, u_k)\Delta \right], \tag{26}$$

де x_0 – x у точці $x(T)$, тоді:

$$\Phi_N(m) = \min_{u_N} \left[\lambda S(m, u_1)\Delta + \Phi_{N-1}(m + f(m, u_N)\Delta) \right]; \tag{27}$$

$$\Phi_1(m) = \min_{u_1} \left[\lambda S(m, u_1)\Delta + R(m + f(m, u_1)\Delta) \right]; \tag{28}$$

де $x_0 = m + f(m, u_1)\Delta$.

Рівняння (28) можна представити також у вигляді :

$$\Phi_1(m) = \min_{u_1}\left[\lambda S(m,u_1)\Delta + \Phi_0\left(m + f(m,u_1)\Delta\right)\right], \tag{29}$$

де

$$\Phi_0\left(m + f(m,u_1)\Delta\right) = R\left(m + f(m_1,u_1)\Delta\right) = R(x_0). \tag{30}$$

Значення $\Phi_N(m)$ і $\Phi_0(m)$ є максимальними значеннями $I_N(u_k)$ для стадій процесу, що залишилися.

Розглянемо приклад.

У касі мається $x_k = 5$ тисяч гривень. Каса описується математичною моделлю у виді інтегруючої ланки виду

$$x_{k+1} = x_k + \Delta u_k.$$

На x_k накладаються обмеження $0 \le x_{\min} \le x_k \le x_{\max} = 5$. Задамо $\Delta = 1$ година і $N = 4$ години. Необхідно знайти

$$I(x_k, u_k) = x_N \to \min$$

при $u_k \in U = \{1, 0, -1\}$.

Це значить, що необхідно визначити мінімальний залишок грошей у касі через чотири години.

Дані розрахунку зведені в табл. 1.

Перший рядок табл. 1, що містить I_4, зберігає набір станів грошей у касі від x_4=0 до x_1=5 тисяч.

На першому кроці для x_3 = 0 одержимо набір станів $\dot{x}_4 = 0+1$; x_4=0+0 та x_4=0−1. Серед них $I_3(0)$ = 0 і такий стан x_4= −1 неприпустимий. Для x_3 = 1, перебираючи u_3, обчислимо x_4=1+1, $\dot{x}_4 = 0+1$; x_4=1−1. У такий спосіб $\min I_3(0) = 0$. Аналогічним образом заповнюються другий і третій рядки табл. 1.

Таблиця 1

x	0	1	2	3	4	5
$I_N(I_4)$	0	1	2	3	4	5
$I_{N-1}(I_3)$	0	0	1	2	3	4
$u_{N-1}(u_3)$	0	-1	-1	-1	-1	-1
$I_{N-2}(u_2)$	0	0	0	1	2	3
$u_{N-2}(u_2)$	0	-1	-1	-1	-1	-1
$I_{N-3}(I_1)$	0	0	0	0	1	2
$u_{N-3}(u_1)$	0	-1	-1	-1	-1	-1
$I_{N-4}(I_0)$	0	0	0	0	0	1
$u_{N-4}(u_0)$	0	-1	-1	-1	-1	-1

На другому кроці для $x_2 = 0$ обчислюють $x_3 = 0+1$, $x_3 = 0+0$, $x_3 = 0-1$ і визначають $I_2(0) = 0$. Для $x_2 = 1$ визначається $I_2(0) = 0$ і для $x_2 = 2$ після обчислення $x_3 = 2+1$, $x_3 = 2+0$, $x_3 = 2-1$ визначається $I_2(2) = 0$ і т.д. Аналогічно проводять обчислення на третьому і четвертому кроках і заповнюють табл. 1.

Оптимальна траєкторія для розглянутої задачі представлена на рис. 1 у вигляді прямої AB.

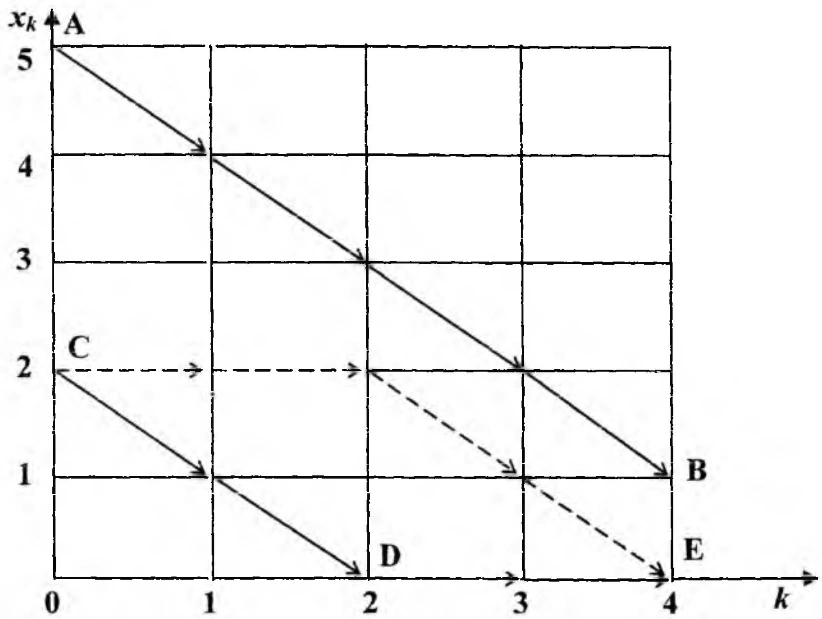

Рис. 1. Рішення задачі до прикладу

Якби $x_0 = 2$, то оптимальна траєкторія була б CDE.

Ми розглянули різні обчислювальні процедури практичної реалізації методу динамічного програмування для управління виробничо-економічними об'єктами. Отримані цим методом оптимальні траєкторії руху можуть бути використані для прогнозування поводження виробничо-економічних об'єктів у системах комп'ютерного моніторингу і підтримки прийняття рішень.

Література

1. Aris R. Discrete Dynamic Programming. – Waltham, Moss., Blasdell Publishing Co., 1964.
2. Робертс С. Динамическое программирование в процессах химической промышленности. – М.: Мир, 1996. – 480 с.
3. Раскин Л.Г. Анализ сложных систем и элементы теории оптимального управления. – М.: Сов. радио, 1996, 340 с.
4. Плотников В.Н., Зверев В.Ю. Оптимизация оперативно-организационного управления. – М.: Машиностроение, 1990. – 253 с.

Рекомендовано до публікації
д.е.н., проф. Ковальчуком К.Ф. 15.11.03

Надійшла до редакції
20.11.02