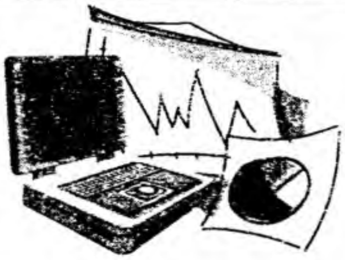
ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ



УДК 330.015 : 330.105

Пістунов І.М., Ситников О.А.

ДОСЛІДЖЕННЯ МЕЖІ ІСНУВАННЯ ОПТИМАЛЬНИХ РІШЕНЬ ДЛЯ ПОРТФЕЛЯ МАРКОВІЦА

Отримано практичні результати для межі застосування оптимального портфеля цінних паперів Марковіца. Запропоновано так звану "ризиково-доходну" модель, яка забезпечує розрахунок оптимального портфеля в умовах невизначеності рівня середньої доходності та ризику.

The practical result for the limits of using Markovits's optimal portfolio of securities have been presented. The so-called "risk-profitability" model which ensures the computation of the optimal portfolio in conditions of uncertainty about the level of average profitability and risk has been proposed.

В наш час фондовий ринок пропонує все більше і більше різноманітних видів цінних паперів. Завдяки засобам телекомунікацій, торгівля цінними паперами стала міжнародним явищем, коли не виходячи з офісу ви можете здійснювати управління вашим пакетом цінних паперів на всіх фондових біржах світу. Кожен тип цінних паперів має свою доходність, яка з часом коливається, тому вибір тих типів цінних паперів, які варто включити у власні активи, складає певну проблему.

Ця проблема вирішується за допомогою найвідомішої моделі портфеля цінних паперів Марковіца, для якої може бути знайдено оптимальне рішення за допомогою методів лінійного програмування [1,2] для:

– максимуму доходів при заданому значенні ризику

$$\begin{cases} m_p = \sum_i x_i d_i \to \max \\ \sum_i \sum_j x_i x_j v_{ij} = r_p \\ \sum x_i = 1 \end{cases}, \qquad (1)$$

– мінімуму ризику при заданому рівні доходності портфеля цінних паперів

$$\begin{cases} v_p = \sum_i \sum_j x_i x_j v_{ij} \to \min \\ \sum_i x_i d_i = m_p \\ \sum_i x_i = 1 \end{cases}, \qquad (2)$$

де x_i – частка капіталу, витрачена на купівлю цінних паперів i-го виду;

d_i – середня прибутковість цінних паперів i-го виду у відсотках в розрахунку на одну грошову одиницю;

m_p – задана середня прибутковість портфеля цінних паперів;

v_{ij} – ковариація доходності цінних паперів i – го та j – го видів;

v_p – ковариація усього портфеля цінних паперів, якою вимірюється ризик портфеля;

r_p – задана середня коваріація цінних паперів усього портфеля.

Ця модель широко застосовується зараз і для розрахунку ефективності інвестиційних проектів [3–5]. Але це використання провадиться без критичного аналізу можливої межі застосування моделі виду (1)–(2).

У зв`язку з вищевикладеним, виникають наступні задачі:

1) виявлення можливості використання матриці коефіцієнтів кореляції [6] $r_{ij} = \dfrac{v_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$, (де σ_i – середнє квадратичне відхилення доходності цінних паперів i-го типу) замість матриці коваріації. Коефіцієнт кореляції є безрозмірним і завжди коливається в межах ± 1, що робить його значно зручнішим для аналізу ситуації та визначення допустимого рівня ризику, аніж коваріація. Особливо це стосується моделі (1), де потрібно задавати певний, наперед визначений рівень ризику;

2) проведення аналізу за типом матриці коваріації – для якого типу це рішення можливе чи існує?

3) визначення можливості спрощення моделі (1)–(2) і зведення їх у єдину модель, яка має вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\sum_i \sum_j x_i x_j r_{x_i x_j}}{\sum_i x_i d_i} \to \min \\ \sum_i x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \end{cases} , \qquad (3)$$

щоб не розмірковувати над проблемою визначення допустимого рівня ризику для кожного портфелю. У моделі (3) в якості цільової функції обрано співвідношення, в якому середній ризик поділено на середню доходність портфеля. Очевидно, що така цільова функція має прагнути мінімуму. Назвемо таку модель "ризиково-доходною".

Рішення поставлених задач виконувалося із застосуванням функцій „СЛУЧМЕЖДУ", "Ковариация", "Кореляція" та "Пошук рішення" електронних таблиць Excel.

На першому етапі дослідження було проведено вирішення задачі Марковіца для максимуму прибутку та мінімуму ризику, згідно з моделями (1) та (2), використовуючи в розрахунках ризику матрицю коваріації та кореляції для однакових початкових даних. Для цього було згенеровано датчиком випадкових чисел з рівномірним розподілом початкові значення прибутковості для шести видів цінних паперів. Зразок таких даних наведено у табл. 1.

За даними табл. 1 розраховувалися матриці коваріації (табл. 2) та кореляції (табл. 3). В обох матрицях показано тільки нижній трикутник, оскільки вони є діагонально симетричними.

Було проведено 9 розрахунків за обома моделями (1) та (2). Результати показали повну тотожність значення доходності портфеля при розрахунках ризику за матрицями коваріації та кореляції. Відміна значень середньої доходності портфеля не перевищувала 0,7%. Тому всі подальші розрахунки проводилися з використанням матриці кореляції.

Таблиця 1.

Згенерована датчиком випадкових чисел доходність цінних паперів

Кількість спостережень зміни прибутковості	Акції типу 1	Акції типу 2	Акції типу 3	Акції типу 4	Акції типу 5	Акції типу 6
1	10,74	10,84	14,75	14,30	14,76	14.30
2	13,49	13,44	15,97	12,84	10,37	10.39
3	12,80	12,39	15,18	12,45	10,93	15.27
4	15,18	13,33	12.61	10,84	13,28	14.12
5	12,89	10,75	13,87	12,07	10,47	10,00
6	15,11	12,70	12,32	11,88	13,15	12.46

Таблиця 2

Матриця коваріації, розрахована за даними табл. 1

	Акції типу 1	Акції типу 2	Акції типу 3	Акції типу 4	Акції типу 5	Акції типу 6
Акції типу 1	2,2983					
Акції типу 2	1,2048	1,1737				
Акції типу 3	–1,2973	–0,1007	1,7542			
Акції типу 4	–1,4237	–0,5953	0,9063	1,1031		
Акції типу 5	–0,2984	–0,2963	–1,0046	0,3977	2,7612	
Акції типу 6	–0,4168	0,1388	–0,2628	0,1589	1,8416	3,97428

Таблиця 2

Матриця кореляції, розрахована за даними табл. 1

	Акції типу 1	Акції типу 2	Акції типу 3	Акції типу 4	Акції типу 5	Акції типу 6
Акції типу 1	1					
Акції типу 2	0,7335	1				
Акції типу 3	–0,6461	–0,0702	1			
Акції типу 4	–0,8941	–0,5232	0,6515	1		
Акції типу 5	–0,1184	–0,1646	–0,4564	0,2279	1	
Акції типу 6	–0,1379	0,0643	–0,0995	0,0759	0,5559	1

Наступну серію чисельних експериментів було проведено для визначення залежності прибутковості портфеля (1) від типу кореляційної матриці. Для цього у кожному новому розрахунку було задано матрицю кореляції, зі значеннями коефіцієнтів, які лежать в різних діапазонах: [–1;–0,8], [–0,8;–0,6],…[–0,1;+0,1]…[0,6;0,8], [+0,8;+1]. Для того, щоб охарактеризувати кореляційну матрицю одним числом, було застосовано коефіцієнт множинної кореляції [7,8]. Наприклад, для трьох величин y, x_1 і x_2 цей коефіцієнт розраховується за формулою:

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{\frac{r_{yx_1}^2 + r_{yx_2}^2 - 2r_{yx_2}r_{yx_2}r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2}}\ , \qquad (4)$$

де r_{yx_1} – приведений коефіцієнт кореляції між y та x_1

Цей коефіцієнт змінюється в діапазоні від 0 до 1. Для вирішення задачі цього етапу було проведено 61 оптимальний розрахунок за моделлю (1). Для того, щоб можна було відрізнити значення R_{yx1x2} при позитивних та негативних діапазонах зміни коефіцієнтів матриці кореляції, йому було присвоєно знак мінус, для негативних діапазонів. Результати дослідження представлені на рис. 1.

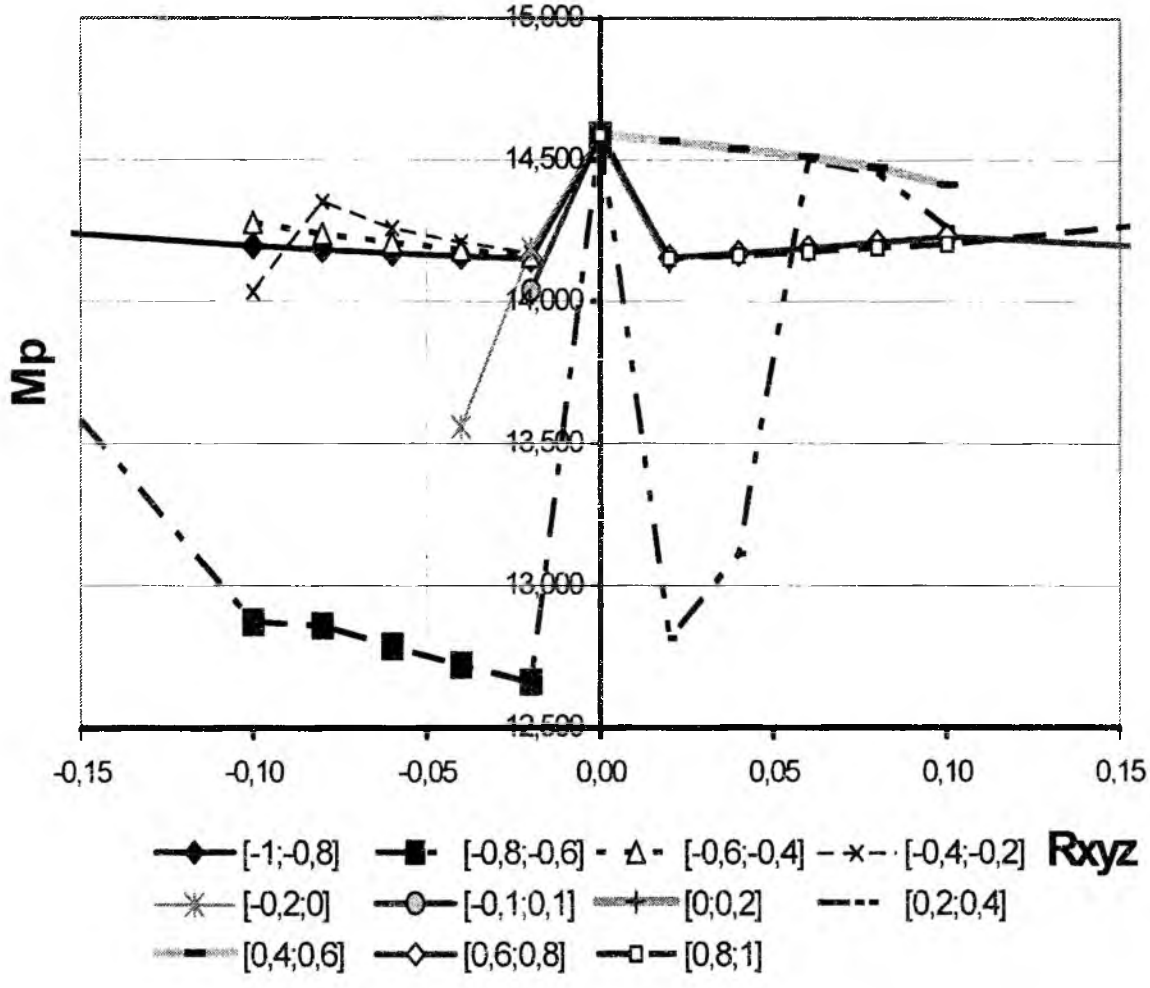


Рис. 1. Залежність доходності портфеля (*Mp*) від коефіцієнта множинної кореляції (*Rxyz*) для різних діапазонів існування значень коефіцієнтів взаємної кореляції (у квадратних дужках).

Як видно з графіка, найкращі рішення знаходяться, коли коефіцієнт множинної кореляції близький до нуля. Це не суперечить класичним положенням теорії управління ризиками [9]. Новим є те, що для коефіцієнтів кореляції, розташованих в діапазонах [–0,8; –0,6] та [0,2; 0,4] існує небезпека: при відхиленні коефіцієнта множинної кореляції від нуля більше, ніж на 0,1, отримано рішення, на 13% гірше, аніж тоді, коли *Ryx1x2* дорівнює нулю.

Останній етап дослідження присвячено перевірці моделі (3). Було проведено близько 20 оптимальних розрахунків за цією моделлю і в усіх випадках розрахунок виходив на нульову середню ризикованість портфеля, а серед цінних паперів вибирався тільки один, у якому середня доходність була найбільшою. Такий результат не може вважатися задовільним, оскільки фактична ризикованість портфеля, що складається тільки з акцій одного типу, пропорційна середньому квадратичному відхиленню доходності цих акцій [1, 9].

Тому, за рекомендаціями [10], середня ризикованість портфеля була зведена до вигляду

$$R_p = \sqrt{\sum_i x_i^2 v_i^2 + \sum_i \sum_j x_i x_j v_{ij}}\ , \tag{5}$$

де v_i – те саме, що і σ_i.

Тоді "ризиково-доходна" модель (3) набула наступного вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{\sum_i x_i^2 v_i^2 + \sum_i \sum_j x_i x_j \nu_{x_i x_j}}}{\sum_i x_i d_i} \to \min \\ \sum_i x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \end{cases}, \tag{6}$$

За цією моделлю було проведено більше 40 оптимізаційних розрахунків з використанням випадкових значень доходностей, розподілених згідно рівномірного закону. На підставі отриманих результатів було побудовано графік, представлений на рис. 2. Залежність оптимальної доходності портфеля від модифікованого ризику має нелінійний характер. При зміні ризику від 0 до 0,5 спостерігається лінійний приріст доходності на 8%, від 0,5 до 1,0 – темп росту уповільнюється до 3%. Подальше зростання ризику не викликає помітних змін у доходності.

На підставі проведених експериментів можна зробити наступні висновки щодо оптимальної моделі портфеля цінних паперів Марковіца:

1. Використання матриці кореляцій дає тотожні результати з використанням матриці коваріацій.
2. Найбільш ефективним є портфель, який складається зі слабокорельованих цінних паперів.
3. "Ризиково-доходна"модель виду (6) може бути застосована для випадку, коли складно визначитися з допустимими рівнями ризику чи доходності за моделями виду (1)–(2).
4. Результати оптимальних розрахунків за моделлю (6) варто приймати для випадків, коли модифікований ризик не перевищує 1.

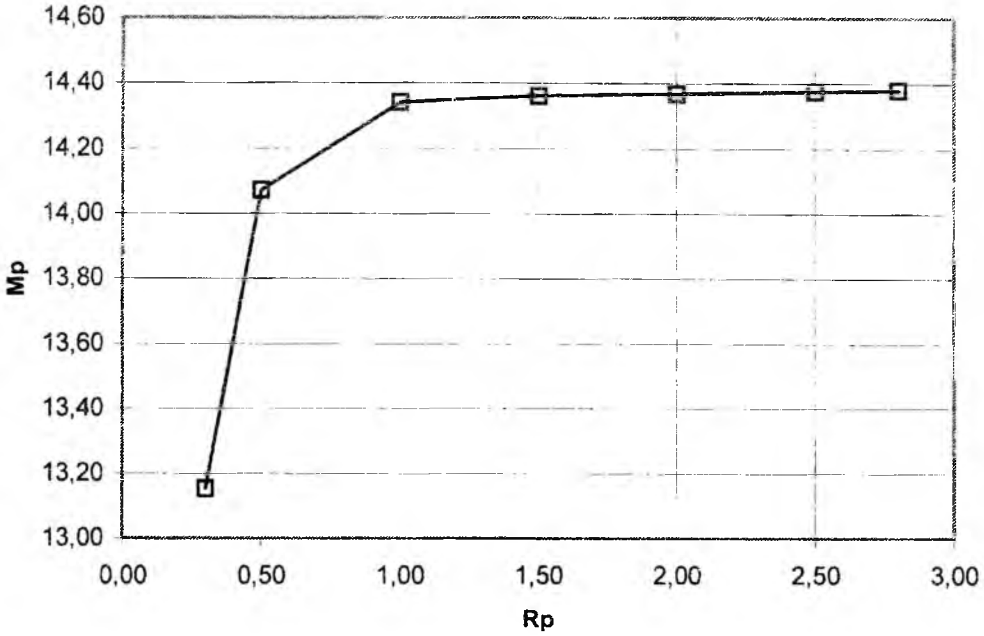


Рис. 2. Залежність доходності портфеля цінних паперів (M_p) від середньої ризикованості (R_p) для моделі (6).

Література

1. Фабоцци Ф. Управление инвестициями: пер. с англ. – М.: ИНФРА-М. – 2000. – 932 с.
2. Мицель А.А., Каштанова О.В. Об одном алгоритме формирования оптимального портфеля инвестиционных проектов. // Экономика и математические методы. – №4. – Т.37. – 2001. – С.103–108.
3. Виленский В.П. Об одном подходе к учету влияния неопределенности и риска на эффективность инвестиционных проектов.// Экономика и математические методы. – №4. – Т.38. – 2002. – С.24–31.
4. Бекларян Л.А., Сотский С.В. Оптимизация уровня инвестируемого капитала в задаче согласования инвестиционного контракта. // Экономика и математические методы. – №4. – Т.36. – 2000. – С.67–82.
5. Єлейко Я.І., Музичук А.А. Моделювання фінансових стратегій у випадковому середовищі. // Фінанси України. – №2. – 2002. – С.49–53
6. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.:Наука, 1962. – 564 С.
7. Енциклопедія кібернетики. Головна редакція українських радянських енциклопедій. Т.1,2. – К., 1973. – 680 с.
8. Губарев В.М. Теория статистики. – М.: Аудит. – 1998. – 350 с.
9. Дубров А.М., Лагоша Б.А., Хрусталев Е.Ю. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе. – М.: Финансы и статистика, 1999. - 168 с.
10. Каплин А., Портфельные риски в теории Марковица. – (електрон. ресурс)/ спосіб доступу: URL: http://www.gaap.ru/biblio/corpfin/ statistics/005.htm

Рекомендовано до публікації
д.е.н., проф. Сазонцем І.Л. 14.11.03

Надійшла до редакції
23.10.03