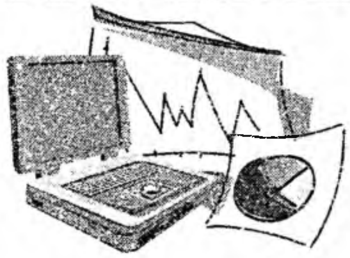
ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ



УДК 658.011

Манелюк Л.А., Воронов В.А.

ДО МОДЕЛЮВАННЯ НАУКОВО-ТЕХНІЧНОГО ПРОГРЕСУ

Розглянуто проблему побудови моделі науково-технічного прогресу з урахуванням статистичної нестаціонарністі. Дослідження проведені на базі виробничої функції Кобба-Дугласа. Отримано модель, що уявляє собою узагальнення відомої моделі Я. Тінбергена.

The article contains consideration of problem of scientific and technological progress model construction subject to statistical instability. The researches have been carried out on the base of production function of Kobba-Douglas. The received model represents a generalization of well-known model of Ya. Tinbergena.

Науково-технічний прогрес активно впливає на всі сфери життя і виявляється в змінах, найчастіше – поліпшеннях, показників, що характеризують технічні, економічні і соціальні процеси і явища, серед яких знаходиться і виробництво. Вплив прогресу на виробництво настільки значний, що його не можна не враховувати при плануванні й прийнятті стратегічних рішень.

Прогрес обумовлює наявність позитивної тенденції зміни показників у часі, а отже є джерелом нестаціонарності статистичних даних, на підставі яких будуються математичні моделі [1]. Наявність нестаціонарності ускладнює моделювання і вимагає використання спеціальних підходів.

Для формалізованої оцінки виробничих наслідків науково-технічного прогресу представляється доцільним досліджувати виробничу функцію, що дозволяє визначити сукупний показник ефективності використання основних факторів виробництва (ресурсів) – обсяг випуску валового продукту.

Відома формула, що враховує прогрес і побудована на базі функції Кобба-Дугласа Я. Тінбергеном [2, 3].

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}e^{\delta t} \tag{1}$$

де Y – результат виробництва;

K – витрати капіталу;

L – витрати праці;

α, β – коефіцієнти виробничої функції, що характеризують еластичність обсягу виробництва по витратах капіталу і праці;

δ, τ – відповідно коефіцієнт і фактор часу;

A – коефіцієнт, що враховує розмірність показників і вплив неврахованихих факторів виробництва.

У цій формулі множник $e^{\delta t}$ моделює прогрес. Виникає питання, як ідентифікувати коефіцієнти рівняння (1). Адже регресійні методи припускають статистичну стаціонарність процесів, що відображають зміни перемінних Y, K, L у часі (під стаціонарністю тут розуміється сталість математичних очикувань і дисперсій). Тільки у випадку такої стаціонарності допускається заміна усереднення за множиною усередненням за часом.

Гіпотеза про можливість такої заміни покладена в основу процедур регресійного аналізу. При моделюванні ж науково-технічного прогресу передбачається зміна в часі, принаймні, математичних очикувань, як це показано на рис. 1.

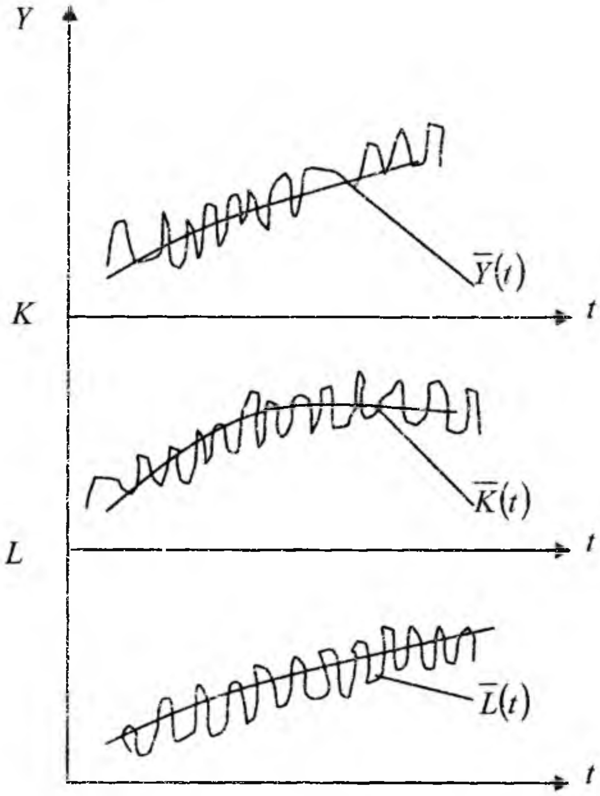


Рис. 1 Характер зміни перемінних

Для використання методів регресійного аналізу представляється доцільним приведення Y, K, L до нормалізованої форми. Дане перетворення забезпечує постійне нульове математичне очікування й одиничну дисперсію [4].

Розглянемо рівняння Кобба-Дугласа

$$Y = AK^{\alpha} L^{\beta} . \qquad (2)$$

Шляхом логарифмування приведемо його до лінійного вигляду

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L$$

або

$$z = a + \alpha x_1 + \beta x_2 , \qquad (3)$$

де $a = \ln A, x_1 = \ln K, x_2 = \ln L$.

Проілюструємо процедуру побудови моделі на прикладі статистичних даних табл. 1.

Таблиця 1

Виробничі дані гірничо-збагачувального підприємства по роках за період 1998-2002

№	Роки	Y	K	L
1	1998	318315	8048,0	4889,7
2	1999	328814	8789,0	4899,7
3	2000	338730,6	8110,0	5343,8
4	2001	338994,9	8731,0	5835,6
5	2002	339094,9	8301,0	5852,3

Після логарифмування даних табл. 1, одержуємо табл. 2.

Таблиця 2

Результати логарифмування

№	Z	X_1	X_2
1	12,671	8,993	8,4949
2	12,703	9,081	8,4969
3	12,733	9,001	8,5837
4	12,734	9,075	8,6717
5	12,734	9,024	8,6746

За цією таблицею виділимо тренди $\bar{z} = \bar{z}(t), \bar{x}_1 = \bar{x}_1(t), \bar{x}_2 = \bar{x}_2(t)$. (Нагадаємо, тренд – залежність середнього значення випадкової величини від часу). За аналогією можна визначити і залежність дисперсії або середньоквадратичного відхилення від часу, що називається скедастичною лінією (залежністю) $\sigma_z = \sigma_z(t), \sigma_1 = \sigma_1(t)$, $\sigma_2 = \sigma_2(t)$. Для спрощення написання в останніх двох виразах в індексах опущене позначення x.

Приведення вихідних даних до умов стаціонарності здійснюється за формулами:

$$V = \frac{z(t) - \bar{z}(t)}{\sigma_z(t)}, \quad S_1 = \frac{x_1(t) - \bar{x}_1(t)}{\sigma_1(t)}, \quad S_2 = \frac{x_2(t) - \bar{x}_2(t)}{\sigma_2(t)} \tag{4}$$

Дані табл. 2 перераховуємо по формулах (4) і формуємо табл. 3. При цьому вважаємо $\sigma_z(t), \sigma_1(t), \sigma_2(t)$ незалежними від часу (постійними).

Таблиця 3

Результати розрахунку

№	V	S_1	S_2
1	-1,766	-1,134	-1,1287
2	-0,468	1,265	-1,1029
3	0,720	-0,925	-0,0086
4	0,751	1,084	1,10209
5	0,763	-0,291	1,13803

По цим даним знаходимо лінійну регресію виду

$$v = b_1 S_1 + b_2 S_2 \ . \tag{5}$$

Коефіцієнти (5) визначаємо із системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} r_{V1} = b_1 r_{11} + b_2 r_{12} \\ r_{V2} = b_1 r_{12} + b_2 r_{22} \end{cases} \quad (6)$$

Тут r – нормований коефіцієнт кореляції попарно між перемінними V, x_1 і x_2. Вирішуючи систему (6), знаходимо

$$b_1 = \frac{r_{V1} - r_{12} r_{V2}}{1 - r_{12}^2} \text{ і } b_2 = \frac{r_{V2} - r_{12} r_{V1}}{1 - r_{12}^2}.$$

Підставляючи вираз (4) у (5), після нескладних перетворень одержуємо:

$$z(t) = \frac{b_1 \sigma_z(t)}{\sigma_1(t)} x_1(t) + \frac{b_2 \sigma_z(t)}{\sigma_2(t)} x_2(t) + \bar{z}(t) - \frac{b_1 \sigma_z(t) -}{\sigma_1(t)} \bar{x}_1(t) - \frac{b_2 \sigma_z(t) -}{\sigma_2(t)} x_2 . \quad (7)$$

Порівнюючи структуру виразу (7) зі структурою (3), знаходимо

$$\alpha = \frac{b_1 \sigma_z(t)}{\sigma_1(t)}, \quad \beta = \frac{b_2 \sigma_z(t)}{\sigma_2(t)}, \quad a = \bar{z} - \alpha \bar{x}_1(t) - \beta \bar{x}_2(t) . \quad (8)$$

Оскільки $a = \ln A$, тоді $A = e^a$. Остаточно маємо:

$$Y = e^{\bar{z}(t) - \alpha \bar{x}_1(t) - \beta \bar{x}_2(t)} K^{\alpha} L^{\beta} = \exp\left(\bar{z}(t) - \alpha \bar{x}_1(t) - \beta \bar{x}_2(t)\right) K^{\alpha} L^{\beta} \quad (9)$$

За даними чисельного прикладу

$$Y = \exp\left(\bar{z}(t) - 0.991 \bar{x}_1(t) - 0.056 \bar{x}_2(t)\right) K^{0.991} L^{0.056} .$$

При кореляційному відношенні $\eta = 0{,}851$. Останній говорить про адекватність моделі.

Аналізуючи вирази (8) знаходимо, що при незмінності дисперсій $\sigma_z^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ еластичності випуску α і β при прогресі не міняються. Змінюється лише розмірний коефіцієнт А. У ньому і зосереджена інформація про науково-технічний прогрес.

Порівнюючи між собою вирази (9) і (1), знаходимо, що

$$\delta t = e^{\bar{z}(t) - \alpha \bar{x}_1(t) - \beta \bar{x}_2(t)} = \exp\left(\bar{z}(t) - \alpha\right) \bar{x}_1(t) - \beta \bar{x}_2(t) ,$$

звідки

$$\delta = \frac{\exp\left(\bar{z}(t) - \alpha \bar{x}_1(t) - \beta \bar{x}_2(t)\right)}{t} . \quad (10)$$

Іншими словами, формула (1) може розглядатися, як окремий випадок виразу (10).

Таким чином розроблена модель (10) являє собою узагальнену формалізацію впливу прогресу на умови виробництва.

Література

1. Харрод Р. Ф. К теории экономической динамики. – М.: Гелиос АРВ, 1999. – 160 с.
2. Глазьев С.Ю. Экономическая теория технического развития. – М.: Наука, 1990. – 232 с.
3. Клейнер Г.Б. Производственные функции. М.: Финансы и статистика. – 1986.
4. Кендалл Дж., Стюарт А. Статистические выводы и связи. – М.: Мир, 1973.

Рекомендовано до публікації д.е.н., проф. Ковальчуком К.Ф. 18.11.04

Надійшла до редакції 10.11.04