

УДК 336.767

**Хохлов В.Ю.**

## **ПРАКТИЧНІ АСПЕКТИ УПРАВЛІННЯ ОПТИМАЛЬНИМ ЗА ПОХИБКОЮ СТЕЖЕННЯ ПОРТФЕЛЕМ ЦІННИХ ПАПЕРІВ**

У статті досліджені такі практичні аспекти управління портфелем, що стежить за бенчмарком, як залежність якості стеження та транзакційних витрат від частоти перебалансування, розміру портфеля, а також поведінка портфелю у різні періоди фондового ринку (зростання, криза, боковий тренд).

**Ключові слова:** управління, оптимальність, похибка, бенчмарк, портфель цінних паперів, тренд.

This article addresses several practical issues of managing a tracking portfolio, such as dependence of tracking quality and transaction costs on rebalancing frequency, number of assets in portfolio, as well as portfolio behavior on different market trends (rising market, crisis, sideways trend).

**Keywords:** management, optimal, error, benchmark, portfolio, trend.

Управління портфелями цінних паперів, що стежать за динамікою визначного бенчмарку (еталонного активу), стало дуже поширеним через визнання сучасної портфельної теорії. Окрім суто теоретичних проблем, таких як визначення критеріїв стеження та оптимізація портфеля відповідно до них, проблематика управління такими портфелями включає у себе також практичні аспекти, такі як кількість активів у портфелі, частота перебалансування, вплив транзакційних витрат на дохідність, тощо.

Увага таких визначних дослідників у галузі управління портфелем та його оптимізації, як У.Шарп, Дж.Трейнор, Ф.Блек, Р.Ролл, Ф.Джоріон, була приділена, значною мірою визначенню критеріїв управління портфелем цінних паперів та розробці моделей і алгоритмів оптимізації. Стосовно портфелів, що стежать за бенчмарком, класичною працею є стаття Ролла [1], у якій запропонована модель оптимізації портфелю за похибкою стеження. Підхід автора полягає у визначенні добавок до ваги активів у бенчмарку, тобто портфель містить таку саму кількість активів, як і бенчмарк. Це є практичним недоліком підходу Ролла, тому що найбільш популярний бенчмарк на ринку акції, індекс S&P 500, має 500 компонентів. Лише дуже великі портфелі можуть мати таку кількість активів. Стаття Джоріона [2] розвиває ідеї Ролла, але має тіж самі недоліки. Обидві праці також не враховують транзакційних витрат та не розглядають вплив частоти перебалансування.

Інший підхід запропонований у статті Рудольфа та ін. [3], де наведені декілька критеріїв та відповідних їм лінійних моделей, які дозволяють формувати портфелі, що стежать за бенчмарком, з будь-якої кількості активів. Недоліком підходу є те, що оптимізація вимагає знання усіх щоденних дохідностей по кожному активу, що дуже ускладнює оптимізацію. На відміну від Рудольфа, у статті Хохлова [4] запропоновані моделі, які вимагають лише знання вибіркової статистики. Хоча ці моделі є квадратичними, а не лінійними, для них застосовний алгоритм Шарпа [5], який є досить простим та ефективним. Але у цих працях також не досліджені практичні аспекти управління портфелем.

Метою дослідження є вивчення практичних аспектів управління портфелем, що стежить за бенчмарком. Задачі дослідження: використовуючи моделі [4] побудувати портфелі, що стежать за індексом S&P 500, вивчити вплив розміру портфеля та частоту його перебалансування на якість стеження, визначити вплив транзакційних витрат, перевірити поведінку моделей у різні періоди на фондовому ринку (зростання, падіння, боковий тренд).

Для дослідження частоти перебалансування портфелю та транзакційних витрат застосуємо ex-post оптимізацію портфеля цінних паперів, який стежив за індексом S&P 500 у 2010 році. Як множину активів візьмемо 16 акцій відомих компаній США: AAPL, BA, CVX, F, GE, HPQ, IBM, JNJ, KFT, NKE, PEP, PFE, PG, T, WMT та XOM. Розглянемо дві моделі, запропо-

новані у [4]: модель оптимізації за TEV (TEV-модель) та модель оптимізації за TE<sup>2</sup> (TE-модель). Для проведення розрахунків використані цінові дані Yahoo Finance, скореговані на виплату дивідендів та корпоративні дії.

При частоті перебалансування 1 раз на рік портфель формується на початку року та не змінюється. Це, фактично, відповідає методології досліджень [1-4]. При частоті перебалансування 4 рази на рік (кожні 3 місяці) портфель формувався на початку року, а потім 1 квітня, 1 липня та 1 жовтня за тим самим алгоритмом розраховувались нові вагові коефіцієнти та портфель перебалансовувався у відповідності до них (тобто, продавалися активи, фактична вага яких перевищувала розрахункову та докуповувались активи, фактична вага яких була меншою за розрахункову). При частоті перебалансування 12 разів на рік (кожен місяць) портфель перебалансовувався у тій самий спосіб 1 числа кожного місяця.

При моделюванні транзакційних витрат брокерська комісія вираховувалась після продажу активів, таким чином розмір перебалансованого портфелю ставав меншим на суму цієї комісії. Брокерська комісія у дослідженні розраховувалась як 0.1% від суми транзакції, що приблизно відповідає комісії Interactive Brokers.

Результати дослідження впливу частоти перебалансування портфелю наведені у таблиці 1.

Таблиця 1

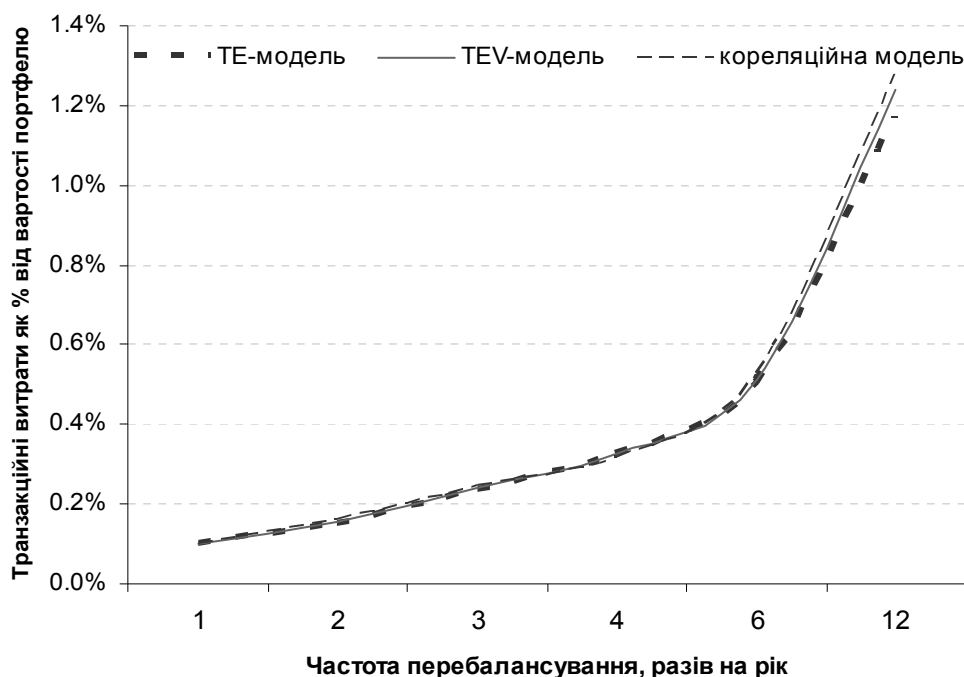
**Показники портфелів з різною частотою перебалансування**

Модель:	TE			TEV			Бенчмарк S&P 500
	1	4	12	1	4	12	
Частота балансування:	1	4	12	1	4	12	S&P 500
Дохідність	19.51%	15.76%	16.30%	19.88%	16.08%	17.85%	12.78%
Ст. відхилення	17.50%	17.68%	17.63%	17.54%	17.72%	17.68%	18.05%
Асиметрія	-0.1569	-0.1859	-0.1898	-0.1574	-0.1876	-0.1942	-0.1451
Надмір. ексцес	2.4448	2.2697	2.1082	2.4617	2.2571	2.0749	2.0214
Бета	0.9453	0.9626	0.9668	0.9472	0.9651	0.9689	1.000
TE, за рік	4.0193%	3.3138%	2.5917%	4.0353%	3.3208%	2.6649%	0.0000%
TEV, за рік	4.0032%	3.3100%	2.5848%	4.0175%	3.3160%	2.6509%	0.0000%
Кореляція	0.9750	0.9830	0.9897	0.9748	0.9829	0.9892	1.000
Транз. витрати	0.10%	0.32%	1.20%	0.10%	0.33%	1.23%	0.10%

З наведених результатів можна зробити висновок про те, що збільшення частоти перебалансування портфелю покращує якість стеження — дохідність, стандартне відхилення, бета та надлишковий ексцес наближуються до показників бенчмарку, похибка стеження зменшується, а кореляція з бенчмарком зростає. З іншого боку, розмір транзакційних витрат також зростає, оскільки здійснюється більше операції купівлі-продажу. Залежність розміру транзакційних витрат від частоти перебалансування наведена на рисунку 1, вона не є лінійною. Тому збільшення якості стеження за рахунок додаткових витрат не завжди є виправданим. На нашу думку, оптимальною частотою перебалансування є 3-4 рази на рік, тому що частіші перебалансування є занадто дорогими.

Можна також відзначити, що залежність транзакційних витрат від частоти перебалансування є дуже подібною в усіх моделях оптимізації.

Вивчення оптимального розміру портфелю чи навіть вибору оптимального портфеля заданого розміру методом перебору є практично неможливим через велику кількість комбінацій — так, якщо ми бажаємо визначити оптимальний за похибкою стеження портфель з 16 активів з множини із 100 активів, це потребує розв’язання 10<sup>18</sup> оптимізаційних задач.



**Рис. 1. Залежність транзакційних витрат від частоти перебалансування**

Для вивчення впливу розміру портфеля на якість стеження застосований такий алгоритм редукції оптимального портфелю:

1. Задається модель редукції (наприклад, 1 актив при розмірі портфелю від 2 до 10, 2 — від 10 до 20, 5 — від 20 до 50, 10 — від 50 до 100).
2. Задається початковий портфель (у даному дослідженні використано компоненти індексу S&P 100, що містить 100 активів).
3. Оптимізуємо портфель з заданої множини активів.
4. Якщо розмір оптимального портфелю (кількість активів з ненульовою вагою) менша чи дорівнює порогу, алгоритм припиняється.
5. Проводимо редукцію — виключаємо з множини доступних активів активи з найменшою вагою у кількості відповідно до моделі редукції, після чого переходимо на крок 3.

Відповідно до цього алгоритму були створені оптимальні портфелі розміром від 3 до 100, які стежать за індексом S&P 500. Як початкову множину було обрано компоненти індексу S&P 100. Використовувались TE та TEV-моделі оптимізації та вказана вище модель редукції. Залежність похибки стеження (TEV за рік) портфелів різного розміру наведена у таблиці 2 та показана на рисунку 2. Ця залежність має нелінійний характер, похибка швидко зменшується при додаванні нових активів до портфелю при його розмірі від 3 до 20 активів, повільно зменшується при розмірі від 20 до 60 активів, та є майже незмінною для великих портфелів, що містять понад 60 активів.

Таблиця 2

**Залежність похибки стеження від розміру портфелю**

Розмір портфелю	3	9	16	25	50	100
Модель	Похибка стеження (TEV), за рік					
TEV-модель	6.50%	3.34%	2.51%	1.84%	1.14%	0.95%
TE-модель	6.73%	3.44%	2.60%	2.09%	1.57%	1.41%

Також слід зауважити, що TEV-модель показала кращі результати для великої кількості активів у портфелі, різниця з TE-моделлю стає відчутною при 20 та більше активах. Не виключено, що це є наслідком меншої залежності TEV-моделі від якості вхідних даних — вона, на відміну від TE-моделі, не потребує знання очікуваних доходностей активів.

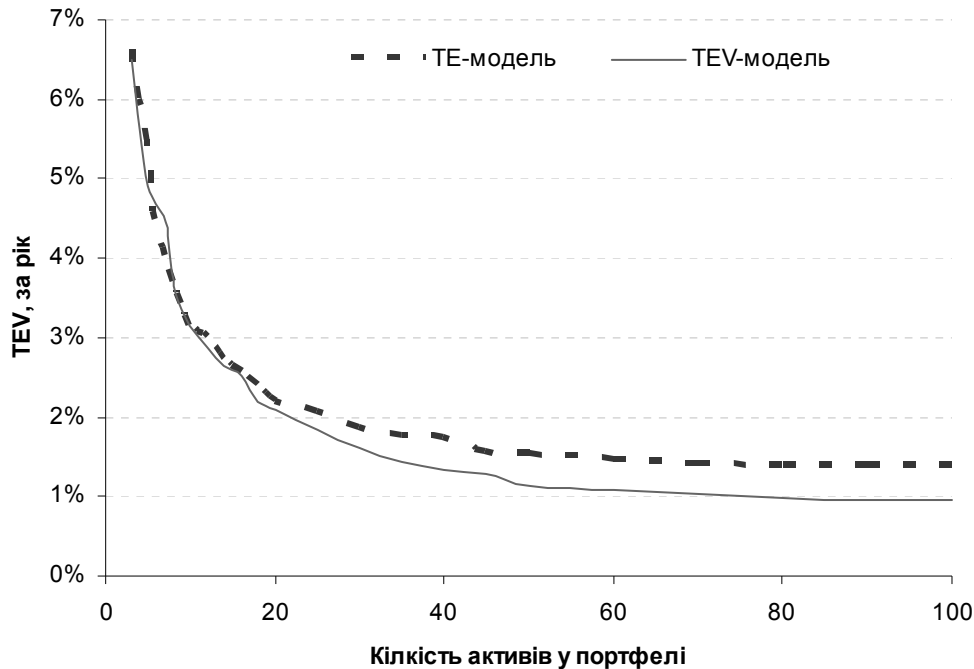


Рис. 2. Залежність похибки стеження від розміру портфелю

Щоб дослідити фактичну якість стеження, розглянемо поведінку ex-ante TEV-моделі. При ex-ante підході для розрахунку вхідних параметрів оптимізації використовуються вибіркові статистики минулих періодів, відомі на час розрахунку портфелю. Це є відмінністю від ex-post підходу, який був застосований у попередніх розділах та який базується на тому, що ми можемо 100% точно передбачити значення вибірових статистик. Саме ex-ante підхід моделює реальне управління портфелем, тому його природно обрати для оцінки якості стеження.

Розглянемо три періоди на фондовому ринку США: боковий тренд у 2005 році (252 торгові дні), зростання ринку з 1 березня 2006 по 1 березня 2007 року (251 торговий день), кризу та падіння ринку з 1 березня 2008 по 1 березня 2009 року (251 торговий день). У кожен з цих періодів були побудовані портфелі з множини з 16 активів, що стежать за індексом S&P 500. Множина активів складається з акцій AAPL, BA, CVX, F, GE, HPQ, IBM, JNJ, KFT, ?-KE, PEP, PFE, PG, T, WMT та XOM.

Результати портфелів у період бокового тренду у 2005 році наведені у таблиці 3. Стандартне відхилення S&P 500 у цей період було 10.28%. Значення «розмір вибірки» у таблиці вказує на кількість місяців даних у вибірці, по якій розраховувались вхідні параметри алгоритму (наприклад, 12 місяців — вибірка з 1.01.2004 по 12.31.2004, 6 місяців — вибірка з 1.07.2004 по 12.31.2004).

З наведених результатів можна зробити висновок про те, що використання меншої вибірки дає меншу похибку стеження, але збільшує витрати.

Таблиця 3

**Результати стеження за індексом S&P 500 на боковому тренді**

Частота баланс.	1	4	12	1	4	12
Розмір вибірки	12	12	12	6	6	6
TEV, за рік	4.4071%	4.2596%	4.0577%	4.2525%	4.1412%	3.9470%
Кореляція	0.9078	0.9120	0.9197	0.9132	0.9164	0.9237
Комісія брокера	100.00	178.49	236.72	99.99	215.65	304.79

Останнє легко пояснити тим, що чим менша вибірка, тим більш мінливими є статистики та розраховані по ним вагові коефіцієнти, тому при перебалансуванні портфелю його склад змінюється більше та потрібно здійснювати більше транзакцій.

Результати портфелів у період зростання ринку у 2006-2007 роках наведені у таблиці 4. За розглянутий період стандартне відхилення індексу склало 10.18%, тобто майже так саме як і у 2005 році. Дуже подібними є й похибки стеження. Тому можна зробити висновок про те, що саме волатильність ринку (стандартне відхилення дохідності) є детермінантою якості стеження, а не ринковий тренд. На відміну від 2005 року, у цей період кращим виявилось використання великої вибірки для оцінки вхідних параметрів.

Таблиця 4

**Результати стеження за індексом S&P 500 у період зростання**

Частота баланс.	1	4	12	1	4	12
Розмір вибірки	12	12	12	6	6	6
TEV, за рік	4.4379%	4.2405%	4.2426%	4.5992%	4.4050%	4.3296%
Кореляція	0.8996	0.9087	0.9086	0.8916	0.9010	0.9045
Комісія брокера	99.99	166.87	229.62	99.99	230.77	369.22

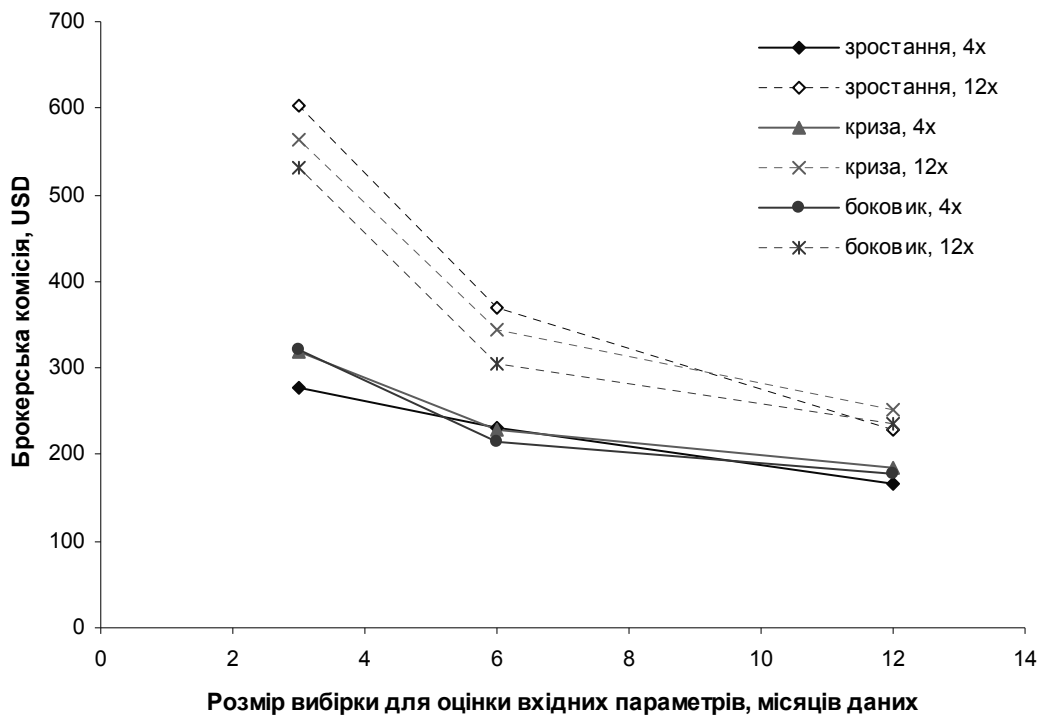
Результати портфелів у період кризи 2008-2009 років наведені у таблиці 5. За розглянутий період стандартне відхилення індексу склало 42.67%, це був аномально волатильний ринок. Не дивно, що похибки стеження значно перевищували наведені у попередніх таблицях. Велика вибірка даних дає кращу якість вхідних параметрів лише при нечастому перебалансуванні. Крім того, більший показник кореляції з бенчмарком не є ознакою кращої якості стеження.

Таблиця 5

**Результати стеження за індексом S&P 500 у період кризи**

Частота баланс.	1	4	12	1	4	12
Розмір вибірки	12	12	12	6	6	6
TEV, за рік	10.4957%	10.2070%	10.0036%	11.0982%	10.2078%	10.0389%
Кореляція	0.9712	0.9722	0.9730	0.9678	0.9717	0.9726
Комісія брокера	99.98	183.91	252.05	99.98	229.31	344.52

Таким чином, якість стеження за бенчмарком в першу чергу визначається волатильністю ринку, що можна вимірювати стандартним відхиленням, а характер поведінки ринку (зростання, спад) не має суттєвого іншого впливу, окрім волатильності.



**Рис. 3. Залежність транзакційних витрат від розміру вибірки, яка використовувалась для оцінки вхідних параметрів**

Збільшення частоти перебалансування портфеля майже завжди збільшує точність стеження, але це здійснюється за рахунок збільшення транзакційних витрат. Частково компенсувати таке збільшення можливо шляхом використання більших вибірок для оцінки вхідних параметрів — так, різниця між використанням вибірок розміром 3, 6 чи 12 місяців є суттєвою. На рисунку 3 показана залежність брокерської комісії на прикладі портфеля вартістю \$100,000 від розміру вибірки для різних періодів на фондовому ринку та різної частоти перебалансування (4x — 4 рази на рік, 12x — 12 разів на рік).

У статті досліджено низку практичних аспектів управління портфелями, що стежать за обраним бенчмарком (на прикладі індексу Standard & Poor's 500). Як моделі оптимізації було досліджено TE-модель та TEV-модель. Важливим чинником, що впливає на якість стеження, є частота перебалансування. Так, збільшення її з 1 разу на рік до 3-4 разів на рік суттєво (на 18%) зменшує похибку стеження. Щомісячне перебалансування істотно зменшує похибку (на 35%), але збільшує транзакційні витрати. Найкращим здається перебалансування портфеля раз у 3 чи 4 місяці.

Суттєвою є залежність якості стеження від кількості активів, які можуть бути включені до портфелю — при збільшенні їхньої кількості від 3 до 20 похибка стеження зменшується у 3 рази, а при збільшенні від 20 до 60 — ще у 2 рази. У статті запропоновано алгоритм редукції портфеля до заданої кількості активів, який дозволяє створювати оптимальні портфелі з заданої кількості інструментів.

Дослідження якості стеження за бенчмарком у різні періоди на фондовому ринку (боковий тренд 2005 року, зростання 2006-2007 років, криза 2008-2009 років) показало, що вирішальний вплив на похибку стеження має волатильність ринку. Після врахування волатильності характер ринкового тренду не має значного впливу на якість стеження. Для покращення стеження, окрім збільшення частоти перебалансування, можна також використовувати

більші вибірки для оцінки вхідних параметрів алгоритму оптимізації. Так, збільшення вибірки з 3 місяців до 6 чи 12 зменшує похибку стеження, але одночасно також зменшує волатильність портфелю та пов'язані з цим транакційні витрати.

### *Література*

1. Roll R. A Mean-Variance Analysis of Tracking Error / R. Roll // Journal of Portfolio Management. — 1992. — Vol. 18, No. 4. — P. 13–22.
2. Jorion P. Portfolio Optimization with Tracking-Error Constraints / Philippe Jorion // Financial Analysis Journal. — 2003. — Vol. 59, No. 5. — P. 70-82.
3. Rudolf R. A Linear Model for Tracking Error Minimization / R. Rudolf, H.-J. Wolter, H. Zimmermann // Journal of Banking & Finance. — 1999. — No. 23. — P. 85–103.
4. Хохлов В. Ю. Оптимізація портфелю цінних паперів по похибці стеження / В. Ю. Хохлов // Економічний вісник Національного гірничого університету. — 2011. — № 2. — С. 140-144.
5. Sharpe W. An Algorithm for Portfolio Improvement / William Sharpe // Advances in Mathematical Programming and Financial Planning / K.D. Lawrence, J.B. Guerard, Jr., Gary D. Reeves (editors). — JAI Press, Inc., 1987. — P. 155–170.

*Рекомендовано до публікації*  
д.е.н., проф. Ковальчуком К.Ф. 25.09.12

*Надійшла до редакції*  
15.10.2012