

УДК 622.831.3.001.5

Ю.А. Костандов, Л.Я. Локшина

ВЛИЯНИЕ КОНТАКТНОГО ТРЕНИЯ НА ПРЕДЕЛЬНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ В ОБРАЗЦЕ ГОРНОЙ ПОРОДЫ И ВИД ТРАЕКТОРИИ РАЗРУШЕНИЯ ПРИ СЖАТИИ

Таврический национальный университет

Проведен анализ напряжений на траектории максимальных эффективных касательных напряжений (ТМЭКН) в образце горной породы при его одноосном сжатии. Учтено влияние контактного трения на поверхности приложения нагрузки на предельные напряжения в образце и вид траектории разрушения. Определены углы наклона ТМЭКН. Проведено сравнение полученных результатов с уже известными для случая отсутствия контактного трения.

Ключевые слова: образец горной породы, нагрузка, касательные напряжения, предельное напряжение, контактное трение, траектория разрушения

Авторами ранее получено уравнение состояния материала с учетом внутреннего трения материала [1]. В данной работе рассматривается состояние образца при одноосном сжатии с учетом контактного трения на поверхности приложения нагрузки в предположении, что формирование очагов разрушения в локальных областях происходит на траекториях максимальных эффективных касательных напряжений (ТМЭКН) [2]. Под эффективным касательным напряжением τ_{ef} понимается активное касательное напряжение τ_{α} за вычетом фрикционной составляющей. Для описания равновесия на ТМЭКН используется критерий Кулона

$$\tau_{ef} = \tau_{\alpha} - \mu\sigma_{\alpha} \leq k, \quad (1)$$

где τ_{ef} , τ_{α} – соответственно эффективное и активное касательные напряжения на ТМЭКН; μ – коэффициент внутреннего трения материала; σ_{α} – нормальное напряжение на ТМЭКН; k – предельная сопротивляемость материала сдвигу. Критерий (1) означает, что при $\tau_{ef} = k$ происходит разрушение, а при $\tau_{ef} < k$ материал находится в упругом состоянии.

Рассмотрим образец горной породы шириной l и высотой h при одноосном сжатии вдоль оси OY с учетом действия контактного трения на поверхности приложения нагрузки. Представим ТМЭКН в виде произвольной кривой ab , которая не пересекает продольную ось симметрии образца, и прове-

дем касательные к ней в точках a и b , как показано на рис. 1. Поскольку нагружение и деформирование образца симметрично относительно его продольной оси, будем рассматривать только левую половину образца.

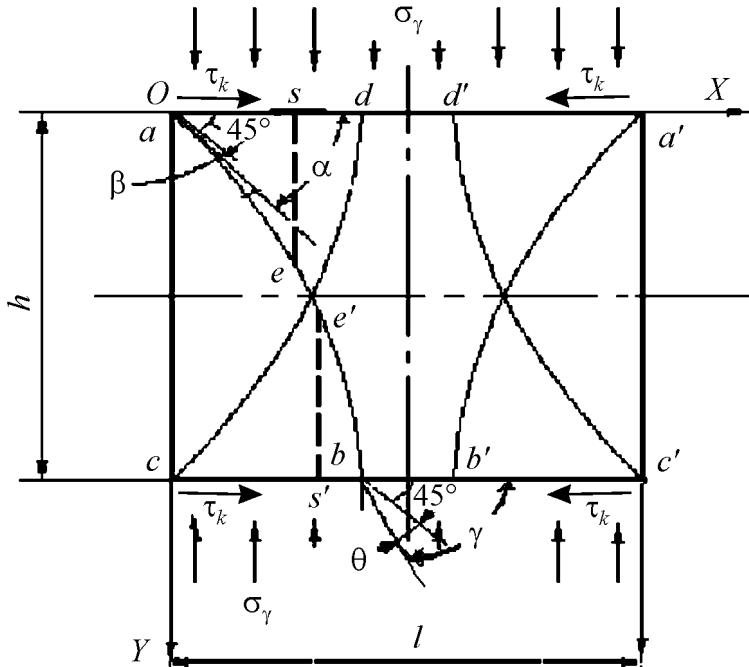


Рис. 1. Схема расположения ТМЭКН в образце горной породы при одноосном сжатии

Рассмотрим равновесие двух треугольников aes и bes' , формируемых ТМЭКН ab и горизонтальными поверхностями образца.

Найдем связь между нормальными и касательными напряжениями через углы наклона α и γ к оси OX касательных к ТМЭКН ae и be' соответственно.

Силы, приложенные к верхнему треугольнику aes и нижнему bes' , спроецируем на площадку на ТМЭКН и нормаль к ней. В результате суммирования проекций сил получим следующие выражения:

– для верхнего треугольника

$$\sigma_{\alpha} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_k \sin 2\alpha, \quad (2)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_k \cos 2\alpha, \quad (3)$$

– для нижнего треугольника

$$\sigma_{\gamma} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\gamma + \tau_k \sin 2\gamma, \quad (4)$$

$$\tau_{\gamma} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\gamma - \tau_k \cos 2\gamma, \quad (5)$$

где τ_k – касательное напряжение, зависящее от контактного трения.

Для нахождения угла α наклона касательной, при котором эффективное касательное напряжение будет иметь максимальное значение, производную $\frac{\partial \tau_{ef}}{\partial \alpha}$ приравняем нулю. Тогда

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2\tau_k}. \quad (6)$$

По аналогии найдем и для нижнего треугольника $be's'$ угол γ наклона касательной, при котором эффективное касательное напряжение будет иметь максимальное значение:

$$\operatorname{tg} 2\gamma = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_k}. \quad (7)$$

Предположим, что $\tau_\alpha > \tau_\gamma$. Тогда условие $\tau_{ef} = k$, соответствующее разрушению материала, достигается в треугольнике aes раньше, чем в треугольнике $be's'$. Это соответствует ряду экспериментальных данных и практических наблюдений о том, что разрушение образца начинается из его угла. Поэтому для точки a будет справедливо равенство $\tau_{ef} = k$.

Дифференцируя по α уравнение (2) с учетом выражения (3), получим для верхнего треугольника aes

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2\tau_\alpha.$$

Действуя по аналогии, получим для нижнего треугольника $be's'$

$$\frac{d\sigma_\gamma}{d\gamma} = -2\tau_\gamma.$$

Как было показано в [1], подстановка в эти уравнения критерия Кулона (1) и интегрирование их на ТМЭКН между точками a и b приводят к уравнению

$$\ln \frac{(\tau_{ef} + \mu\sigma_\gamma)}{(k + \mu\sigma_\alpha)} = -2\mu(\gamma - \alpha). \quad (8)$$

Для горных пород коэффициент внутреннего трения материала существенно больше нуля, но в данной задаче с целью оценки вклада только контактного трения в процесс разрушения образца горной породы внутреннее трение учитывать не будем, т. е. положим, что $\mu = 0$ и поэтому $\tau_{ef} = \tau_\alpha$. Теперь из (8) следует, что $\tau_{ef} = k$ на всей ТМЭКН ab . Это означает, что условие разрушения достигается сразу во всех точках ТМЭКН.

Так как $\sigma_x = 0$ в точке a , из (3) находим

$$\sigma_y = \frac{2k - 2\tau_k \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}. \quad (9)$$

Для определения угла α используем выражения (3) и (5):

$$\alpha = \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{\tau_k}{k}\right). \quad (10)$$

Теперь уравнение (9) можно записать в виде

$$\sigma_y = 2k \sin 2\alpha. \quad (11)$$

Это уравнение определяет зависимость предельного напряжения в сжимаемом образце от контактного трения.

Учитывая, что $\frac{\tau_k}{k} > 0$ и угол наклона ТМЭКН без учета внутреннего и контактного трения равен $\pi/4$, можно записать:

$$\alpha = \pi/4 - \beta, \quad (12)$$

где β – угол изменения наклона ТМЭКН от действия контактного трения в точке a . Тогда

$$\beta = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{\tau_k}{k}\right).$$

Из выражений (4) и (6) определим угол γ :

$$\gamma = \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{\tau_k}{k}\right),$$

Из этого следует, что $\gamma > \pi/4$, и можно записать:

$$\gamma = \pi/4 + \theta, \quad (13)$$

где $\theta = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{\tau_k}{k}\right)$ – угол изменения наклона ТМЭКН от действия контактного трения в точке b .

Поскольку $\alpha < \gamma$, а $\beta = \theta$, ТМЭКН является выпуклой кривой, симметрично изгибающейся при изменении величины контактного трения.

Выше было отмечено, что разрушение в рассматриваемом случае происходит во всех точках ТМЭКН ab одновременно, а в данной задаче в силу ее симметрии существуют также ТМЭКН $a'b'$, cd и $c'd'$. Поэтому можно сделать вывод о том, что разрушение образца будет происходить по траекториям aec и $a'e'c'$, что качественно совпадает с реальной картиной разрушения песчано-цементных образцов, приведенной на рис. 2.

При увеличении контактного трения, как видно из выражений (12) и (13), угол α уменьшается, а угол β увеличивается. При этом ТМЭКН ab (см. рис. 1) становится более выпуклой, т.е. ее левая верхняя ветвь приближается к верхней горизонтальной поверхности образца, а ее правая нижняя ветвь – к вертикальной оси, параллельной направлению действия нагрузки. Это означает, что возрастание контактного трения при неизменной предельной сжи-

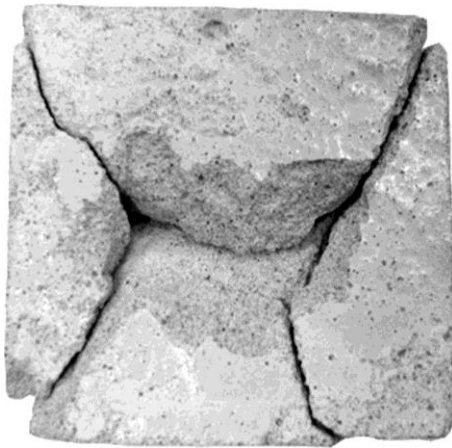


Рис. 2. Песчано-цементный образец, разрушенный одноосным сжатием

мающей нагрузке приводит к увеличению поверхностей разрушения, соответствующих траекториям aec и $a'e's'$, и размеру отколовшихся от образца отделиностей.

Для сравнения с результатами, получаемыми без учета действия контактного трения на поверхности приложения нагрузки и внутреннего трения материала, рассмотрим частный случай, когда $\tau_k = 0$ и $\mu = 0$. Из выражения (10) находим, что $\alpha = \pi/4$. С учетом этого из выражения (11) находим

$$\sigma_y = 2k,$$

что совпадает с известными результатами [3].

Таким образом, используя полученные результаты, можно определить разрушающее нормальное напряжение в угловых областях образца и вид ТМЭКН в случае, когда она пересекает продольную ось симметрии образца.

Следует отметить, что вопрос о виде ТМЭКН в случае пересечения ею продольной оси симметрии образца требует самостоятельного исследования.

1. Локшина Л.Я. Исследование предельного состояния деформируемого тела с учетом внутреннего трения / Л.Я. Локшина, Ю.А. Костандов, Л.М. Васильев // Современные проблемы механики сплошной среды : междунар. науч. конф. 13–15 октября 2009 г., Ростов-на-Дону : труды конф. – 2009. – Т. 2. – С. 131–136.
2. Васильев Л.М. Метод расчёта предела прочности горных пород на одноосное сжатие при линейной связи между константами напряжения / Л.М.Васильев // Геотехническая механика: Межведомств. сб. науч. работ. – Днепропетровск: ИГТМ НАНУ, 2003. – Вып. 42. – С. 73–80.
3. Качанов Л.М. Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – 419 с.

Ю.А. Костандов, Л.Я. Локшина

ВПЛИВ КОНТАКТНОГО ТЕРТЯ НА ГРАНИЧНЕ НАПРУЖЕННЯ В ЗРАЗКУ ГІРСЬКОЇ ПОРОДИ ТА ВИД ТРАЄКТОРІЇ РУЙНУВАННЯ

Виконано аналіз напружень на траєкторії максимальних ефективних дотичних напружень (ТМЕДН) у зразку гірської породи під час його одновісного стискування. Враховано вплив контактної тертя на поверхні прикладення навантаження на

граничне напруження у зразку, на вид траєкторії руйнування. Визначено кути нахилу ТМЕКН. Проведено порівняння отриманих результатів з відомими результатами для випадку відсутності контактної тертя.

Ключові слова: зразок гірської породи, навантаження, дотичні напруження, граничне напруження, контактне тертя, траєкторія руйнування

Yu.A. Kostandov, L.Ya. Lokshina

INFLUENCE OF THE CONTACT FRICTION ON LIMITING STRESS
AND VIEW OF DESTRUCTION TRAJECTORY IN THE SAMPLE
OF ROCK AT COMPRESSION

The analysis of tensions on trajectory of maximum effective tangential stresses (TMETS) in rock sample at its monoaxial compression is carried out. Influence of a contact friction on surfaces of the loading application on a limiting stress in a sample and a view of a destruction trajectory is shown. Comparing of the got results is conducted to the known results for the case of absence of contact friction.

Keywords: rock sample, the loading, tangential stresses, contact friction, a limiting stress, a destruction trajectory

Стаття поступила в редакцію 17 юня 2010 года