

УДК 622.831.3.001.5

Ю.А. Костандов, Л.Я. Локшина

## ВЛИЯНИЕ ВНЕШНЕГО И ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ НА ПАРАМЕТРЫ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ОБРАЗЦА ГОРНОЙ ПОРОДЫ ПРИ СЖАТИИ

Таврический национальный университет

*Проведен анализ напряжений на траектории максимальных эффективных касательных напряжений (ТМЭКН) в образце горной породы при его одноосном сжатии. Учтено влияние контактного и внутреннего трения на предельное напряжение в образце и вид траектории разрушения. Проведено сравнение полученных результатов с известными результатами для частных случаев. Получены зависимости предельного напряжения и углов наклона ТМЭКН от внутреннего трения и контактного касательного напряжения обусловленного внешним трением.*

Авторами ранее получены уравнение состояния материала с учетом только внутреннего трения материала [1] и уравнение состояния материала с учетом только внешнего (контактного) трения [2]. В дальнейших исследованиях изучалось напряженно-деформированное состояние образца горной породы при одноосном сжатии с учетом внутреннего трения материала и контактного трения на поверхности приложения нагрузки в предположении, что формирование очагов разрушения в локальных областях происходит на траекториях максимальных эффективных касательных напряжений (ТМЭКН) [3]. Под понятием эффективного касательного напряжения  $\tau_{ef}$  понимается активное касательное напряжение  $\tau_{\alpha}$  за вычетом фрикционной составляющей. Для описания равновесия на ТМЭКН используется критерий Кулона:

$$\tau_{ef} = \tau_{\alpha} - \mu\sigma_{\alpha} \leq k, \quad (1)$$

где  $\tau_{ef}$  – эффективное касательное напряжение на ТМЭКН,  $\tau_{\alpha}$  – активное касательное напряжение на ТМЭКН,  $\mu$  – коэффициент внутреннего трения материала,  $\sigma_{\alpha}$  – нормальное напряжение на ТМЭКН,  $k$  – предельная сопротивляемость материала сдвигу.

Критерий (1) означает, что при  $\tau_{ef} = k$  происходит разрушение, а при  $\tau_{ef} < k$  материал находится в упругом состоянии.

Рассмотрим образец горной породы шириной  $l$  и высотой  $h$  при одноосном сжатии вдоль оси  $OY$  с учетом действия контактного трения на поверхности приложения нагрузки  $\sigma_y$ . Поскольку нагружение и деформирование образца симметрично относительно его продольной оси, будем рассматривать только левую половину образца. Проведем ТМЭКН  $ab$  в виде произвольной кривой и касательные к ней в точках  $a$  и  $b$ , как показано на рис. 1.

Рассмотрим равновесие двух треугольников  $aes$  и  $be's'$ , формируемых ТМЭКН  $ab$  и горизонтальными поверхностями образца.

Найдем связь между нормальными и касательными напряжениями через углы наклона  $\alpha$  и  $\gamma$  к оси  $OX$  касательных к ТМЭКН  $ae$  и  $be'$  соответственно.

Силы, приложенные к верхнему треугольнику  $aes$  и нижнему треугольнику  $be's'$ , спроецируем на площадку на ТМЭКН и нормаль к ней. В результате суммирования проекций сил получим следующие выражения для верхнего треугольника  $aes$ :

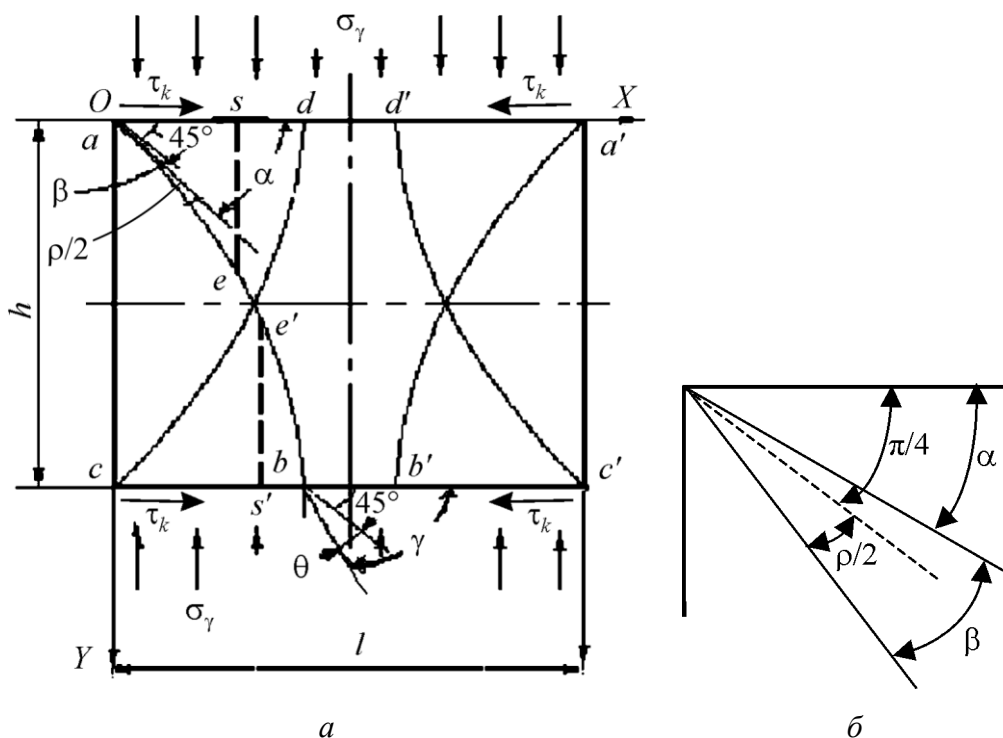


Рис. 1. Схема расположения (а) и углы наклона (б) ТМЭКН в образце горной породы при одноосном сжатии

$$\sigma_\alpha = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_k \sin 2\alpha, \quad (2)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_k \cos 2\alpha, \quad (3)$$

где  $\tau_k$  – касательное напряжение, обусловленное внешним трением.

Подставляя выражения (2) и (3) в (1), получим уравнение для эффективного касательного напряжения:

$$\tau_{ef} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_k \cos 2\alpha - \mu \left( -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_k \sin 2\alpha \right). \quad (4)$$

Действуя по аналогии, получим соответствующие уравнения для нижнего треугольника  $be's'$ :

$$\sigma_\gamma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\gamma + \tau_k \sin 2\gamma, \quad (5)$$

$$\tau_\gamma = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\gamma - \tau_k \cos 2\gamma,$$

$$\tau_{ef} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\gamma - \tau_k \cos 2\gamma - \mu \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\gamma + \tau_k \sin 2\gamma \right). \quad (6)$$

Дифференцируя уравнение (2) по  $\alpha$ , получим:

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -(\sigma_x + \sigma_y) \sin 2\alpha - 2\tau_k \cos 2\alpha,$$

и, с учетом (3), для верхнего треугольника  $aes$  можем записать:

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2\tau_\alpha.$$

Подставляя в это уравнение критерий Кулона (1), получим важное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2(\tau_{ef} + \mu\sigma_\alpha). \quad (7)$$

Действуя по аналогии, получим для нижнего треугольника  $be's'$ :

$$\frac{d\sigma_\gamma}{d\gamma} = -2(\tau_{ef} + \mu\sigma_\gamma). \quad (8)$$

Каждое из уравнений (7) и (8) является уравнением состояния материала на ТМЭКН. Их решение сводится к интегрированию на ТМКЭН между точками  $a$  и  $b$ :

$$\int_a^b \frac{d\sigma_\alpha}{(\tau_{ef} + \mu\sigma_\alpha)} = -2 \int_a^b d\alpha,$$

откуда

$$\ln(\tau_{ef} + \mu\sigma_\alpha) \Big|_a^b = -2\mu\alpha \Big|_a^b.$$

Из практических наблюдений известно, что в ряде случаев разрушение образца начинается из угла. Поэтому для этих случаев можно полагать, что

условие разрушения материала  $\tau_{ef} = k$  выполняется в точке  $a$  и достигается в треугольнике  $aes$  раньше, чем в треугольнике  $be's'$ . Следовательно,

$$\ln(\tau_{ef} + \mu\sigma_\gamma) - \ln(k + \mu\sigma_\alpha) = -2\mu(\gamma - \alpha). \quad (9)$$

Для решения уравнения (9) необходимо найти углы  $\alpha$  и  $\gamma$  наклона касательных к ТМЭКН в точках  $a$  и  $b$  соответственно. Для нахождения угла  $\alpha$ , при котором эффективное касательное напряжение будет иметь максимальное значение, приравняем производную  $\frac{\partial \tau_{ef}}{\partial \alpha}$  нулю:

$$\frac{\partial \tau_{ef}}{\partial \alpha} = (\sigma_x + \sigma_y) \cos 2\alpha - 2\tau_k \sin 2\alpha + \mu(\sigma_x + \sigma_y) \sin 2\alpha + 2\mu\tau_k \cos 2\alpha = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{1 + \mu \frac{2\tau_k}{(\sigma_x + \sigma_y)}}{\frac{2\tau_k}{(\sigma_x + \sigma_y)} - \mu}. \quad (10)$$

Введем обозначение  $\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\tau_k}{(\sigma_x + \sigma_y)}$ , где  $\beta$  – угол поворота ТМЭКН за счет действия внешнего трения. Тогда, учитывая, что  $\mu = \operatorname{tg} \rho$ , где  $\rho$  – угол внутреннего трения материала, получаем:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{1 + \operatorname{tg} \rho \operatorname{tg} 2\beta}{\operatorname{tg} 2\beta - \operatorname{tg} \rho} = \operatorname{ctg} (2\beta - \rho),$$

откуда

$$\alpha = \pi/4 + \rho/2 - \beta, \quad (11)$$

где

$$\beta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\tau_k}{(\sigma_x + \sigma_y)}. \quad (12)$$

По аналогии найдем для нижнего треугольника  $be's'$  угол наклона  $\gamma$  касательной к ТМЭКН, при котором эффективное касательное напряжение будет иметь максимальное значение:

$$\operatorname{tg} 2\gamma = \frac{1 + \mu \frac{2\tau_k}{(\sigma_x - \sigma_y)}}{\frac{2\tau_k}{(\sigma_x - \sigma_y)} - \mu}. \quad (13)$$

Введем обозначение  $\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\tau_k}{(\sigma_x - \sigma_y)}$ , где  $\theta$  – угол поворота ТМЭКН от действия внешнего трения. Тогда

$$\operatorname{tg} 2\gamma = \frac{1 + \mu \operatorname{tg} 2\theta}{\operatorname{tg} 2\theta - \mu} = \frac{1 + \operatorname{tg} \rho \operatorname{tg} 2\theta}{\operatorname{tg} 2\theta - \operatorname{tg} \rho} = \operatorname{ctg} (2\theta - \rho),$$

откуда

$$\gamma = \pi/4 + \rho/2 - \theta, \quad (14)$$

где

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\tau_k}{(\sigma_x - \sigma_y)}. \quad (15)$$

Из сравнения (12) и (15), с учетом того, что  $\sigma_x < \sigma_y$ , следует, что  $\beta > \theta$ . Тогда из (11) и (14) получаем, что  $\alpha < \gamma$ . Следовательно, ТМЭЖН в данном случае является выпуклой кривой.

Поскольку из (11) и (14) следует, что  $(\gamma - \alpha) = \beta - \theta$ , выражение (9) можно записать в виде:

$$\frac{(\tau_{ef} + \mu\sigma_\gamma)}{(k + \mu\sigma_\alpha)} = \exp 2\mu(\theta - \beta). \quad (16)$$

Так как  $\sigma_x = 0$  в точке  $a$ , из (2), (4) и (12) находим, что в точке  $a$ :

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_y}{2}(1 + \cos 2\alpha) - \tau_k \sin 2\alpha; \quad (17)$$

$$\tau_{ef} = k = \frac{\sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_k \cos 2\alpha - \mu \left( \frac{\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_k \sin 2\alpha \right); \quad (18)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\tau_k}{\sigma_y}. \quad (19)$$

Из (17) с учетом (10), проведя ряд преобразований, получим:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_y}{2} - \frac{\sin \rho}{2} \sqrt{\sigma_y^2 + 4\tau_k^2}. \quad (20)$$

Из (18) с учетом (10) следует:

$$(2k + \mu\sigma_y) = \sqrt{(1 + \mu^2)(\sigma_y^2 + 4\tau_k^2)}. \quad (21)$$

Для нахождения  $\sigma_y$  возведем левую и правую части уравнения (21) в квадрат, приведем подобные и получим уравнение

$$\sigma_y^2 - 4k\mu\sigma_y - 4 \left[ k^2 - (1 + \mu^2)\tau_k^2 \right] = 0, \quad (22)$$

имеющее корни:  $\sigma_{y1,2} = 2k\mu \pm \sqrt{4k^2\mu^2 + 4 \left[ k^2 - (1 + \mu^2)\tau_k^2 \right]}$ .

Выберем знак «+» перед корнем, т.к. со знаком «-» корень уравнения не имеет физического смысла.

Следовательно, из (22), проведя ряд преобразований, получаем формулу для определения предельного напряжения:

$$\sigma_y = 2k\mu + \frac{2}{\cos \rho} \sqrt{k^2 - \tau_k^2}. \quad (23)$$

Для сравнения с результатами, получаемыми без учета внутреннего и контактного трения, рассмотрим случай, когда  $\mu = 0$  и  $\tau_k = 0$ . Из (23) получаем  $\sigma_y = 2k$ , что совпадает с результатами [4].

Для случая, когда  $\mu = 0$  и  $\tau_k \neq 0$ , из (23) получаем  $\sigma_y = 2\sqrt{k^2 - \tau_k^2}$ , что совпадает с результатами [2].

Для случая, когда  $\tau_k = 0$  и  $\mu \neq 0$ , из (23) получаем  $\sigma_y = 2k(\sin \rho + 1)/\cos \rho$ , что совпадает с полученными ранее результатами [1].

Теперь, с учетом (23), выражение (20) приведем к виду:

$$\sigma_\alpha = \cos \rho \sqrt{k^2 - \tau_k^2}. \quad (24)$$

Для нахождения  $\sigma_x$  в точке  $b$  запишем выражение для  $\tau_{ef}$  для нижнего треугольника  $be's'$ , используя (6) и (13):

$$2\tau_{ef} + \mu(\sigma_x + \sigma_y) = -\sqrt{(1 + \mu^2) \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_k^2 \right]};$$

или, сделав подстановку  $Z = \sigma_x - \sigma_y$ :

$$2\tau_{ef} + \mu(Z + 2\sigma_y) = -\sqrt{(1 + \mu^2) \left[ Z^2 + 4\tau_k^2 \right]}. \quad (25)$$

Решим уравнение (25) относительно  $Z$ :

$$Z_{1,2} = 2\mu(\tau_{ef} + \mu\sigma_y) \pm 2\sqrt{(1 + \mu^2) \left[ (\tau_{ef} + \mu\sigma_y)^2 - \tau_k^2 \right]}.$$

Теперь, подставляя  $(\sigma_x - \sigma_y)$  вместо  $Z$ , получим:

$$\sigma_x = \sigma_y + 2\mu(\tau_{ef} + \mu\sigma_y) \pm 2\sqrt{(1 + \mu^2) \left[ (\tau_{ef} + \mu\sigma_y)^2 - \tau_k^2 \right]}. \quad (26)$$

Вводя обозначение

$$\frac{\tau_k}{\tau_{ef} + \mu\sigma_y} = b, \quad (27)$$

выражение (26) перепишем в виде:

$$\sigma_x = \sigma_y + \frac{2(\tau_{ef} + \mu\sigma_y)}{\cos \rho} \left( \sin \rho \pm \sqrt{1 - b^2} \right), \quad (28)$$

где  $\sigma_y$  определяется из выражения (23).

Для выполнения условия  $\sigma_x < \sigma_y$  следует перед корнем в (28) выбрать знак «-» и наложить ограничение на параметр  $b$  :

$$b^2 < \cos^2 \rho. \quad (29)$$

Далее найдем  $\sigma_y$  в нижнем треугольнике  $be's'$ , используя выражения (5), (13), (23) и (28) со знаком «-» перед корнем:

$$\sigma_y = \sigma_y - \cos \rho (\tau_{ef} + \mu \sigma_y) \sqrt{1-b^2}. \quad (30)$$

Подставляя выражения для  $\sigma_\alpha$  и  $\sigma_y$  из (24) и (30) соответственно в выражение (16) и осуществляя ряд преобразований, получим:

$$\tau_{ef} = \frac{(k + \sin \rho \sqrt{k^2 - \tau_k^2}) \exp 2\mu(\theta - \beta)}{1 - \sin \rho \sqrt{1-b^2}} - \mu \sigma_y. \quad (31)$$

С учетом (27) получим уравнение:

$$\frac{\tau_k}{b} (1 - \sin \rho \sqrt{1-b^2}) = (k + \sin \rho \sqrt{k^2 - \tau_k^2}) \exp 2\mu(\theta - \beta). \quad (32)$$

Обозначим

$$(k + \sin \rho \sqrt{k^2 - \tau_k^2}) \exp 2\mu(\theta - \beta) = I. \quad (33)$$

Преобразуем (19) с учетом (23):

$$\beta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\tau_k \cos \rho}{k \sin \rho + \sqrt{k^2 - \tau_k^2}}. \quad (34)$$

Из (15) с учетом (30) и (27) следует:

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{b \cos \rho}{\sin \rho - \sqrt{1-b^2}}. \quad (35)$$

Получаем:

$$(\theta - \beta) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{b \cos \rho}{(\sin \rho - \sqrt{1-b^2})} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\tau_k \cos \rho}{k \sin \rho + \sqrt{k^2 - \tau_k^2}}. \quad (36)$$

Подставляя (36) в (33), получим:

$$I = (k + \sin \rho \sqrt{k^2 - \tau_k^2}) \exp \mu \left( \operatorname{arctg} \frac{b \cos \rho}{(\sin \rho - \sqrt{1-b^2})} - \operatorname{arctg} \frac{\tau_k \cos \rho}{k \sin \rho + \sqrt{k^2 - \tau_k^2}} \right).$$

С учетом этого выражение (32) примет вид:

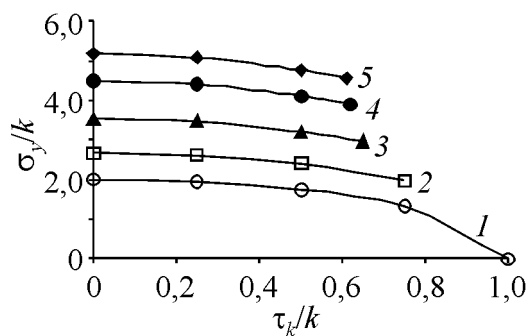
$$-\tau_k \sin \rho \sqrt{1-b^2} = bI - \tau_k. \quad (37)$$

Возведем в квадрат правую и левую части уравнения (37) и преобразуем полученное выражение. В результате получим:

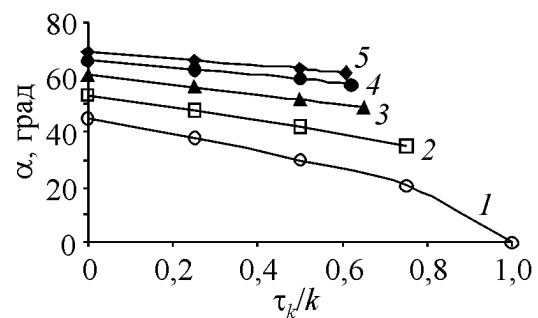
$$b^2 [I^2 + (\tau_k \sin \rho)^2] - 2\tau_k bI + \tau_k^2 \cos^2 \rho = 0. \quad (38)$$

Уравнение (38) решается численным методом с учетом условия (29) для каждой конкретной задачи. При этом значения  $\rho$ ,  $\mu$  и  $k$  определяются из таблиц свойств материалов, а значения  $\sigma_y$  и  $\beta$  – из выражений (23) и (34). Затем из выражений (31) и (35) находятся величины  $\tau_{ef}$  и  $\theta$ , знание которых позволяет полностью определить вид ТМКЭН и углы наклона касательных к ней в точках  $a$  и  $b$ .

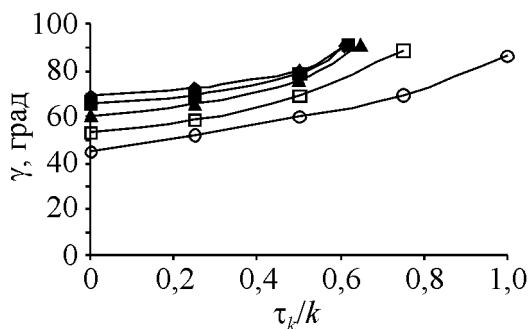
Для нахождения корней уравнения (38) был разработан алгоритм, реализованный в среде Microsoft Excel. В результате вычислений получены зависимости, приведенные на рис. 2–4.



**Рис. 2.** Зависимости предельного напряжения  $\sigma_y$  от касательного напряжения  $\tau_k$  на поверхности приложения нагрузки для различных значений коэффициента внутреннего трения  $\mu$ : 1 – 0, 2 – 0,3, 3 – 0,6, 4 – 0,9, 5 – 1,1



**Рис. 3.** Зависимости угла наклона  $\alpha$  касательной к ТМКЭН от касательного напряжения  $\tau_k$  на поверхности приложения нагрузки для различных значений коэффициента внутреннего трения  $\mu$ . Обозначения те же, что и на рис. 2



**Рис. 4.** Зависимости угла наклона  $\gamma$  касательной к ТМКЭН от касательного напряжения  $\tau_k$  на поверхности приложения нагрузки для различных значений коэффициента внутреннего трения  $\mu$ . Обозначения те же, что и на рис. 2



Из приведенных на рис. 2–4 зависимостей следует увеличение предельного напряжения  $\sigma_y$  и углов наклона  $\alpha$  и  $\gamma$  с ростом коэффициента внутреннего трения  $\mu$ . При росте касательного напряжения  $\tau_k$  предельное напряжение  $\sigma_y$  и угол наклона  $\alpha$  уменьшаются, а угол наклона  $\gamma$  увеличивается.

1. Локшина Л.Я. Расчет предела прочности хрупких материалов с учетом внутреннего трения [Текст] / Л.Я. Локшина, Ю.А. Костандов, Д.Л.Васильев // Геотехническая механика. Межвед. сб. научн. трудов. – Днепропетровск, 2009. – № 82. – С. 199–206.
2. Костандов Ю.А. Влияние контактного трения на предельное напряжение в образце горной породы и вид траектории разрушения при сжатии [Текст] / Ю.А. Костандов, Л.Я. Локшина // Физико-технические проблемы горного производства. – 2010. – №13. – С.42–47.
3. Васильев Л.М. Метод расчёта предела прочности горных пород на одноосное сжатие при линейной связи между контактными напряжениями [Текст] / Л.М. Васильев, Д.Л. Васильев // Геотехническая механика: Межведомств. сб. науч. работ. – Днепропетровск: ИГТМ НАНУ, 2003. – Вып. 42. – С. 73–80.
4. Качанов Л.М. Основы теории пластичности [Текст] / Л.М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – 419 с.

Ю.А. Костандов, Л.Я. Локшина

#### ВПЛИВ ЗОВНІШНЬОГО І ВНУТРІШНЬОГО ТЕРТЯ НА ПАРАМЕТРИ ГРАНИЧНОГО СТАНУ ЗРАЗКА ГІРСЬКОЇ ПОРОДИ ПРИ СТИСКУВАННІ

*Проведено аналіз напружень на траєкторії максимальних ефективних дотичних напружень (ТМЕДН) в зразку гірської породи при його одноосному стискуванні. Врахований вплив зовнішнього і внутрішнього тертя на граничне напруження в зразку та вид траєкторії руйнування. Проведено порівняння отриманих результатів з відомими результатами для окремих випадків. Отримані залежності граничної напруги і кутів нахилу ТМЕДН від внутрішнього тертя і контактної дотичної напруги, що зумовлена зовнішнім тертям.*

Yu.A. Kostandov, L.Ya. Lokshina

#### EXTERNAL AND INTERNAL FRICTION EFFECT ON THE LIMITING STATE PARAMETERS FOR A COMPRESSED ROCK SPECIMEN

*Stresses on the maximum effective shear stress trajectory in a uniaxial compressed rock specimen are analyzed subject to contact and internal friction effects on the specimen's ultimate stress and the fracture trajectory form. Obtained results are compared with the former data for some special cases. Dependence of limiting stress and stress trajectory slope on internal friction and contact shear stress induced by the external friction was established.*