

УДК 622.794.254

С.В. Тынына<sup>1</sup>, А.Е. Шевченко<sup>2</sup>, И.И. Чоботько<sup>3</sup>

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ФИЛЬТРОВАНИЯ ТОНКОДИСПЕРСНОЙ СУСПЕНЗИИ ПРИ ПУЛЬСИРУЮЩЕМ ДАВЛЕНИИ

<sup>1</sup>Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова НАН Украины

<sup>2</sup>Technological University «Frieberg Mining Academy»

<sup>3</sup>Институт физики горных процессов НАН Украины

*Сложность описания процесса фильтрации тонкодисперсной суспензии при пульсирующем давлении обусловлена значительным количеством влияющих на процесс факторов, учет влияния которых представляет сложную научную задачу.*

*В статье освещены результаты теоретических исследований процесса фильтрации тонкодисперсной суспензии при пульсирующем давлении. На основании уравнений движения жидкости в пористой среде (Навье-Стокса) с использованием методов критериального моделирования построена математическая модель указанного процесса, учитывающая влияние пульсирующего давления, изменение влажности суспензии и основные ее физико-механические свойства. Установлены основные факторы, влияющие на процесс фильтрации суспензии при пульсирующем давлении.*

*Результаты исследований могут быть использованы при разработке фильтровальных установок, работающих при пульсирующем давлении, и технологических процессов, протекающих в этих установках.*

**Ключевые слова:** тонкодисперсная суспензия, фильтрация, пульсирующее давление, математическая модель.

### Введение

Одним из наиболее перспективных методов повышения производительности фильтровальных установок является использование пульсирующего давления [1, 2].

Фильтровальные установки, работающие при пульсирующем давлении, не нашли широкого применения в промышленности. Это связано как с конструктивными трудностями их реализации, так и со сложностью исследований процессов, протекающих в этих установках.

Получение надежных теоретических методов, описывающих процесс фильтрации тонкодисперсной суспензии при пульсирующем давлении, затруднительно ввиду большого количества факторов, влияющих на этот процесс, в том числе, на микроуровне (ионно-катионный состав воды, толщина двойного электрического слоя на поверхности частиц, размеры пор,

форма частиц и др.). Особенности поведения жидкой и твердой фаз суспензии при воздействии пульсирующего давления для разных типов материалов носит разрозненный характер, что обусловило широкое разнообразие математических моделей, получаемых исследователями при изучении данного процесса.

Большинство математических моделей, описывающих вышеуказанный процесс, являются обобщенными и представляют собой сложные дифференциальные уравнения, практическое применение которых затруднительно. Другие модели – эмпирические – носят частный характер и зачастую не учитывают влияние основных технологических параметров исследуемого процесса.

В связи с вышеизложенным моделирование процесса фильтрации тонкодисперсной суспензии при пульсирующем давлении с учетом основных технологических параметров процесса и ее физико-механических свойств является **актуальным**.

### **Цель и постановка задачи**

Исследования процесса фильтрации тонкодисперсных суспензий основываются на уравнениях движения жидкости в пористой среде, состоящих из уравнений неразрывности и сохранения баланса импульса (уравнения Навье-Стокса) [3], а также на эмпирических уравнениях Дарси [4]. Эти уравнения используют для моделирования процесса фильтрации суспензии при статическом давлении.

Использование пульсирующего давления приводит к увеличению числа влияющих на процесс фильтрации факторов: амплитуды пульсации давления (или динамической составляющей давления) и частоты, которые необходимо учитывать при разработке математических моделей. При этом сам процесс фильтрации суспензии и его исследования усложняются.

Следовательно, **целью** настоящей работы является моделирование процесса фильтрации тонкодисперсной суспензии при пульсирующем давлении с учетом влияния амплитуды пульсации давления, частоты, влажности суспензии и основных физико-механических свойств.

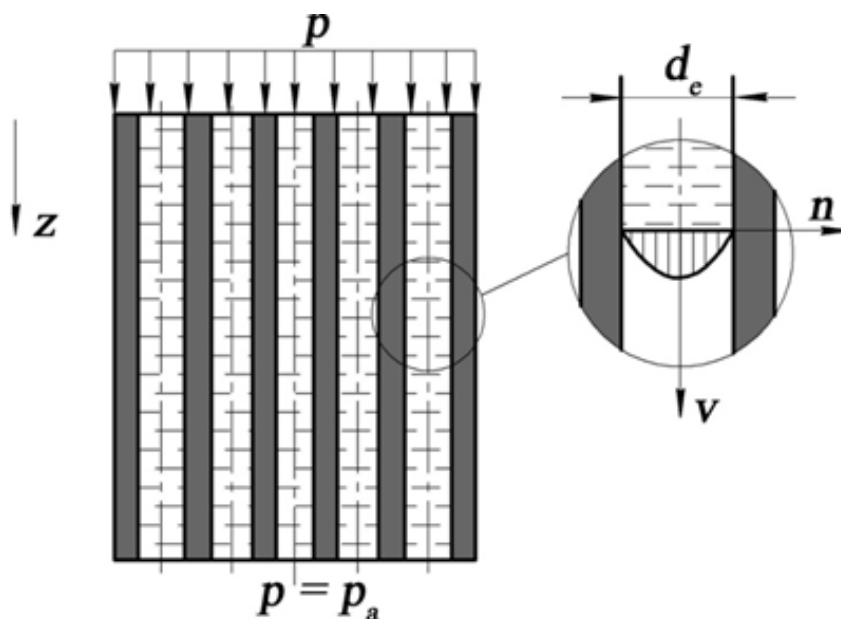
Для достижения цели поставлена **задача**: основываясь на уравнениях движения жидкости в пористой среде, а также используя методы критериального моделирования, установить зависимость между основными факторами, влияющими на процесс фильтрации тонкодисперсной суспензии при пульсирующем давлении, и технологическими параметрами процесса.

### **Движение жидкости в поре суспензии**

Тонкодисперсную суспензию можно рассматривать как пористый слой, поры (каналы) которого заполнены жидкостью. При этом поры имеют различную длину и диаметры.

Представим пористый слой в виде трубок (рис. 1), диаметр которых равен эквивалентному диаметру  $d_e$  (идеализированный случай) [4] и рассмотрим движение жидкости в одной поре. Движение жидкости в канале происходит за счет воздействия пульсирующего давления  $p = p_{st} + p_d$  (где  $p_{st}$  и  $p_d$  – статическая и динамическая составляющие давления соответственно).

Для описания движения жидкости в поре (рис. 1) приняты допущения: жидкость несжимаемая с постоянной вязкостью; поток жидкости в каналах ламинарный; пористый слой несжимаемый.



**Рис. 1.** Схема движения жидкости в идеализированной пористой среде:  $p$  – суммарное давление;  $p_a$  – атмосферное давление;  $v$  – скорость движения жидкости;  $n$  – нормаль;  $z$  – координата;  $d_e$  – эквивалентный диаметр пор

Рассмотрим идеализированный случай однонаправленного движения несжимаемой вязкой жидкости, в котором все скорости имеют одинаковые направления. Выделим в потоке жидкости,двигающейся параллельно оси  $z$ , элементарный параллелепипед, грани которого ориентированы по осям координат (рис. 2). Определим проекции на ось  $z$  внешних сил, действующих на элементарный объём.

Приращение статической составляющей давления равно:

$$dp_{st} = \frac{\partial p_{st}}{\partial z} dz.$$

Приращение динамической составляющей давления равно:

$$dp_d = \frac{\partial p_d}{\partial z} dz.$$

Сила тяжести элементарного объёма (см. рис. 2) равна:  $-(\rho g)dxdydz$ .

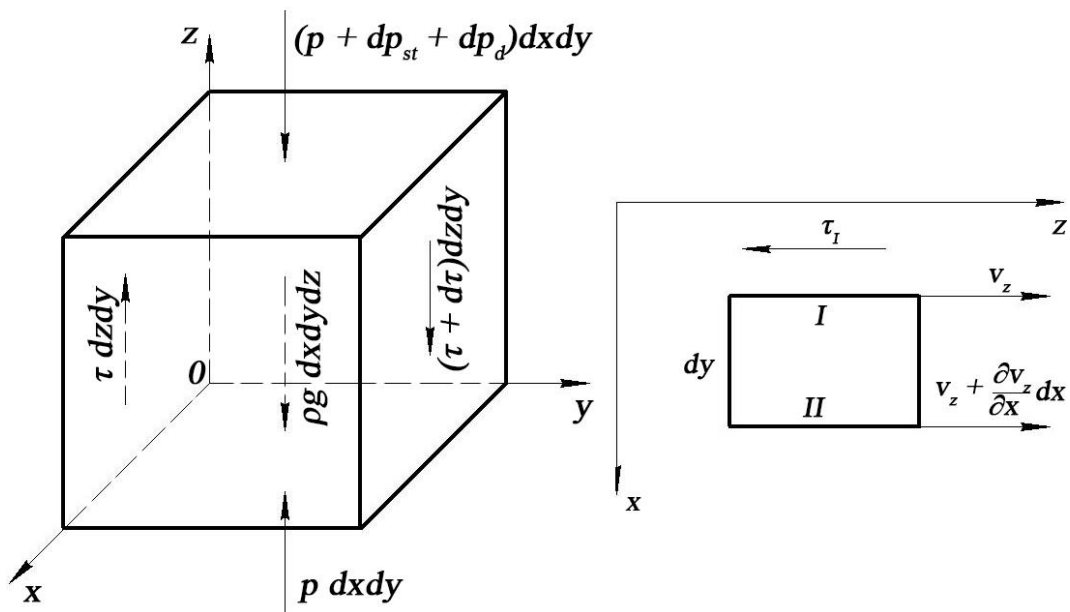


Рис. 2. Силы, действующие на элементарный объем жидкости [5]:  $\tau$  – касательное напряжение;  $\rho$  – плотность жидкости;  $g$  – гравитационная постоянная;  $x, y, z$  – оси координат

Сила давления равна:

$$p dx dy - \left( p + \frac{\partial p_{st}}{\partial z} dz + \frac{\partial p_d}{\partial z} dz \right) dx dy = \left( -\frac{\partial p_{st}}{\partial z} - \frac{\partial p_d}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Для определения силы трения примем допущения, что жидкость движется только в направлении оси  $z$  и скорость движения слоев изменяется только в направлении оси  $x$ , возрастая с увеличением  $x$ . Поскольку изменений силы вдоль оси координат  $y$  нет, представим выделенный элемент в плане (рис. 2). Силы трения действуют на поверхности  $I$  и  $II$ . По закону Ньютона о силе трения [5]:

$$\tau_I = -\mu \frac{\partial v_z}{\partial x} dz dy;$$

$$\tau_{II} = \mu \frac{\partial v_z}{\partial x} dz dy + \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} dx dz dy;$$

Результирующая действия сил трения равна

$$\tau_I + \tau_{II} = -\mu \frac{\partial v_z}{\partial x} dz dy + \mu \frac{\partial v_z}{\partial x} dz dy + \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} dx dz dy = \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} dx dz dy.$$

Если скорость изменяется по всем осям координат  $x, y$  и  $z$ , то результирующая сила трения равна

$$\mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) dx dz dy.$$

Сумма проекций сил, действующих на ось  $z$ , будет равна произведению массы выделенного элементарного объема на ускорение:

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} dx dy dz = \left( -\frac{\partial p_{st}}{\partial z} - \frac{\partial p_d}{\partial z} \right) dx dy dz - \rho g dx dy dz + \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} \right) dz dx dy,$$

где  $\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} dx dy dz$  – сила инерции элементарного объема жидкости.

Сократив последнее выражение на величину элементарного объёма ( $dx dy dz$ ), получим уравнение баланса сил, отнесённых к единице объёма:

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p_{st}}{\partial z} - \frac{\partial p_d}{\partial z} - \rho g + \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right). \quad (1)$$

Зависимость (1) представляет собой уравнение Навье-Стокса, описывающее одномерное движение потока идеальной жидкости в капилляре пористой среды при пульсирующем давлении.

Пренебрегая массовыми силами в виду их незначительного влияния по сравнению с силами внешнего воздействия и силами инерции (принимая  $\rho g = 0$ ), уравнение (1) запишется в виде:

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} - \left( \frac{\partial p_{st}}{\partial z} + \frac{\partial p_d}{\partial z} \right). \quad (2)$$

Аналогичное уравнение движения жидкости при статическом давлении, имеет вид [6]:

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} - \frac{\partial p_{st}}{\partial z}.$$

### Моделирование процесса фильтрования

#### *Фильтрование жидкости через пористый слой*

Решение уравнения (2) затруднительно в связи с отсутствием информации по выбору граничных условий. Поэтому, применив методы подобия, получим критериальное уравнение. Разделив все члены уравнения (2) на  $\rho \frac{\partial v_z}{\partial t}$ , получим:

$$1 = \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \frac{\partial t}{\rho \partial v_z} - \frac{\partial t}{\rho \partial v_z} \left( \frac{\partial p_{st}}{\partial z} + \frac{\partial p_d}{\partial z} \right). \quad (3)$$

Слагаемые в правой части уравнения (3) являются безразмерными величинами.

Из первого члена, заменив  $z$  на  $l$  ( $l$  – высота пористого слоя) и вычеркнув символы дифференцирования и направления, получена величина, обратно пропорциональная критерию Рейнольдса [6]:

$$\frac{\mu v t}{l^2 \rho v} = \frac{\mu}{\rho v l} = \frac{1}{Re}. \quad (4)$$

Далее из второго члена получен критерий Эйлера, характеризующий отношение сил давления к инерционным силам:

$$\frac{p t}{l \rho v} = \frac{p}{\rho v^2} = Eu. \quad (5)$$

Для характеристики геометрических особенностей рассматриваемой системы в критериальное уравнение введен параметрический критерий, характеризующий отношение высоты пористого слоя к эквивалентному диаметру пор ( $\Gamma = l/d_p$ ).

Согласно [6] эквивалентный диаметр каналов определяется как:

$$d_\varepsilon = \frac{\Phi d_p \varepsilon}{1 - \varepsilon}, \quad (6)$$

где  $\Phi$  – фактор формы частиц;  $d_p$  – эквивалентный диаметр частиц.

Критериальное уравнение, описывающее движение потока фильтруемой жидкости через пористый слой, запишем в виде [5]:

$$Eu = A Re^{-m} \Gamma^n, \quad (7)$$

где  $A$ ,  $n$  и  $m$  – постоянные, определяемые экспериментально.

Для малых диаметров каналов принято допущение о ламинарном режиме движения жидкости. Для ламинарного режима при числе Рейнольдса  $Re < 50$  зависимость (7) запишется в виде [4]:

$$Eu = \frac{A l}{Re d_p}. \quad (8)$$

Заменив скорость движения жидкости в каналах  $v$  на скорость  $v_f$ , отнесенную к общей площади фильтра и определяемую соотношением  $v_f = v\varepsilon$ , критерий Рейнольдса для данного случая определится равенством  $Re = v d_p \rho / \mu$  [6]. Учитывая это и используя выражение (6) в зависимости (8), получим:

$$v_f = \frac{p \varepsilon^3 \Phi^2 d_p^2}{A \mu l (1 - \varepsilon)^2}. \quad (9)$$

С другой стороны, скорость фильтрования  $v_f$  равна:

$$v_f = \frac{dV}{S dt}, \quad (10)$$

где  $S$  – площадь фильтра;  $dV$  – приращение объема отфильтрованной жидкости (фильтрата);  $dt$  – приращение времени фильтрования.

Сопоставив зависимости (9) и (10), получим:

$$\frac{dV}{S dt} = \frac{p}{r_o l'} \quad (11)$$

$r_o$  – удельное сопротивление пористого слоя (Па·с/м<sup>2</sup>), равное

$$r_o = \mu \frac{A(1 - \varepsilon)^2}{\Phi^2 d_p^2 \varepsilon^3}.$$

Зависимость (11) представляет собой уравнение Дарси, описывающее процесс фильтрования жидкости через пористый слой при пульсирующем давлении ( $p = p_{st} + p_d$ ).

*Уплотнение слоя суспензии при фильтровании*

В процессе фильтрования суспензии материал уплотняется, при этом удельное сопротивление слоя  $r_o$  возрастает и образуется фильтрат, объемом  $V$ . Рассмотрим колонку суспензии высотой  $L$  и исходной абсолютной влаж-

ностью  $W_0$  (рис. 3), которая фильтруется при пульсирующем давлении. При истечении времени от  $t_0$  до  $t$  высота слоя суспензии уменьшится до значения  $l$  и влажность – до  $W_k$  (за счет изменения коэффициента пористости от  $e_0$  до  $e$ ).

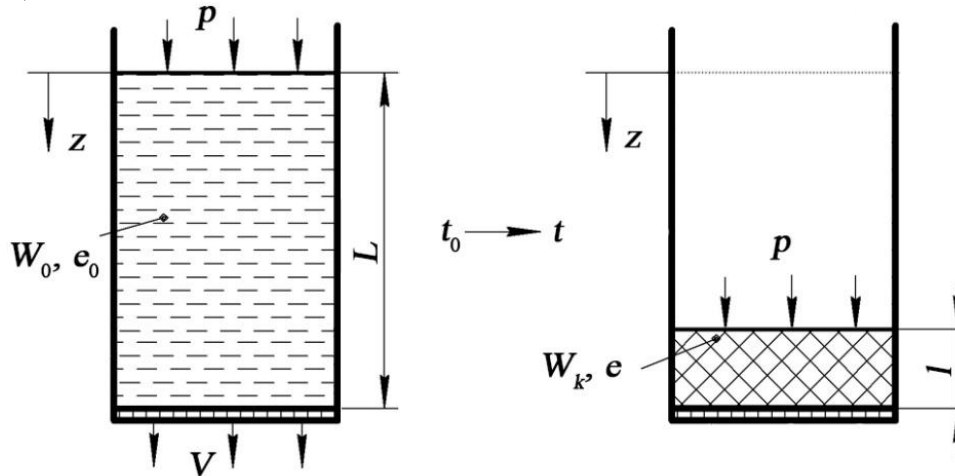


Рис. 3. Схема уплотнения слоя суспензии при фильтровании

Коэффициент пористости материала  $e$  (рис. 3) равен [7]:

$$e = e_0 - \frac{L-l}{L} \cdot (1 + e_0),$$

где  $e_0$  – начальный коэффициент пористости. При этом зависимости начальной и конечной влажности суспензии от коэффициента пористости соответственно равны:

$$W_0 = \frac{\rho e_0}{\rho_s + \rho e_0}; \quad W_k = \frac{\rho e}{\rho_s + \rho e},$$

$\rho_s$  – плотность твердых частиц суспензии,  $\text{кг/м}^3$ .

После преобразования из вышеприведенных зависимостей получим:

$$l = \frac{L(W_0 - 1)(\rho - W_k \rho + W_k \rho_s)}{(W_k - 1)(\rho - W_0 \rho + W_0 \rho_s)}. \quad (12)$$

С другой стороны, объем фильтрата, образуемый при уплотнении слоя суспензии, равен:

$$V = S \left( L \frac{e_0}{1 + e_0} - l \frac{e}{1 + e} \right). \quad (13)$$

Из зависимостей (12) и (13) после проведения соответствующих преобразований получим:

$$V = \frac{LS \rho_s (W_0 - W_k)}{(W_k - 1) \cdot (W_0 \rho - \rho - W_0 \rho_s)}. \quad (14)$$

Для конкретных (постоянных) условий протекания процесса фильтрования при пульсирующем давлении без учета удельного сопротивления фильтровальной перегородки объем фильтрата определяется соотношением:

$$V = S \sqrt{t/r'}, \quad (15)$$

где  $r'$  – приведенное удельное сопротивление слоя материала (учитывающее вязкость жидкости), зависящее от давления фильтрования и свойств суспензии,  $\text{с/м}^2$ . Этот параметр определяется графическим методом и представляет собой угол наклона экспериментальной прямой, построенной в координатах  $tS/V - V/S$  [8].

Параметр  $r'$  в выражении (15) является постоянным во времени и функционально зависимым от величины пульсирующего давления, изменяющегося по гармоническому закону (рис. 4):

$$p = p_{st} + p_d \sin \omega t,$$

где  $\omega$  – круговая частота пульсации, рад/с.

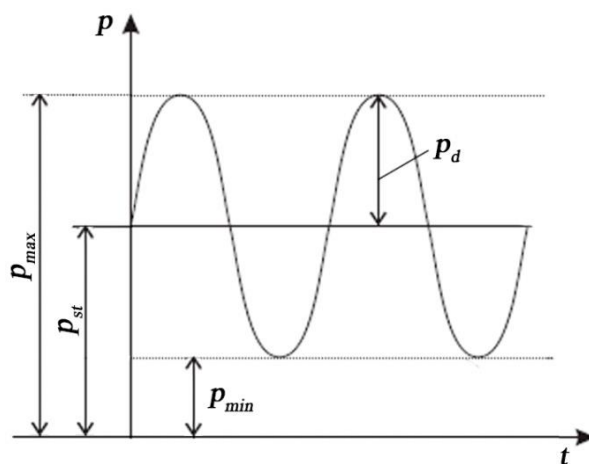


Рис. 4. Схема пульсации давления

Следовательно,  $r' = f(p_{st}, p_d, \omega)$ .

Приравняв правые части зависимостей (14) и (15), а также учитывая последнюю функцию, после соответствующих преобразований получим:

$$t = \frac{r'(p_{st}, p_d, \omega) \cdot L^2 \rho_s^2 (W_0 - W_k)^2}{(W_k - 1)^2 (\rho - W_0 \rho + W_0 \rho_s)^2}. \quad (16)$$

Зависимость (16) позволяет спрогнозировать время (продолжительность) фильтрования  $t$  слоя суспензии высотой  $L$  и исходной влажностью  $W_0$  до конечной заданной влажности суспензии  $W_k$  для процесса, протекающего при пульсирующем давлении с частотой  $\omega$ , статической  $p_{st}$  и динамической  $p_d$  составляющими давления.

Функциональная зависимость  $r' = f(p_{st}, p_d, \omega)$  определяется экспериментально. Для ее определения можно воспользоваться методами планирования и постановки активного эксперимента, а также статистическими методами обработки результатов экспериментальных данных [9].

### Выводы

В результате проведенных теоретических исследований процесса фильтрования тонкодисперсной суспензии при пульсирующем давлении уста-



новлены факторы, влияющие на данный процесс, и разработана математическая модель этого процесса, учитывающая влияние пульсирующего давления, изменение влажности и основные физико-механические свойства суспензии.

Основными факторами, влияющими на процесс фильтрования тонкодисперсной суспензии при пульсирующем давлении, являются: влажность, удельное сопротивление слоя суспензии, динамическая и статическая составляющие давления, частота пульсации давления, высота фильтруемого слоя материала и продолжительность фильтрования.

1. *Фарсанов В.Д.* Вибрационная техника в химической промышленности / В.Д. Фарсанов, Э.Э. Кольман-Иванов. – М.: Химия. – 1985. – 240 с., с ил.
2. *Франчук В.П.* Обезвоживание органо-минеральных осадков Черного моря при комбинированном статическом и динамическом нагружении / В.П. Франчук, А.Е. Шевченко // Вибрации в технике та технологиях. – №4 (80). – 2015 г. – С. 191-199.
3. *Электронный ресурс:* [https://ru.wikipedia.org/wiki/Уравнения\\_Навье\\_–\\_Стокса](https://ru.wikipedia.org/wiki/Уравнения_Навье_–_Стокса).
4. *Леонтьев Н.Е.* Основы теории фильтрации: Учебное пособие / Н.Е. Леонтьев. – М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2009. – 88 с.
5. *Романков П.Г.* Процессы и аппараты химической промышленности: учебник для техникумов / П.Г. Романков, М.И. Курочина, Ю.Я. Мозжерии и др. – Л.: Химия, 1989. – 560 с.
6. *Касаткин А.Г.* Основные процессы и аппараты химической технологии / А.Г. Касаткин. – М.: ГХИ. – 1961. – 832 с.
7. *Цитович Н.А.* Механика грунтов / Н.А. Цитович // Издание четвертое перераб. и доп. Гос. изд. литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам. – Москва: 1963. – 638 с.
8. *Жужиков В.А.* Фильтрование. Теория и практика разделения суспензий / В.А. Жужиков. – М.: Химия. – 1980. – 398 с.
9. *Спиридонов А.А.* Планирование эксперимента при исследовании технологических процессов / А.А. Спиридонов // М.: Машиностроение, 1981. – 184 с., ил.

*С.В. Тинина, О.С. Шевченко, І.І. Чоботько*

## МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ФІЛЬТРУВАННЯ ТОНКОДИСПЕРСНОЇ СУСПЕНЗІЇ ПРИ ПУЛЬСУЮЧОМУ ТИСКУ

Складність опису процесу фільтрування дрібнодисперсної суспензії при пульсуючому тиску обумовлена значною кількістю факторів, які впливають на процес. Урахування цих факторів представляє складну наукову задачу.

У статті освітлено результати теоретичних досліджень процесу фільтрування дрібнодисперсної суспензії при пульсуючому тиску. З використанням рівняння руху рідини в пористому середовищі (Нав'є-Стокса) та методів критеріального моделю-

вання побудовано математичну модель зазначеного процесу, що враховує вплив пульсуючого тиску, зміну вологості суспензії і основні її фізико-механічні властивості. Встановлено основні фактори, що впливають на процес фільтрування суспензії при пульсуючому тиску.

Результати досліджень можуть бути використані при розробці фільтрувальних установок, що працюють при пульсуючому тиску, і технологічних процесів, що протікають у цих установках.

**Ключові слова:** дрібнодисперсна суспензія, фільтрування, пульсуючий тиск, математична модель.

*S.V. Tynyna, A.E. Shevchenko, I.I. Chobotko*

## MODELING IN FILTERING FINE SUSPENSION PULSATING PRESSURE

Difficulties in the description of the process of filtrating fine suspension under pulsed pressure are caused by a big number of factors affecting the process. Determining the influence of these factors is a sophisticated task.

The results of theoretical investigations of the process of filtrating fine suspension with the use of pulsed pressure are given in the paper. On the basis of equations of liquid movement in porous medium (Navier-Stokes equations) and similarity theory methods (pi-theorems), a mathematical model of the considered process is obtained. The model takes into account the influence of the pulsed pressure, moisture change and main physical-and-mechanical properties of the suspension. Main factors affecting the filtration process under pulsed pressure are established.

The results obtained might be used for the development of dewatering machines, which work on the principle of using pulsed pressure, and determining parameters of appropriate technological processes, which take place in these machines.

**Keywords:** fine suspension, filtration, pulsating pressure, mathematical model.