

УДК 551.463, 532.529

## **Основні закономірності нестационарної пульсації газових бульбашок в нестисливій рідині**

С.Г. Федосєєнков, О.І. Шундель

*Федосєєнков Сергій Геннадійович – к.геол.н., завідувач відділу панорамних акустичних систем Державної установи "Науковий гідрофізичний центр Національної академії наук України"; E-mail: 22lex22s@ukr.net*

*Шундель Олексій Іванович – к.фіз-мат.н., старший науковий співробітник відділу панорамних акустичних систем Державної установи "Науковий гідрофізичний центр Національної академії наук України"; E-mail: lixyta666@gmail.com*

**Анотація.** У статті наведено основні рівняння динаміки бульбашок. Розглянуто випадок дії імпульсного тиску при опроміненні звуком бульбашки, а саме динаміку газової бульбашки з урахуванням перехідних процесів встановлення коливань після включення діючої сили (нестационарна динаміка газової бульбашки в рідині). Отримано залежності нестационарних коливань для газових бульбашок у трьох випадках: дорезонансні, резонансні, зарезонансні бульбашки.

**Ключові слова:** коливання, газові бульбашки, втрати, тиск, динаміка, дорезонансний, резонансний, зарезонансний.

**Вступ.** Дослідження динаміки бульбашок має давню історію, починаючи з класичних праць Релея [3, 26]. Особливий інтерес до бульбашок виник через встановлення резонансного характеру їх динаміки – так званого резонансу Міннерта [22]. З'ясувалося, що динаміка газової бульбашки багато в чому подібна до динаміки звичайного класичного осцилятора з одним ступенем свободи, тому результати, накопичені в теорії коливань, з певним ступенем наближеності застосовані і до газових бульбашок [9, 15]. Разом з тим газові бульбашки мають і специфічні риси, властиві лише їм, до яких традиційно відносять механізми дисипації енергії при коливаннях і особливості нелінійної динаміки газових бульбашок [21, 24, 25]. У першому випадку механізм дисипації енергії істотно залежить від розміру бульбашок та частоти звукового поля, оскільки поряд з традиційним радіаційним згасанням він обумовлений специфічним механізмом в'язкісного та теплового поглинання енергії [20, 23]. У другому випадку спостерігається велике різноманіття типів нелінійностей газових бульбашок (різні типи квадратичної та кубічної нелінійності, нелінійності параметричного типу тощо), що істотно залежить як від розміру бульбашок і частоти поля, так і від амплітуди зовнішнього поля. Всім цим випадкам присвячено велику кількість робіт, частково вони розглянуті у ряді монографій та оглядів (наприклад, [12, 21]).

Зазвичай припускають, що бульбашка є сферичною з радіусом  $R$  менше довжини звукової хвилі  $\lambda$  в рідині,  $kR < 1$ . Через суттєву стисливість бульбашок вивчення їх динаміки починають з аналізу радіально-сферичних пульсацій, що мають, як правило, найбільшу амплітуду в порівнянні з іншими типами коливань бульбашок під дією звуку. Введемо сферичну систему координат, помістивши її початок у центрі бульбашки. Тиск і температуру

рідини далеко від бульбашки без звуку позначимо через  $P_0$  і  $T_0$ . Динаміка одиночної бульбашки в нестискуваній рідині описується відомим рівнянням Релея [3, 5, 10, 26]:

$$\rho \left[ R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right] = P_R(t) + P_\infty(t), \quad (1)$$

яке в наближенні адіабатичного рівняння стану газу та з урахуванням в'язкості рідини має вигляд:

$$\rho \left[ R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right] + \frac{2\sigma}{R} + \frac{4\eta\dot{R}}{R} - \left( P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} = -P_\infty(t), \quad (2)$$

де  $P_\infty(t) = P_0 + P_a(t)$ ,  $P_a(t)$  – акустичний тиск;

$R_0$  – рівноважний радіус бульбашки в початковий момент, коли виконується умова

$$P'_0 = P_0 + \frac{2\sigma}{R_0};$$

$\rho$  – щільність;

$\sigma$  – коефіцієнт поверхневого натягу;

$\eta$  – коефіцієнт динамічної в'язкості;

$\gamma$  – показник адіабати, для повітря  $\gamma \approx 1.4$ .

З урахуванням стисливості рідини в першому порядку по  $\frac{\dot{R}}{c}$ , де  $c$  – швидкість звуку, рівняння динаміки бульбашок набуває наступного вигляду [3]:

$$\begin{aligned} & \rho \left[ R\ddot{R} \left( 1 - \frac{2\dot{R}}{c} \right) + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \left( 1 - \frac{4\dot{R}}{3c} \right) \right] + P_\infty + \frac{2\sigma}{R} + \frac{4\eta\dot{R}}{R} - \\ & - \left( P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} - \frac{R}{c} \left( 1 - \frac{\dot{R}}{c} \right) \dot{P}_R = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Рівняння (3) називається рівнянням Херрінга–Флінна [3], воно було отримано в наближенні, коли можна знехтувати стисливістю рідини далеко від бульбашки, тобто коли  $\frac{\partial P_\infty}{\partial t} = 0$ . Для бульбашки в умовах, коли можна знехтувати зміною радіуса за рахунок масообміну, слід писати  $U = \dot{R}$ . Однак у випадку для газових і парових бульбашок за наявності масообміну швидкість частинок рідини не збігається зі швидкістю руху границі внаслідок додаткового потоку маси за допомогою газової дифузії чи фазових перетворень, тобто мас

місце нерівність  $U \neq \dot{R}$ . Для газових бульбашок при  $\frac{U}{c} \ll 1$  та з урахуванням стисливості рідини далеко від бульбашки маємо [4–7]:

$$\rho \left[ R\dot{U} \left( 1 - \frac{2U}{c} \right) + \frac{3}{2} U^2 \left( 1 - \frac{4U}{3c} \right) \right] + P_\infty - P_R(t) - \frac{R}{c} \left( 1 - \frac{U}{c} \right) \dot{P}_R + \frac{R\dot{P}_\infty}{c} = 0. \quad (4)$$

Тут  $U$  – швидкість частинок рідини на поверхні бульбашки, позначення  $\dot{P}_R = \frac{dP_R}{dt} = \left( \frac{\partial P}{\partial t} \right)_R + U \left( \frac{\partial P}{\partial t} \right)_R$  відповідає субстанціальній (повній) похідній за часом від тиску, взятої на поверхні, що рухається. У граничному випадку  $U/c \rightarrow 0$  з (4) слідує рівняння, яке називають рівнянням Релея–Плессета і часто застосовують для аналізу динаміки газових бульбашок при врахуванні слабкої стисливості рідини:

$$\rho \left[ R\ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 \right] + P_\infty - P_R(t) - \frac{R}{c} \dot{P}_R + \frac{R\dot{P}_\infty}{c} = 0. \quad (5)$$

У рівняннях (4), (5) величина тиску  $P_R$  у рідині на межі бульбашки пов'язана з тиском усередині бульбашки  $P'_R$  за допомогою граничної умови:

$$P'_R = P_R + \frac{2\sigma}{R} + \frac{4\eta\dot{R}}{R}, \quad (6)$$

при цьому величина  $P'_R$  для газової бульбашки з урахуванням рівняння адіабатичного стану газу дорівнює:

$$P'_R = \left( P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma}. \quad (7)$$

Видно, що з (5) – (7) випливає (3), якщо покласти  $\frac{\partial P_\infty}{\partial t} = 0$ .

У разі неадіабатичної поведінки газової бульбашки, особливо в умовах, коли радіус бульбашки порівняний з довжиною теплової хвилі, величина  $\gamma$  є складною функцією радіуса і частоти поля [4, 12, 24]. Для її визначення в загальному випадку слід вирішувати рівняння теплопровідності разом із вищевказаними рівняннями динаміки типу рівняння Релея. Величина  $\gamma$  змінюється в невеликих межах від ізотермічного значення  $\gamma = 1$  до адіабатичного,

рівного, наприклад, у випадку двоатомного газу,  $\gamma = 1.4$ . Однак тоді вже не потрібно спільного вирішення рівняння теплопровідності з рівняннями динаміки, що суттєво полегшує вирішення цілої низки задач.

Велику кількість задач акустичної діагностики можна вирішити у наближенні слабких нелінійних пульсацій бульбашок, коли можна прийняти:

$$R(t) = R_0 [1 + z(t)], \quad z \ll 1. \quad (8)$$

Бульбашки пульсують під дією акустичного тиску в звуковій хвилі  $P_a(t)$ , який пов'язаний з величиною тиску далеко від бульбашки  $P_\infty(t)$  співвідношенням  $P_\infty(t) = P(\infty, t) = P_0 + P_a(t)$ , де  $P_0$  – гідростатичний тиск в рідині.

Використовуючи малий параметр  $z \ll 1$ , рівняння (2) можна записати з точністю до третього порядку у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \ddot{z}(1+z) + \frac{3}{2} \dot{z}^2 - \frac{2\sigma}{\rho R_0^3} z [1-z+z^2] + \frac{4\eta}{\rho R_0^3} \dot{z} [1-z+z^2] + \\ + [a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3] \left[ P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} - \frac{2\sigma}{R_0} z(1-z) \right] \frac{1}{\rho R_0^3} = - \frac{P_a(t)}{\rho R_0^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

де

$$a_1 = 3\gamma, \quad a_2 = \frac{3\gamma(3\gamma+1)}{2}, \quad a_3 = \frac{3\gamma(3\gamma+1)(3\gamma+2)}{6}. \quad (10)$$

У лінійному наближенні (9) можна отримати таке рівняння для  $z(t)$ :

$$\ddot{z}^{(1)} + 2\mu \dot{z}^{(1)} + \omega_0^2 z^{(1)} = f(t), \quad f(t) = - \frac{P_a(t)}{\rho R_0^2}, \quad (11)$$

де  $\omega_0$  – власна циклічна частота радіально-симетричних пульсацій газових бульбашок.

Коефіцієнт  $\mu$ , що входить до рівняння (11), враховує втрати на тертя та визначає в'язкісний внесок у постійну згасання власних коливань, рівний:

$$2\mu = \frac{4\eta}{\rho R_0^2}. \quad (12)$$

Нелінійне рівняння (9) сильно спрощується для досить великих бульбашок з  $R_0 > \frac{2\sigma}{P_0}$ , коли можна знехтувати поверхневим тиском в порівнянні з гідростатичним, тоді отримуємо:

$$\ddot{z}(1+z) + \frac{3}{2}\dot{z}^2 + 2\mu\dot{z}[1-z+z^2] + \omega_0^2 z \left[ 1 - \frac{(3\gamma+1)}{2}z + \frac{(3\gamma+1)(3\gamma+2)}{6}z^2 \right] = f(t). \quad (13)$$

При опроміненні звуком на бульбашку діє імпульсний тиск, і тоді слід вирішувати задачу з початковими умовами по розгойдуванню коливань з моменту дії сили. Іншими словами, слід розглядати динаміку газової бульбашки з урахуванням перехідних процесів встановлення коливань після включення діючої сили. Надалі такий перехідний процес називатимемо нестационарною динамікою газової бульбашки в рідині. Рівняння коливань газової бульбашки в нестисливій рідині можна записати у вигляді модифікованого рівняння Релея (2). Розглядаємо лінійні пульсації радіуса бульбашки  $R(t)$ , що задовольняють рівнянню (8). Отримуємо в лінійному наближенні рівняння (11) для  $z(t)$ , яке зручно записати як:

$$\ddot{z}^{(1)} + 2\mu\dot{z}^{(1)} + \omega_0^2 z^{(1)} = f(t) = -\omega_0^2 \tilde{P}, \quad (14)$$

$$\tilde{P} = \frac{P_a(t)}{3\gamma P_0 \left[ \frac{1 + (3\gamma - 1)\alpha_b}{3\gamma} \right]}, \quad \alpha_b = \frac{2\sigma}{R_0 P_0}, \quad (15)$$

з початковими умовами

$$z(t) = \dot{z}(t) = 0. \quad (16)$$

Тут  $\mu$  – декремент згасання, що залежить у загальному випадку від характеру дисипації енергії в процесі коливань – теплової, в'язкісної, радіаційної, але є очевидним, що  $\mu$  отримуємо із рівняння (11) у вигляді (12), що враховує лише в'язкісні втрати. Для досить великих бульбашок  $R_0 \geq R_\sigma$ , де  $R_\sigma = \frac{2\sigma}{P_0}$ , вираз сили  $\tilde{P}$  спрощується і набуває вигляду:

$$\tilde{P} = \frac{P_a(t)}{3\gamma P_0}. \quad (17)$$

Вважатимемо, що на бульбашку падає імпульсна акустична хвиля тривалості  $\tau$ , так що акустичний тиск  $P_\infty(t)$  дорівнює:

$$P_\infty(t) = P_m \operatorname{Re} \left[ e^{-i\psi} e^{-i\omega t} \right] [\theta(t) - \theta(t - \tau)], \quad \psi = \frac{\pi}{2}, \quad (18)$$

де  $\theta(t)$  – функція Хевісайда.

Розв'язання задачі (15) – (18) отримуємо, використовуючи інтегральні перетворення, зокрема, виражаючи часові функції через спектральну щільність за допомогою перетворення Фур'є звичайним способом:

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z_p e^{-ipt} dp, \quad z_p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} z(t) e^{ipt} dt, \quad (19)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_p e^{-ipt} dp, \quad f_p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ipt} dt. \quad (20)$$

Підставляючи (19) – (20) в (15) – (18), отримуємо:

$$z_p = \frac{f_p}{\omega_0^2 - p^2 - i2p\mu}, \quad (21)$$

$$f_p = \frac{f_m}{2\pi i(p - \omega)} \left[ e^{i(p-\omega)t} - 1 \right] e^{-i\psi}, \quad f_m = \frac{\omega_0^2 P_m}{3\gamma P_0}. \quad (22)$$

Звідси

$$z(t) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{f_m}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left[ e^{i(p-\omega)t} - 1 \right] e^{-i\psi} dp}{(p - \omega)(\omega_0^2 - p^2 - i2p\mu)} \right\}. \quad (23)$$

Інтеграл (23) обчислюємо методом відрахувань, остаточно отримуємо [8]:

$$z(t) = f_m \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\psi} \left[ \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \tilde{\omega}_0^2} [\theta(t) - \theta(t - \tau)] + [\Phi(t) - \Phi(t - \tau) e^{-i\omega\tau}] \right] \right\}, \quad (24)$$

де

$$\Phi(t) = \theta(t) \frac{e^{-\delta\omega_0 t}}{2\omega_0} \left[ \frac{e^{-i\omega_0 t}}{\tilde{\omega}_0 - \omega} + \frac{e^{-i\omega_0 t}}{\tilde{\omega}_0^* + \omega} \right], \quad \tilde{\omega}_0 = \omega_0(1 - i\delta). \quad (25)$$

З (24) – (25) видно, що поряд з коливаннями на частоті зовнішньої сили  $\omega$  є затухаючі власні коливання бульбашок на частоті  $\omega_0$ .

Врахування стисливості рідини призводить до рівняння коливань бульбашки Херрінга–Флінна, яке за умови  $\frac{U}{c} \ll 1$  зручно записати у вигляді (5). У лінійному випадку з виразу (5) можна отримати такий вираз для  $z(t)$ :

$$z(t) = f_m \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\nu t} \left[ \frac{e^{-i\omega t} (1 - ikR)}{\omega^2 - \tilde{\omega}_0^2} [\theta(t) - \theta(t - \tau)] + [\tilde{\Phi}(t) - \tilde{\Phi}(t - \tau)e^{-i\omega\tau}] \right] \right\}, \quad (26)$$

де

$$\Phi(t) = \theta(t) \frac{e^{-\delta\omega_0 t}}{2\omega_0} \left[ \frac{e^{-i\omega_0 t}}{\tilde{\omega}_0 - \omega} (1 - ik_0 R) + \frac{e^{-i\omega_0 t}}{\tilde{\omega}_0^* + \omega} (1 + ik_0 R) \right], \quad \tilde{\omega}_0 = \omega_0(1 - i\delta). \quad (27)$$

**Висновки.** На рис. представлені залежності  $z(t)$  для газових бульбашок у трьох різних випадках: дорезонансні бульбашки, коли  $\omega > \omega_0$ ; резонансні, коли  $\omega = \omega_0$ ; зарезонансні, коли  $\omega < \omega_0$  [8, 19]. Добре видно відомі з теорії коливань якісні закономірності розгойдування лінійного осцилятора у зовнішньому полі. У дорезонансному випадку розгойдування на вимушеній частоті  $\omega$  відбувається на тлі повільно затухаючої низькочастотної (на власній частоті осцилятора  $\omega_0$ ) модуляції. При резонансі є повільне розгойдування своїх коливань осцилятора з характерним часом розгойдування, що визначається добротністю бульбашок на резонансі. У зарезонансному випадку високочастотні власні коливання осцилятора згасають за час, менший періоду низькочастотної зовнішньої сили.

Важливою особливістю бульбашок є, як зазначалося вище, їх залежність від характеру втрат енергії при коливаннях, що, у свою чергу, визначається радіусом бульбашки, частотою поля, типом рідини, наприклад, її в'язкістю, а також газом, що заповнює бульбашку. Тому потрібно ретельно проводити вивчення нестационарних коливань стосовно бульбашок з урахуванням конкретних механізмів дисипації енергії та їх залежності від частоти поля та радіуса бульбашок.

Механізм втрат при коливаннях газових бульбашок вивчався різними авторами, починаючи з перших робіт, присвячених динаміці бульбашок. Першою досить повною роботою, мабуть, була робота Г. Пфріма [23], який розрахував постійну згасання  $\delta$  при коливаннях бульбашок з урахуванням радіаційних, в'язкісних і теплових втрат енергії.

К. Девіном [20] величина  $\delta$  була розрахована іншим методом, і були уточнені співвідношення між зазначеними механізмами втрат.

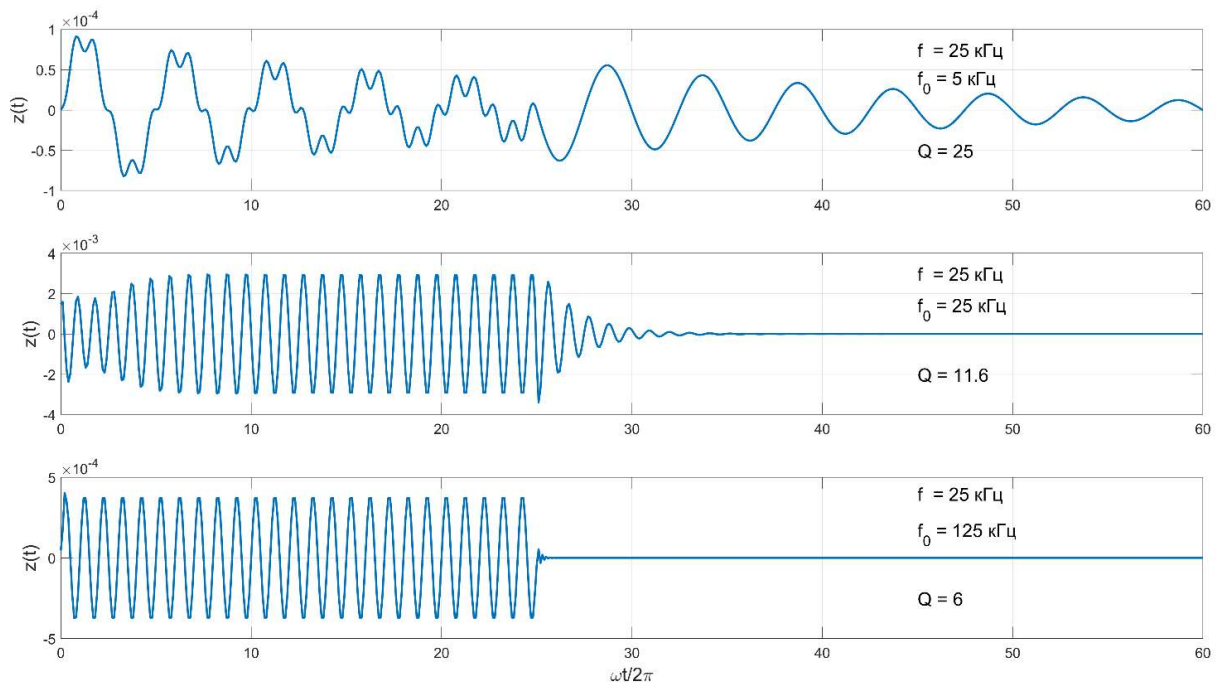


Рис. Нестационарні коливання газових бульбашок на різних частотах

Слід також згадати роботи А. Просперіті [24, 25] та І.А. Чабан [18], що зіграли важливу роль у плані розроблення методики та уточнення частотної залежності (особливо на низьких частотах). Найбільш повно механізми втрат при різних розмірах бульбашок були проаналізовані в роботах низки авторів, що розглядають також вплив фазових перетворень [1, 2, 4, 11, 13, 14, 16, 17].

#### Перелік використаних джерел

1. Акуличев В.А. Ультразвуковые волны в жидкостях с паровыми пузырьками. *Акустический журнал*. 1975. Т. 21, № 3. С. 351–359.
2. Акуличев В.А. Кавитация в криогенных и кипящих жидкостях. Москва: Наука, 1978. 280 с.
3. Акуличев В.А. Пульсации кавитационных полостей. Мощные ультразвуковые поля / ред. Л.Д. Розенберг. Москва: Наука, 1968. С. 129–166.
4. Акуличев В.А., Алексеев В.Н., Буланов В.А. Периодические фазовые превращения в жидкостях. Москва: Наука, 1986. 280 с.
5. Акуличев В.А., Буланов В.А. Акустические исследования мелкомасштабных неоднородностей в морской среде. Владивосток: ТОИ ДВО РАН, 2017. 414 с.
6. Акуличев В.А., Буланов В.А. Исследования неоднородностей морской среды методами акустического зондирования. Дальневосточные моря России: в 4 кн. / гл. ред. акад. В.А. Акуличев. Кн. 4. Физические методы исследования / отв. ред. Г.И. Долгих. Москва: Наука, 2007. С. 129–231.
7. Алексеев В.Н., Буланов В.А. Об уравнениях динамики сферической полости в сжимаемой жидкости в звуковом поле. *Акустический журнал*. 1979. Т. 25, Вып. 6. С. 921–925.
8. Буланов В.А. Введение в акустическую спектроскопию микронеоднородных жидкостей. Владивосток: Дальнаука, 2001. 280 с.
9. Исакович М.А. Мандельштам Л.И. Распространение звука в микронеоднородных средах. *УФН*. 1979. Т. 129. С. 531–540.



10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Москва: Наука, 1986. 736 с.
11. Нагиев Ф.Б., Хабеев Н.С. Эффекты теплообмена и фазовых превращений при колебаниях парогазовых пузырьков. *Акустический журнал*. 1979. Т. 25. Вып. 2. С. 271–279.
12. Наугольных К.А., Островский Л.А. Нелинейные волновые процессы в акустике. Москва: Наука, 1990. 237 с.
13. Нигматуллин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
14. Нигматуллин Р.И., Хабеев Н.С. Динамика паровых пузырьков. Изв. АН СССР. *Механ. жидк. и газа*, 1975. № 3. С. 59–67.
15. Физические основы подводной акустики / пер. с англ. под ред. В.И. Мясищев. Москва: Сов. Радио, 1955. 740 с.
16. Хабеев Н.С. Резонансные свойства паровых пузырьков. *Прикл. мат. и мех.*, 1981. Т. 45. № 4. С. 696–703.
17. Хабеев Н.С. Эффекты теплообмена и фазовых переходов при колебаниях паровых пузырьков. *Акустический журнал*. 1975. Т. 21, № 4. С. 815–821.
18. Чабан И.А. О затухании колебаний газовых пузырьков в жидкости связанном с теплообменом. *Акустический журнал*. 1989. Т. 35, Вып. 1. С. 182–183.
19. Akulichev V.A., Bulanov V.A. Measurements of bubbles in sea water by nonstationary sound scattering. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2011. V. 130, № 5, Pt. 2. P. 3438–3449.
20. Devin C. Survey of thermal, radiation and viscous damping of pulsating air bubbles in water. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1959. V. 31, № 12. P. 1654–1667.
21. Leighton T.G. The acoustic bubble. San-Diego: Academic, 1994. 640 p.
22. Minnaert M. On musical air-bubbles and sounds of running water. *Phylos. Mag.* 1933. V.16. № 17. P. 235–243.
23. Pfriem H. Zur thermischen Damping in kugelsymmetrisch schwingenden Gasblasen. *Akust. Ztschr.* 1940. Bd. 5. P. 202–212.
24. Prosperetti A. Bubble dynamics: a review and recent results. *Applied Scientific Research*, 1982. № 38. P. 145–164.
25. Prosperetti A. Nonlinear oscillation of gas bubbles in liquids. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1975. V. 57. № 4. P. 810–820.
26. Rayleigh Lord. On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity. *Philos. Mag.*, 1917. V. 34, № 200. P. 94.

### **Main regularities of non-stationary pulsation of gas bubbles in incompressible liquid**

S.H. Fedoseienkov, A.I. Shundel

*Fedoseienkov, Serhiy Hennadiyovych – PhD (Geol.), Head of the Department of panoramic acoustic systems, State Institution "Scientific Hydrophysical Center of the National Academy of Sciences of Ukraine"; E-mail: 22lex22s@ukr.net*

*Shundel, Oleksiy Ivanovych – PhD (Phys. & Math.), Senior Researcher, the Department of panoramic acoustic systems, State Institution "Scientific Hydrophysical Center of the National Academy of Sciences of Ukraine"; E-mail: lixyta666@gmail.com*

**Abstract.** The article presents the fundamental equations of bubble dynamics and explores the dynamics of gas bubbles subjected to pulse pressure from sound irradiation. Specifically, the article investigates the transient processes of oscillation after activation of the active force, taking into account the non-stationary dynamics of the gas bubble in the liquid. The study derived non-stationary vibration dependencies for gas bubbles in three cases: pre-resonance, resonance, and zarazonan bubbles.

**Keywords:** vibrations, gas bubbles, loss, pressure, pre-resonance, resonance, beyond resonance.

### **References**

1. Akulichev VA. Ultrazvukovye volny v zhidkostyakh s parovymi puzyrkami. *Akust. zhurn.* [Ultrasonic waves in liquids with vapor bubbles. *Acoustic Journal*]. 1975; 21(3):351–359 [in Russian].
2. Akulichev VA. Kavitatsiya v kriogennykh i kipyashchikh zhidkostyakh. [Cavitation in cryogenic and boiling liquids]. Moskva: Nauka; 1978. 280 p. [in Russian].

3. Akulichev VA, Rozenberg LD, editors. Pulsatsii kavitatsionnykh polostey. In: Moshchnye ultrazvukovye polya [Pulsations of cavitation cavities. Powerful ultrasonic fields]. Moskva: Nauka; 1968. p. 129–166 [in Russian].
4. Akulichev VA, Alekseev VN, Bulanov VA. Periodicheskie fazovye prevrashcheniya v zhidkostyax [Periodic phase transformations in liquids]. Moskva: Nauka; 1986. 280 p. [in Russian].
5. Akulichev VA, Bulanov VA. Akusticheskie issledovaniya melkomasshtabnykh neodnorodnostey v morskoy srede [Acoustic studies of small-scale irregularities in the marine environment]. Vladivostok: TOI DVO RAN; 2017. 414 p. [in Russian].
6. Akulichev VA, Bulanov VA. Akulichev VA, editor. Issledovaniya neodnorodnostey morskoy sredy metodami akusticheskogo zondirovaniya. Dalnevostochnye morya Rossii [Studies of inhomogeneities of the marine environment by acoustic sounding methods. Far Eastern Seas of Russia]. Moskva: Nauka; 2007. p. 129–231 [in Russian].
7. Alekseev VN, Bulanov VA. Ob uravneniyakh dinamiki sfericheskoy polosti v szhimaemoy zhidkosti v zvukovom pole. Akust. zhurn. [On the equations of dynamics of a spherical cavity in a compressible fluid in a sound field. Acoustic Journal]. 1979;25(6):921–925 [in Russian].
8. Bulanov VA. Vvedenie v akusticheskuyu spektroskopiyu mikroneodnorodnykh zhidkostey [Introduction to acoustic spectroscopy of microinhomogeneous liquids]. Vladivostok: Dal'nauka; 2001. 280 p. [in Russian].
9. Isakovich MA, Mandel'shtam LI. Rasprostranenie zvuka v mikroneodnorodnykh sredakh [Sound propagation in micro-inhomogeneous media]. UFN; 1979.129:531–540 [in Russian].
10. Landau LD, Lifshic EM. Gidrodinamika [Hydrodynamics]. Moskva: Nauka; 1986. 736 p. [in Russian].
11. Nagiev FB, Habeev NS. Effekty teploobmena i fazovykh prevrashcheniy pri kolebaniyakh parogazovykh puzyrkov. Akust. Zhurn [Effects of heat transfer and phase transformations during fluctuations of vapor-gas bubbles. Acoustic Journal]; 1979.25(2):271–279 [in Russian].
12. Naugol'nyh KA, Ostrovskij LA. Nelineynye volnovye protsessy v akustike [Nonlinear wave processes in acoustics]. Moskva: Nauka; 1990. 237 p. [in Russian].
13. Nigmatullin RI. Osnovy mekhaniki geterogennykh sred. [Fundamentals of mechanics of heterogeneous media]. Moskva: Nauka; 1978. 336 p. [in Russian].
14. Nigmatullin RI, Habeev NS. Dinamika parovykh puzyrkov [Steam bubble dynamics]. Izv. AN SSSR. Mehan. zhidk. i gaza; 1975. 3:59–67 [in Russian].
15. Mjasishheva VI, editor. Fizicheskie osnovy podvodnoy akustiki [Physical basis of underwater acoustics]. Moskva: Sov. Radi; 1955. 740 p. [in Russian].
16. Habeev NS. Rezonansnye svoystva parovykh puzyrkov [Resonant properties of vapor bubbles]. Prikl. mat. i meh.; 1981. 45(4):696–703 [in Russian].
17. Habeev NS. Effekty teploobmena i fazovykh perekhodov pri kolebaniyakh parovykh puzyrkov. Akust. Zhurn [Effects of heat transfer and phase transitions during vibrations of vapor bubbles. Acoustic Journal]; 1975. 21(4):815–821 [in Russian].
18. Chaban IA. O zatukhanii kolebaniy gazovykh puzyrkov v zhidkosti svyazannom s teploobmenom. Akust. zhurn. [On the damping of oscillations of gas bubbles in a liquid associated with heat transfer. Acoustic Journal]; 1989. 35(1):182–183 [in Russian].
19. Akulichev VA, Bulanov VA. Measurements of bubbles in sea water by nonstationary sound scattering. J. Acoust. Soc. Am.; 2011. 130(5):3438–3449 [in Russian].
20. Devin C. Survey of thermal, radiation and viscous damping of pulsating air bubbles in water. J. Acoust. Soc. Am.; 1959. 31(12):1654–1667.
21. Leighton TG. The acoustic bubble. San-Diego: Academic; 1994. 640 p.
22. Minnaert M. On musical air-bubbles and sounds of running water. Phylos. Mag.; 1933. 16(17):235–243.
23. Pfriem H. Zur thermischen Damping in kugelsymmetrisch schwingenden Gasblasen. Akust. Ztschr; 1940. 5:202–212.
24. Prosperetti A. Bubble dynamics: a review and recent results. Applied Scientific Research; 1982. 38:145–164.
25. Prosperetti A. Nonlinear oscillation of gas bubbles in liquids. J. Acoust. Soc. Am.; 1975. 57(4):810–820.
26. Rayleigh Lord. On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity. Philos. Mag.; 1917. 34(200):94.