УДК 521.21/22

Ю.О. Лук'янченко

ПОБУДОВА НОРМАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ ОПРАЦЮВАННЯ ДАНИХ МІСІЇ GOCE

З появою супутникових технологій суттєво зросли масиви вимірювальних даних. У зв'язку з цим виникла потреба у підборі алгоритму для швидкої роботи з такою великою кількістю інформації.

У цій статті розглядається алгоритм побудови матриці нормальних рівнянь за даними супутникової градієнтометрії (вертикальним гравітаційним градієнтом V_{ZZ}) для подальшого визначення гармонічних коефіцієнтів гравітаційного поля Землі. Формування матриці відбувається за допомогою методу часткових сум Гаусса, а саме послідовним нагромадженням елементів нормальних рівнянь.

Ключові слова: нормальні рівняння; метод часткових сум Гаусса; місія GOCE; супутникові гравітаційні градієнти.

Вступ

Характерною рисою супутникових місій є надзвичайно великі об'єми вимірюваної інформації. Наприклад, кожну секунду проводяться основні виміри, у випадку GOCE – це градієнти сили тяжіння, а також безліч інших вимірів, таких як GNSS для визначення положення супутника, дані камер, що стежать за зірками, для встановлення положення космічного носія. Оскільки ця місія вже триває понад три роки, то можна уявити з якими об'ємами даних доводиться працювати. Для побудови моделі 300 порядку/ступеня гравітаційного поля Землі необхідно визначити понад 90000 гармонічних коефіцієнтів, а матриця нормальних рівнянь тоді матиме розмірність більшу за 90000×90000, не беручи до уваги вже параметричні рівняння, коли кількість вимірів сягає десятків мільйонів.

Вихідною інформацією для розрахунків слугують вертикальні гравітаційні градієнти у системі LNOF (Local North Oriented Frame). Також є відомими геоцентрична широта, довгота та геоцентричний радіус-вектор. Перш ніж розпочати опрацювання даних, проводиться фільтрація вхідної інформації. Наступною операцією є формування гріду. І вже після цього можна розпочати процедуру визначення гармонічних коефіцієнтів. Основною метою нашої роботи є побудова нормальних рівнянь за великої кількості даних.

Постановка задачі

Сьогодні всі обчислення виконуються за допомогою комп'ютерів, що дає змогу розв'язувати задачі, які неможливо виконати без застосування обчислювальних машин. Але навіть у цій ситуації для науковця, який не володіє сучасним суперкомп'ютером (обчислювальним кластером, у який входить понад 100 000 процесорів), така задача як побудова моделі гравітаційного поля Землі не є простим та швидким процесом. Така робота на персональному комп'ютері може зайняти довгі місяці безперервної роботи, крім того обмежується кількість даних, які можна одночасно опрацьовувати.

Отже, для побудови матриці нормальних рівнянь необхідно розробити алгоритм, який зменшив би розміри матриць і дав би змогу окремо обчислювати елементи матриці, що дало б можливість вести обчислення паралельно. Також необхідно збільшити кількість даних, які можна опрацьовувати одночасно та зменшити час обчислень.

Матеріал основного дослідження

Підготовка даних. Вихідним масивом є набір вимірів градієнтів уздовж орбіти супутника, що виконуються кожної секунди. Взявши період в один місяць, ми отримуємо вже понад мільйон даних, тому для зменшення масиву та для регуляризації розташування даних на сфері проводиться операція грідування. Для прикладу, оберемо географічний грід, де точки розташовані на меридіанах та паралелях, вузли цієї сітки розташовані із заданим кроком. Тобто, якщо точок уздовж меридіана *L*, то точок уздовж паралелі *2L*, тоді загальна кількість точок $I = 2L^2$, де L розраховується, як $L = \frac{\pi}{\Delta\lambda}$, $\Delta\lambda = \Delta\vartheta$, де $\Delta\lambda$ та $\Delta\vartheta$ – крок уздовж паралелі (по довготі) та вздовж меридіана (по широті) відповідно.

Ця операція зменшує масив даних, суттєво не погіршуючи вихідну інформацію (залежить від щільності гріду) та регулярно розташовує дані вздовж паралелей і меридіанів. Таке розташування даних дає змогу зменшити час подальших обчислень. Під час побудови матриці нормальних рівнянь використовуються поліноми Лєжандра, які залежать тільки від широти, отже для всіх точок з однаковою широтою будуть одні й ті самі значення цих поліномів. Отже, не потрібно обчислювати поліноми Лєжандра для кожної точки, а достатньо їх знайти один раз для кожної паралелі. Також спостерігається симетричність відносно екватора, а це означає, що достатньо обчислювати поліноми Лєжандра тільки для однієї з півкуль.

Для досягнення ще більшої переваги за допомогою скорочення часу обчислень використовується грід Гаусса. За розташуванням грід Гаусса нагадує географічний (рис. 1), але точки вздовж меридіана розташовуються у нулях поліномів Лєжандра, $P_L(\cos\vartheta_j)=0$. Тобто на кожній паралелі є L нулів поліномів [Eicker, 2008]. Таке розташування точок дає змогу використати властивість ортогональності поліномів Лєжандра для дискретного випадку. Це означає, що всі недіагональні елементи матриці нормальних рівнянь будуть дорівнювати нулю. Тобто потрібно обчислювати тільки діагональні елементи, що суттєво зменшує час обчислень. У цьому разі випливає ще одне – оскільки недіагональні елементи коваріаційної матриці дорівнюють нулю, то це означає, що можна визначати гармонічні коефіцієнти незалежно один від одного.

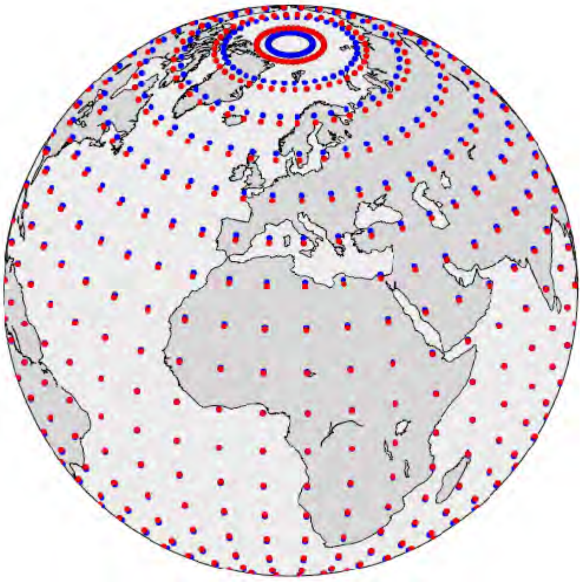

Рис. 1. Порівняння Гауссового гріду (червоний) і географічного (синій), L = 18. [Eicker, 2008].

Формування матриці нормальних рівнянь. Вихідними даними для побудови моделі слугують вертикальні гравітаційні градієнти V_{ZZ}, які відповідають другій похідній від гравітаційного потенціалу вздовж радіус-вектора [Gruber et al., 2010].

$$V_{ZZ}=V_{rr}\,, \tag{1}$$

$$V_{rr}=\frac{GM}{R^3}\sum_{l=L_{\min}}^{L_{\max}}(l+1)(l+2)\left(\frac{R}{r}\right)^{l+3}\times$$
$$\times\sum_{m=0}^{l}\left(C_{lm}\cos(m\lambda)+S_{lm}\sin(m\lambda)\right)P_{lm}(\cos\vartheta)\,. \tag{2}$$

Розписавши це рівняння, ми побачимо, що гармонічні коефіцієнти C_{lm} та S_{lm} лінійно входять у цей вираз. Нехай кількість вимірів дорівнює k. Перепишемо утворену систему рівнянь у матричному вигляді:

$$\mathbf{Ax}+\mathbf{L}=\mathbf{V}\,, \tag{3}$$

де $\mathbf{A}$ – матриця параметричних рівнянь, $\mathbf{x}$ – вектор невідомих (гармонічних коефіцієнтів), $\mathbf{L}$ – вектор вільних членів (V_{ZZ_i}), $\mathbf{V}$ – вектор поправок. Розглянемо детальніше матрицю параметричних рівнянь $\mathbf{A}=(a_{ij})$, де a_{ij} – елемент матриці параметричних рівнянь, який знаходиться на перетині i-го рядка та j-го стовпця. Нехай порядок розкладу дорівнює n, тоді кількість невідомих гармонічних коефіцієнтів можна визначити як $q=(n+1)^2$, де q – кількість невідомих гармонічних коефіцієнтів. Відповідно до цих позначень матриця $\mathbf{A}$ матиме розмірність $k\times q$. Якщо будувати модель до 250 порядку/ступеня, використовуючи масив даних за один місяць з частотою вимірювань одна секунда, то розмірність такої матриці буде більша за розмірність $10^6\times 6\cdot 10^4$, а опрацювання таких матриць забирає багато часу та вимагає потужного комп’ютерного забезпечення.

Розглянемо детальніше елементи матриці параметричних рівнянь a_{ij}. Відповідно до виразу вертикального гравітаційного градієнта (2) можна записати:

$$a_{ij}=\frac{GM}{R^3}\sum_{l=L_{\min}}^{L_{\max}}(l+1)(l+2)\left(\frac{R}{r_i}\right)^{l+3}\times$$
$$\times\,\Omega_i(j)P_{lm}(\cos\vartheta_i)\,, \tag{4}$$

де функція $\Omega_i(j)$ може набувати значень $\cos(m\lambda_i)$ або $\sin(m\lambda_i)$ залежно від j. Розглянемо одне з параметричних рівнянь (2):

$$V_{ZZ_i}=a_{i0}C_{00}+a_{i1}C_{10}+a_{i2}C_{11}+a_{i3}S_{11}+a_{i4}C_{20}\ldots$$

Звідси легко побачити, що при j = 0, 1, 2, 4, функція $\Omega_i(j)=\cos(m\lambda_i)$, а при j = 3, функція $\Omega_i(j)=\sin(m\lambda_i)$. За цим самим принципом визначаються індекси l та m.

Введемо позначення матриці нормальних рівнянь $\mathbf{N}=(n_{ij})$, тоді $\mathbf{N}=\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}$, оскільки розмірність $\mathbf{A}$ $k\times q$, то розмірність $\mathbf{N}$ буде $q\times q$. Звідси видно, що матриця $\mathbf{N}$ менша за матрицю $\mathbf{A}$, отже доцільно зразу будувати матрицю нормальних рівнянь без проміжної побудови матриці параметричних рівнянь.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{1,1} & . & a_{1,nn} \\ . & . & . \\ a_{k,1} & . & a_{k,nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} a_{1,1} & . & a_{k,1} \\ . & . & . \\ a_{1,nn} & . & a_{k,nn} \end{bmatrix}. \qquad (5)$$

Отже, елемент матриці нормальних рівнянь визначатиметься так: $n_{ij}=\sum_{s=1}^{k} a_{s,i}a_{s,j}$, тоді

$$\mathbf{N}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \sum_{s=1}^{k} a_{s,1}a_{s,1} & . & \sum_{s=1}^{k} a_{s,1}a_{s,nn} \\ . & . & . \\ \sum_{s=1}^{k} a_{s,nn}a_{s,1} & . & \sum_{s=1}^{k} a_{s,nn}a_{s,nn} \end{bmatrix}. \qquad (6)$$

Оскільки елементи матриці можна визначати незалежно один від одного, це дає можливість обчислювати окремі частинки матриці окремо на різних комп’ютерах, що дає суттєву перевагу у часі обчислень (за наявності декількох комп’ютерів). Видно, що кожен елемент є певною сумою, можна винести сталий коефіцієнт за знак суми, що в подальшому значно прискорить процес обчислень.

Оскільки суму можна розкласти на дві суми:

$$\sum_{s=1}^{k} a_{s,i}a_{s,j} = \sum_{s=1}^{p_1} a_{s,i}a_{s,j} + \sum_{s=p_2}^{k} a_{s,i}a_{s,j}\,, \qquad (7)$$

де p_1 та p_2 – два послідовні цілі числа відповідно, які лежать у проміжку (1, k). З цього випливає ще одна важлива властивість цього методу. Розглянемо проміжок часу у два місяці. Тоді загальну матрицю нормальних рівнянь можемо отримати, як суму двох матриць нормальних рівнянь для кожного місяця. Нехай початкова епоха t_0, кінець першого місяця t_1, і кінець другого місяця t_2, тоді загальна матриця матиме вигляд:

$$\begin{bmatrix} \sum_{s=t_0}^{t_2} a_{s,1}a_{s,1} & . & \sum_{s=t_0}^{t_2} a_{s,1}a_{s,nn} \\ . & . & . \\ \sum_{s=t_0}^{t_2} a_{s,nn}a_{s,1} & . & \sum_{s=t_0}^{t_2} a_{s,nn}a_{s,nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{s=t_0}^{t_1} a_{s,1}a_{s,1} & . & \sum_{s=t_0}^{t_1} a_{s,1}a_{s,nn} \\ . & . & . \\ \sum_{s=t_0}^{t_1} a_{s,nn}a_{s,1} & . & \sum_{s=t_0}^{t_1} a_{s,nn}a_{s,nn} \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} \sum_{s=t_1+1}^{t_2} a_{s,1}a_{s,1} & . & \sum_{s=t_1+1}^{t_2} a_{s,1}a_{s,nn} \\ . & . & . \\ \sum_{s=t_1+1}^{t_2} a_{s,nn}a_{s,1} & . & \sum_{s=t_1+1}^{t_2} a_{s,nn}a_{s,nn} \end{bmatrix}. \qquad (8)$$

Такий принцип можна використати не тільки для розбиття на дві частини. Кількість частин потрібно вибирати залежно від того, матрицю якого розміру зручно будувати.

Висновки

Отже, для оптимізації алгоритму побудови матриці нормальних рівнянь необхідно враховувати такі фактори:

– грідування даних з метою зменшення кількості та регулярного розподілу вхідної інформації.

– обчислення елементів нормальних рівнянь без проміжного формування параметричних рівнянь.

– винесення сталих множників за знак суми в разі обчислення елементів нормальних рівнянь.

– розділення загальної матриці на суму декількох матриць, що дає змогу виконувати паралельні обчислення.

Такі модифікації методик обчислень дають змогу будувати модель гравітаційного поля до 250 порядку/степеня при безпосередньому визначенні гармонічних коефіцієнтів.

Література

Зазуляк П.М., Гавриш В.І. Євсєєва Е.М., Йосипчук М.Д, Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань // Львів: Растр-7, 2007. – 408 с.

Марченко О.М., Ярема Н.П., Лопушанський О.М., Лук’янченко Ю.О., Добові розв’язки гармонічних коефіцієнтів 2-го порядку за даними градієнтометра місії GOCE // Геодинаміка. – 2011. – № 1(10). – С. 22–26.

Bock H., Jäggi A., Meyer U., Visser P., Van den Ijssel J., Van Helleputte T., Heinze M., Hugentobler U. GPS-derived orbits for the GOCE satellite // J Geod. – 2011. – № 85. – P. 807-818.

Bouman J., Fiorot S., Fuchs M., Gruber T., Schrama E., Tscherning C., Veicherts M., Visser P. GOCE gravitational gradients along the orbit // J Geod. – 2011. – № 85. – P. 791–805.

Eicker A. Gravity field refinement by radial basis functions from in-situ satellite data // Institu für Geodäsie und Geoinformation der Universität Bonn, Januar 2008.

Golub G.H., Plemmons R.J. Large scale geodetic least squares adjustment by dissection and orthogonal decomposition // Department of Computer Science School of Humanities and Sciences Stanford University, Stan-CS-79-774 November 1979.

Gruber Th., Rummel R., Abrikosov O., Van Hees R. GOCE High Level Processing Facility GOCE Level 2 Product Data Handbook // The European GOCE Gravity Consortium EGG-C – 2010. – 77 p.

Moritz H. Least-Squares Estimation in Physical Geodesy. – München, 1970.

Pail R. GOCE gravity models // Institute of Astronomical and Physical Geodesy TU München.

Pail R., Plank G. Assessment of three numerical solution strategies for gravity field recovery from GOCE satellite gravity gradiometry implemented on a parallel platform // Journal of Geodesy. – 2002. – № 76. – P. 462–474.

ПОСТРОЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ МИССИИ GOCE

Ю.А. Лукьянченко

С появлением спутниковых технологий существенно выросли массивы измерительных данных. В связи с этим возникает необходимость в подборе алгоритма для работы с таким большим количеством информации.

В данной статье рассматривается алгоритм построения матрицы нормальных уравнений по данным спутниковой градиентометрии (а именно вертикальным градиентом) для дальнейшего определения гармонических коэффициентов гравитационного поля Земли. Формирование матрицы происходит с помощью метода частичных сумм Гаусса, а именно последовательным накоплением элементов нормальных уравнений.

Ключевые слова: нормальные уравнения; метод частичных сумм Гаусса; миссия GOCE; спутниковые гравитационные градиенты.

CONSTRUCTION OF NORMAL EQUATIONS MISSION FOR PROCESSING DATA GOCE

Yu.O. Lukyanchenko

With the advent of satellite technology significantly increased amounts of measurement data. In this regard, there is a need in the selection algorithm to work with so many information.

In this article discusses an algorithm for constructing the matrix of normal equations by Satellite gradiometry (vertical gradient) to further define the harmonic coefficients of the gravitational field of the Earth. Formation matrix is using the method of partial sums of Gauss, the accumulation of elements of the normal equations.

Key words: normal equation; method for partial sums of Gauss; mission GOCE; satellite gravity gradients.

Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів Надійшла 2.06.2013