УДК 550.831

В.С. Гольцев

К ВОПРОСУ О ВОСТАНОВЛЕНИИ ПОТЕНЦИАЛА И ЕГО ПРОИЗВОДНЫХ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ ВКЛЮЧАЮЩЕЙ ИСТОЧНИКИ

В настоящей работе исследована двойственная природа потенциала силы тяжести. Доказано, что интегральные представления потенциала силы тяжести являются зеркальным отображением тех же представлений для класса гармонических функций. Получены интегральные уравнения позволяющие восстанавливать потенциал, и как частный случай его производные, на границе области включающей источники. Такой подход позволяет локализовать вертикально и субвертикально расположенные плотностные неоднородности количественно характеризовать горизонтально слоистую среду тем самым уточняя первичную геологическую модель среды для решения обратной задачи грави- и магниторазведки.

Ключевые слова: гравиразведка; логарифмический потенциал; интегральные уравнения; гармоническая функция.

Введение

Двойственная природа потенциала силы тяжести приводит к принципиальному отличию его интегрального представления от интегрального представления гармонической функции в области, где гармоническая функция определяется по ее следу на границе области.

Действительно, потенциал силы тяжести в общем случае не является гармонической функцией, так в области включающей источники он удовлетворяет дифференциальному уравнению Пуассона. В точках же не принадлежащих области занятой массами с некоторой плотностью удовлетворяет дифференциальному уравнению Лапласа, т.е. является гармонической функцией. Использование этого факта позволяет находить интегральные уравнения, восстанавливающие потенциал и его производные на границах области, включающей источники.

Определение потенциала и его производных на границе области включающей источники

Использование решений задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа почти всегда становились основой построения алгоритмов продолжения той или иной составляющей гравитационного потенциала в верхнее или нижнее полупространство (полуплоскость) [Черный и др., 1979-1985].

В первом случае, т.е. при продолжении вверх, тем или иным способом вычисляется интеграл дающий решение этих задач в явном виде, вовтором, при продолжении составляющих потенциала вниз, в сторону возмущающих масс, решение сводится к вычислению интегральных уравнений первого рода типа свертки, что по сути те же явные решения задач Дирихле или Неймана для полупространства (полуплоскости), где определяемая функция находится под знаком интеграла.

Везде, один из сомножителей, входящий в подинтегральную функцию является следом на границе или самого потенциала или его производных. В задаче продолжения потенциала вверх след на границе считается известным, в задаче продолжения потенциала вниз его нужно определить при условии, что граница на которой он определяется находится в области гармоничности потенциала.

Естественно, что при продолжении вниз на уровни близкие к аномалееобразующим массам, а с ними связаны все особые точки потенциала и его производных, наблюдается так называемый эффект «распадения поля», свойственный всем гармоническим функциям, имеющим особые точки, т.е. такие при приближении к которым гармоническая функция стремится к бесконечности.

Однако гравитационный потенциал и его производные, в широком смысле, не являются гармоническими функциями, так уже сам потенциал в точках области включающей источники удовлетворяет уравнению Пуассона, более общему, чем уравнение Лапласа. Поэтому сосредоточимся на получении общих интегральных представлений потенциала и его производных исходя не из свойств гармонических функций, которые являются решениями уравнения Лапласа, а из более общих представлений, вытекающих из уравнения Пуассона, что естественнее для геофизических задач [Гольцев и др., 2005].

Для этого рассмотрим двухмерную область $\overline{S} = S + \partial S$, граница которой ∂S гладкая. Внутри $\overline{S}$ находится источник гравитационного потенциала т.е.

$$W(\overline{x}) = 2f\int_{S_0}\rho(\overline{\xi})\ln\frac{1}{\gamma(\overline{\xi}-\overline{x})}d_{\overline{\xi}}S \qquad (1)$$

Пусть точка $\overline{x} = (x, z)$, в которой находятся значения потенциала (1) будет либо строго внутренней, либо строго внешней по отношению к $\overline{S}$.

Если на границе ∂S известен след $W(\xi)$ и его нормальная производная $\dfrac{\partial}{\partial n_{\overline{\xi}}}W(\xi)$, $\xi \in \partial S$ то для точки $\overline{x} = (x, z)$ внешней к $\overline{S}$ справедливо

$$\int_S (\Delta_{\bar\xi} W(\bar\xi)V(\bar\xi-\bar x)-\Delta_{\bar\xi} V(\bar\xi-\bar x)W(\bar\xi))\,d_{\bar\xi}S=\int_{S_0}\Delta_{\bar\xi} W(\bar\xi)V(\bar\xi-\bar x)\,d_{\bar\xi}S=$$

$$=\int_{\partial S}(\frac{\partial}{\partial n_{\bar\xi}}W(\bar\xi)V(\bar\xi-x)-\frac{\partial}{\partial n_{\bar\xi}}V(\bar\xi-\bar x)W(\bar\xi))\,d_{\bar\xi}l$$

$$V(\bar\xi-\bar x)=\ln 1/r(\bar\xi-\bar x),\ r(\bar\xi-\bar x)=((\xi-x)^2+(\eta-z)^2)^{1/2} \qquad (2)$$

Где (2) модифицированная формула Грина для области S содержащей массы в области S_0, плотности $\rho(\bar\xi),\bar\xi\in\bar S_0$. Тогда

$$\Delta_{\bar\xi}W(\bar\xi)=2f\int_{S_0}\rho(\bar t)\Delta_{\bar\xi}\ln\frac{1}{r(\bar t-\bar\xi)}d_{\bar f}S \qquad (3)$$

Решение $\Delta_{\bar\xi}(\ln\frac{1}{r(\bar t-\bar\xi)})=-2\pi\delta(\bar t-\bar\xi)$,

где $\delta(\bar t-\bar\xi)$ функция Дирака известно, следовательно

$$-2\pi W(\bar x)=\int_{\partial S}(\frac{\partial}{\partial n_{\bar\xi}}W(\bar\xi)V(\bar\xi-\bar x)-$$
$$-\frac{\partial}{\partial n_{\bar\xi}}V(\bar\xi-\bar x)W(\bar\xi))d_{\bar\xi}l \qquad (4)$$

Подставляя (4) в левую часть (2) приходим к

$$\Delta_{\bar\xi}W(\bar\xi)=-4\pi f\int_{S_0}\rho(\bar t)\delta(\bar t-\bar\xi)d_{\bar f}\xi=$$
$$=-4\pi f\rho(\bar\xi) \qquad (5)$$

Таким образом, прямая задача нахождения потенциала в точках внешних по отношению к области $\bar S$, включающей гравитирующие массы, однозначно определяются по следам самого потенциала и его нормальной производной на границе ∂S области S.

Рассмотрим случай, когда точка $\bar x=(x,z)$ в (1) находится строго внутри области S. При этом либо $\bar x\in\bar S_0$, либо $\bar x\,\bar\in\,\bar S_0$

Доказывается, что независимо находится точка $\bar x$ в области S_0 или в $S\setminus S_0$ левая часть (1) всегда равна нулю. Тогда

$$\int_{\partial S}(\frac{\partial}{\partial n_{\bar\xi}}W(\bar\xi)\ln\frac{1}{r(\bar\xi-\bar x)}-$$
$$-\frac{\partial}{\partial n_{\bar\xi}}\ln\frac{1}{r(\bar\xi-\bar x)}W(\bar\xi))d_{\bar\xi}l=$$
$$=\begin{cases}-2\pi W(\bar x) & ,\bar x\,\bar\in\,\bar S\\ 0 & \bar x\in S\end{cases} \qquad (6)$$

Это сразу позволяет для некоторых простых областей решать обратную задачу восстановления потенциала на границе ∂S области S, содержащей источники потенциала, на пример, для круга и соответственно всех областей, конформно отображаемых на круг. Действительно, интеграл Пуассона, дающий решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге, рассматривается уже как интегральное уравнение с неизвестным на границе следом потенциала и с известными значениями в области его гармоничности.

Следствием (6) являются системы интегральных уравнений позволяющие восстанавливать потенциал и его нормальную производную к границе области S. Так, свойства ядра интегрального представления (6) позволяет выделить два линейно-независимых подмножества его производных

$$\left\{\frac{\partial^n}{\partial x^n}\ln 1/r(\bar\xi-\bar x)\right\},$$
$$\left\{\frac{\partial^n}{\partial x^{n-1}\partial x}\ln 1/r(\bar\xi-\bar x)\right\}.$$

Тогда подставляя в (6) вместо фундаментального решения уравнения Лапласа его производные из указанных выше подмножеств получаем

$$\begin{cases}-2\pi\frac{\partial^n}{\partial x^n}W(\bar x)=\int_{\partial S}\left(\frac{\partial}{\partial n_\xi}W(\bar\xi)\frac{\partial^n}{\partial x^n}\ln\frac{1}{r(\bar\xi,\bar x)}-\frac{\partial}{\partial n_{\bar\xi}}\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n}\ln\frac{1}{r(\bar\xi,\bar x)}\right)W(\bar\xi)\right)d_{\bar\xi}l,\\ -2\pi\frac{\partial^n}{\partial x^{n-1}\partial z}W(\bar x)=\int_{\partial S}\left(\frac{\partial}{\partial n_\xi}W(\bar\xi)\frac{\partial^n}{\partial x^{n-1}\partial z}\ln\frac{1}{r(\bar\xi,\bar x)}-\frac{\partial}{\partial n_{\bar\xi}}\left(\frac{\partial^n}{\partial x^{n-1}\partial z}\ln\frac{1}{r(\bar\xi,\bar x)}\right)W(\bar\xi)\right)d_{\bar\xi}l,\end{cases} \qquad (7)$$

систему интегральных уравнений, позволяющую по известным значениям

$$\left\{\frac{\partial^n}{\partial x^n}W(x)\right\}\left\{\frac{\partial^n}{\partial x^{n-1}\partial x}W(x)\right\},$$

вычисленных или измеренных на поверхности Земли, находить значения потенциала и его нормальной производной на границе области, включающей источники.

Выводы

Перспективность такого подхода очевидна. Решение систем интегральных уравнений типа (7) позволяет определить источники потенциала не только по «верхним» но и «боковым» и «нижним» областям границы ∂S, тем самым, решая проблему не только эквивалентности источников расположенных на одной вертикальной линии, но и гравистратиграфиговать плоско-параллельный разрез, что значительно повышает геоинформативность метода продолжения гравитационного потенциала и его производных прирешении обратных задач гравиразведки и магниторазведки.

Литература

Черный А.В., Гольцев В.С. О восстановлении производных гармонических функций, описывающих гравитационные и магнитные аномалии, по приближенно заданным их значениям в регулярной сети точек вещественной оси. Часть I-II III // Геофиз. журн. –1979. – №2. – С. 48-56; 1980. – № 2. – С.38-47; 1982.– № 6. – С. 73-96; 1985. – № 3. – С. 30-39; 1985. – № 4. – С. 80-91.

Гольцев В.С., Корчагин И.Н., Шумик С.В. Исследование производных логарифмического потенциала для области, включающей источники // «Теоретичні та прикладні аспекти геоінформатики». – Київ. – 2005. – Всеукраїнська асоціація геоінформатики. Центр менеджменту і маркетингу в галузі наук про Землю ІГН НАН України. – С. 104-116.

ДО ПИТАННЯ ВІДНОВЛЕННЯ ПОТЕНЦІАЛУ ТА ЙОГО ПОХІДНИХ НА ГРАНИЦІ ОБЛАСТІ, ЯКА ВКЛЮЧАЄ ДЖЕРЕЛА

В.С. Гольцев

В даній роботі досліджена двоїста природа потенціалу сили тяжіння. Доведено, що інтегральні представлення потенціалу сили тяжіння є дзеркальним відображенням тих самих представлень для класу гармонічних функцій. Отримано інтегральні рівняння, котрі дозволяють відновлювати потенціал і його похідні на границі області, що включає джерела, як частковий випадок. Такий підхід дозволяє локалізувати вертикально і субвертикально розташовані густинні неоднорідності, кількісно характеризувати горизонтальношарувате середовище тим самим уточнюючи первинну геологічну модель середовища для вирішення оберненої задачі граві- та магніторозвідки.

Ключові слова: гравірозвідка; логарифмічний потенціал; інтегральні рівняння; гармонічна функція.

ON RECOVERING THE POTENTIAL AND ITS DERIVATIVES ON THE BOUNDARY OF THE AREA CONTAINING SOURCES

V.S. Golzev

In the work, the dual nature of the gravitational potential is investigated. It is proved, that the integral representation of the gravitational potential is a mirror reflection of the same images for the class of harmonic functions. The integrated equations, enabling to restore potential and it’s derivations on the boundary of sources-including areas was obtained. This approach enables to localize vertical and subvertical density heterogeneities, quantitatively characterize the horizontally layered medium, updating the geological model of the primary environment for solving the inverse problem of gravity and magnetic survey, thereby.

Key words: gravimetric; the logarithmic potential; integral equations; the harmonic function.

Технический центр НАН Украины, г. Киев, Украина

Надійшла 31.07.2013